CASO GERAL

QUEREMOS AGORA ACHAR, PARA j_1 E j_2 FIXOS, QUAIS E QUANTOS VALORES DE j EXISTEM. RECAPITULANDO, TEMOS $(2j_1+1)(2j_2+1)$ ESTADOS:

$$|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle \longrightarrow |m_1, m_2\rangle$$

$$m_1 = -j_1, -j_1+1, \ldots, j_1-1, j_1$$

$$m_2 = -j_2, -j_2+1, \ldots, j_2-1, j_2$$

ONDE, SIMPLIFICAMOS A NOTAÇÃO OMITINDO j_1, j_2, QUE SÃO FIXOS. OS ESTADOS DA BASE "SOMADA" SÃO DO TIPO:

$$|j_1, j_2, \alpha, j, m\rangle \longrightarrow \|\lambda, j, m\rangle$$

$$m = -j, -j+1, \ldots, j-1, j$$

ONDE <u>USAREMOS $\| \;\rangle$</u> PARA A BASE SOMADA E <u>λ</u> DISTINGUE OS POSSÍVEIS ESTADOS <u>DIFERENTES</u> COM O MESMO (j, m). VEREMOS QUE HÁ <u>SEMPRE</u> APENAS UM ESTADO E O <u>λ</u> É DESNECESSÁRIO.

A ESTRATÉGIA É SIMILAR À FEITA PARA $j_1 = 1/2 = j_2$.

LEMBRAMOS QUE $|m_1, m_2\rangle$ É SEMPRE AUTO-ESTADO DE J_z COM AUTOVALOR $M = m_1 + m_2$:

$$J_z |m_1, m_2\rangle = (J_{1z} + J_{2z}) |m_1, m_2\rangle = (m_1 + m_2) |m_1, m_2\rangle$$

(ATENÇÃO: OMITIREMOS $\hbar$ NOS PRÓXIMOS SLIDES)

TOMANDO OS VALORES MÁXIMOS DE m_1, m_2 TEMOS O VALOR MÁXIMO DE M:

$$M_{max} = j_1 + j_2$$

COMO ESSE ESTADO É ÚNICO ELE SÓ PODE SER O ESTADO COM $j = j_1 + j_2$

$$||j_1 + j_2, j_1 + j_2\rangle = |j_1, j_2\rangle \quad (1)$$

POIS, SE $j > j_1 + j_2$, HAVERIA UM ESTADO COM $M > j_1 + j_2 = M_{max}$, O QUE É IMPOSSÍVEL. VAMOS ILUSTRAR NOSSOS PASSOS COM UM CASO DE EXEMPLO,

$$j_1 = 2 \quad j_2 = 1$$

NESSE CASO, TEMOS:

$$|| 3,3 \rangle = | 2,1 \rangle$$

COMO ESSE ESTADO É ÚNICO, NÃO PRECISAMOS DO RÓTULO Δ

E NÃO PODE HAVER $j>3$, COMO POR EXEMPLO, $j=4$, PORQUE HAVERIA, ALÉM DE

$$|| 4,3 \rangle$$

TAMBÉM:

$$|| 4,4 \rangle$$

MAS

$$m_{max} = 3$$

APLICANDO AGORA $J_- = J_{1-} + J_{2-}$ NA (1) TEMOS:

$$J_- || j_1+j_2, j_1+j_2 \rangle = \gamma || j_1+j_2, j_1+j_2-1 \rangle$$

$$= \alpha | j_1-1, j_2 \rangle + \beta | j_1, j_2-1 \rangle$$

ONDE (γ, α, β) SÃO CONSTANTES REAIS QUE PODEM SER CALCULADAS. ASSIM,

$$|| j_1+j_2, j_1+j_2-1 \rangle = \alpha' | j_1-1, j_2 \rangle + \beta' | j_1, j_2-1 \rangle \quad (2)$$

ENTRETANTO, EXISTE UMA OUTRA COMBI-NAÇÃO LINEAR:

$$\beta' |j_1 - 1, j_2\rangle - \alpha' |j_1, j_2 - 1\rangle \quad (3)$$

QUE É ORTOGONAL AO ESTADO (2), COM:

$$M = m_1 + m_2 = j_1 + j_2 - 1$$

ORA, ESSE ESTADO TEM QUE TER

$$j = j_1 + j_2 - 1$$

NÃO PODE SER MAIOR QUE ESSE VALOR PORQUE, DO CONTRÁRIO, HAVERIA M MAIOR, MAS JÁ VIMOS QUE A ÚNICA POSSIBILIDADE DE M MAIOR É O ESTADO (1). NO NOSSO EXEMPLO:

$$||3,2\rangle = \alpha' |1,1\rangle + \beta' |2,0\rangle \quad (4)$$

$$||2,2\rangle = \beta' |1,1\rangle - \alpha' |2,0\rangle \quad (5)$$

NOTE QUE COMO $||2,2\rangle$ É ÚNICO, NÃO PRECISAMOS DE λ.

AGORA, PROCEDEMOS SEQUENCIALMENTE. APLICAMOS $J_- = J_{1-} + J_{2-}$ A $||j_1+j_2-1, j_1+j_2-1\rangle$ (EQ. 3), E OBTEMOS

$$||j_1+j_2-1, j_1+j_2-2\rangle = \lambda'|j_1-2, j_2\rangle + \mu'|j_1-1, j_2-1\rangle + \nu'|j_1, j_2-2\rangle$$

UMA OUTRA COMBINAÇÃO LINEAR DOS MESMOS ESTADOS É O ESTADO

$$||j_1+j_2, j_1+j_2-2\rangle = \lambda|j_1-2, j_2\rangle + \mu|j_1-1, j_2-1\rangle + \nu|j_1, j_2-2\rangle$$

COMO SÃO 3 ESTADOS L.I. EXISTE UMA TERCEIRA COMBINAÇÃO LINEAR QUE DÁ:

$$||j_1+j_2-2, j_1+j_2-2\rangle = \lambda''|j_1-2, j_2\rangle + \mu''|j_1-1, j_2-1\rangle + \nu''|j_1, j_2-2\rangle$$

MAIS UMA VEZ SEM A NECESSIDADE DO J_-, E TEMOS TAMBÉM: $j = j_1 + j_2 - 2$. ESSE PROCESSO TERMINA EM:

$$j = |j_1 - j_2|$$

DE FATO, TOMEMOS O NOSSO EXEMPLO. APLICANDO $J_- = J_{1-} + J_{2-}$ EM (4) E (5):

$$||3,1\rangle = \lambda\,|0,1\rangle + \mu\,|1,0\rangle + \rho\,|2,-1\rangle \quad (5)$$

$$||2,1\rangle = \lambda'\,|0,1\rangle + \mu'\,|1,0\rangle + \rho'\,|2,-1\rangle \quad (6)$$

$$||1,1\rangle = \lambda''\,|0,1\rangle + \mu''\,|1,0\rangle + \rho''\,|2,-1\rangle \quad (7)$$

SE TENTARMOS APLICAR $J_- = J_{1-} + J_{2-}$ A (5), (6) E (7), APENAS 3 ESTADOS ESTARÃO DISPONÍVEIS PARA FORMAREM COMBINAÇÕES LINEARES:

$$|0,0\rangle\ ,\ |-1,1\rangle\ ,\ |1,-1\rangle$$

SE LEMBRARMOS QUE O MENOR VALOR DE m_2 É $m_2 = -j_2 = -1$. NÃO HÁ COMO GERAR $j = 0$ E O MENOR VALOR DE j POSSÍVEL É:

$$j = 1 = |j_1 - j_2|$$

ASSIM, OS VALORES POSSÍVEIS DE j SÃO:

$$j = |j_1 - j_2|, \; |j_1 - j_2| + 1, \; \ldots\ldots, \; j_1 + j_2 - 1, \; j_1 + j_2$$

E CADA UM APARECE APENAS UMA VEZ. ISSO PODE SER CONFIRMADO MOSTRANDO QUE OS ESTADOS DA BASE "SOMADA" ESGOTAM A DIMENSÃO DO ESPAÇO DE HILBERT, QUE É: $(2j_1+1)(2j_2+1)$. DE FATO, COMO CADA VALOR DE j GERA UM SUB-ESPAÇO DE DIMENSÃO $(2j+1)$, A DIMENSÃO TOTAL DA BASE "SOMADA" É:

$$\sum_{j=|j_1-j_2|}^{j=j_1+j_2} (2j+1) = 2\sum j + \sum 1 \equiv D$$

MAS, DAS PAs:

$$\sum_{j=|j_1-j_2|}^{j=j_1+j_2} j = \frac{1}{2}\left[j_1 + j_2 - |j_1 - j_2| + 1\right]\left[j_1 + j_2 + |j_1 - j_2|\right]$$

$$\sum_{j=|j_1-j_2|}^{j=j_1+j_2} 1 = j_1 + j_2 - |j_1 - j_2| + 1$$

SEGUE QUE:

$$D = [j_1 + j_2 - |j_1 - j_2| + 1][j_1 + j_2 + |j_1 - j_2|] + j_1 + j_2 - |j_1 - j_2| + 1$$

$$= [j_1 + j_2 - |j_1 - j_2| + 1][j_1 + j_2 + |j_1 - j_2| + 1]$$

$$= (j_1 + j_2 + 1)^2 - (j_1 - j_2)^2$$

$$= 1 + 2 j_1 j_2 + 2(j_1 + j_2) + 2 j_1 j_2$$

$$= (2j_1 + 1)(2j_2 + 1) \qquad \text{Q.E.D.}$$

ASSIM, POR EXEMPLO, SE $j_1 = j_2 = 3$,

$$j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

SE $j_1 = 4$ e $j_2 = 1/2$,

$$j = \frac{7}{2}, \frac{9}{2}$$

COEFICIENTES DE CLEBSC-GORDAN

PORTANTO, O ESPAÇO PARA j_1, j_2 FIXOS, TEM COMO BASES POSSÍVEIS:

$$|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle \quad \text{OU} \quad |j_1, j_2, j, m\rangle \equiv |j, m\rangle$$

PODEMOS ESCREVER UMA EM TERMOS DA OUTRA:

$$|j, m\rangle = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \langle j_1, j_2, m_1, m_2 | j, m\rangle |j_1, j_2, m_1, m_2\rangle$$

OS COEFICIENTES $\langle j_1, j_2, m_1, m_2 | j, m\rangle$ SÃO CHAMADOS DE COEFICIENTES DE CLEBSCH-GORDAN. POR CONVENÇÃO, SÃO TOMADOS COMO REAIS E HÁ UMA REGRA PARA ALGUNS DE SEUS SINAIS (OS SINAIS RELATIVOS SÃO DETERMINADOS UNIVOCAMENTE) UM COEFICIENTE DE C-G

$$\langle j_1, j_2, m_1, m_2 | j, m\rangle \neq 0$$

APENAS SE:

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2 \quad \text{E} \quad m = m_1 + m_2$$

HÁ TABELAS DE C-G, COMO POR EXEMPLO:

j'	j''	j	m	m'	m''	$C_{j'j''}(j\,m\,;\,m'\,m'')$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	+1	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	$\pm\frac{1}{2}$	$\mp\frac{1}{2}$	$1/\sqrt{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\pm\frac{1}{2}$	$\mp\frac{1}{2}$	$\pm 1\sqrt{2}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\pm\frac{3}{2}$	± 1	$\pm\frac{1}{2}$	1
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	± 1	$\mp\frac{1}{2}$	$\sqrt{1/3}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	0	$\pm\frac{1}{2}$	$\sqrt{2/3}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	± 1	$\mp\frac{1}{2}$	$\pm\sqrt{2/3}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	0	$\pm\frac{1}{2}$	$\mp\sqrt{1/3}$
1	1	2	± 2	± 1	± 1	1
1	1	2	± 1	± 1	0	$1/\sqrt{2}$
1	1	2	± 1	0	± 1	$1/\sqrt{2}$
1	1	1	± 1	± 1	0	$\pm 1/\sqrt{2}$
1	1	1	± 1	0	± 1	$\mp 1/\sqrt{2}$
1	1	0	0	± 1	∓ 1	$1/\sqrt{3}$
1	1	0	0	0	0	$-1/\sqrt{3}$

ONDE: $C_{j'j''}(j, m\,;\, m'\, m'') \equiv \langle j', j'', m', m'' | j\, m \rangle$