ESTRUTURA FINA E HIPERFINA DO ÁTOMO DE HIDROGÊNIO

QUANDO ESTUDAMOS O ÁTOMO DE HIDROGÊNIO, ESTUDAMOS O HAMILTONIANO:

$$H_0 = \frac{\vec{P}^2}{2\mu} - \frac{e^2}{R}$$

ESSE HAMILTONIANO É NÃO RELATIVÍSTICO. AS VELOCIDADES TÍPICAS DO ELÉTRON NOS NÍVEIS ENCONTRADOS SÃO:

$$v \simeq \frac{e^2}{\hbar} \quad \text{OU} \quad \frac{v}{c} \simeq \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137} \simeq 10^{-2}$$

SÃO VELOCIDADES NÃO ULTRA-RELATIVÍSTICAS ($v \simeq c$), MAS EFEITOS RELATIVÍSTICOS, EMBORA PEQUENOS, SÃO PERFEITAMENTE MENSURÁVEIS. NESSE CAPÍTULO, VAMOS ESTUDAR ESSES EFEITOS. ALÉM DISSO, TAMBÉM ESTUDAREMOS O EFEITO DO SPIN DO PRÓTON E SEU MOMENTO MAGNÉTICO ASSOCIADO. TODAS ESSAS CORREÇÕES SÃO TAIS QUE:

$H = H_0 + W$ E OS EFEITOS DE W PODEM SER ESTUDADOS POR TEORIA DE PERTURBAÇÃO

O HAMILTONIANO DA ESTRUTURA FINA

A JUSTIFICATIVA PARA AS CORREÇÕES RELATIVÍSTICAS AO HAMILTONIANO H_0 SÓ PODEM SER DADAS ATRAVÉS DA EQUAÇÃO DE DIRAC QUE É A EQUAÇÃO QUE DESCREVE O ELÉTRON EM QUALQUER REGIME DE VELOCIDADES. VAMOS AQUI APENAS LISTAR O RESULTADO DESSA ANÁLISE:

a) O SPIN DO ELÉTRON: A DESCRIÇÃO EXIGE QUE SE USE PARA O ELÉTRON UM SPINOR APROPRIADO PARA UMA PARTÍCULA DE SPIN 1/2, COMO MOSTRADO NO CAPÍTULO 9.

b) CORREÇÕES RELATIVÍSTICAS: OS PRIMEIROS TERMOS NUMA EXPANSÃO EM POTÊNCIAS DE v/c SÃO:

$$H = mc^2 + H_0 - \underbrace{\frac{\vec{P}^4}{8m^3c^2}}_{W_{mv}} + \underbrace{\frac{1}{2m^2c^2}\frac{1}{R}\frac{dV(R)}{dR}\vec{L}\cdot\vec{S}}_{W_{SO}} + \underbrace{\frac{\hbar^2}{8m^2c^2}\nabla^2 V(R)}_{W_D} + O\left(\frac{v^3}{c^3}\right)$$

ONDE USAMOS m PARA A MASSA DO ELÉTRON (O LIVRO USA m_e).

O PRIMEIRO TERMO, OBVIAMENTE, É A ENERGIA DE REPOUSO DO ELÉTRON E É UMA CONTANTE FIXA QUE PODE SER DEIXADA DE LADO, POIS É APENAS UMA CONSTANTE ADITIVA.

OS OUTROS TERMOS APÓS H_0 SÃO O HAMILTONIANO DE ESTRUTURA FINA.

VAMOS DAR A ORIGEM FÍSICA DE CADA UM.

W_{mv}: SE PARTIRMOS DA RELAÇÃO ENERGIA-MOMENTO RELATIVÍSTICA:

$$\frac{E}{c} = \sqrt{p^2 + m^2c^2} = mc\left(1 + \frac{p^2}{m^2c^2}\right)^{1/2}$$

PODEMOS EXPANDI-LA EM POTÊNCIAS DE $\frac{p}{mc}$:

$$\frac{E}{c} \cong mc\left(1 + \frac{p^2}{2m^2c^2} - \frac{p^4}{8m^4c^4} + o\left(\frac{p^6}{m^6c^6}\right)\right)$$

$$E \cong mc^2 + \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3c^2}$$

RECONHECEMOS OS 2 PRIMEIROS TERMOS E O TERCEIRO NOS DÁ W_{mv}.

ORDEM DE GRANDEZA DE W_{mv}:

$$\frac{W_{mv}}{H_0} \simeq \frac{p^4/8m^3c^2}{p^2/2m} = \frac{p^2}{4m^2c^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{v}{c}\right)^2 \simeq \left(\frac{1}{137}\right)^2 \simeq 10^{-4}$$

COMO $H_0 \sim 10\,eV$, $W_{mv} \sim 10^{-3}\,eV$

W_{SO}: ESSE TERMO É O CHAMADO ACOPLAMENTO SPIN-ÓRBITA. SUA ORIGEM É A SEGUINTE. SE O ELÉTRON TEM VELOCIDADE $\vec{v} = \frac{\vec{p}}{m}$, O CAMPO ELÉTRICO $\vec{E}$ CRIADO PELO PRÓTON DÁ ORIGEM A UM CAMPO MAGNÉTICO $\vec{B}$ NO REFERENCIAL DO ELÉTRON:

$$\vec{B}' = -\frac{1}{c^2}\vec{v} \times \vec{E}$$

EM PRIMEIRA ORDEM EM v/c. ESSE CAMPO MAGNÉTICO ATUA SOBRE O SPIN DO ELÉTRON:

$$W' = -\vec{B}' \cdot \vec{M} = \frac{q}{m}\vec{B}' \cdot \vec{S}$$

ONDE USAMOS: $\vec{M} = -\frac{q}{m}\vec{L}$ (ELÉTRON)

O CAMPO ELÉTRICO DO PRÓTON NA POSIÇÃO $\vec{r}$ DO ELÉTRON É:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}$$

COMO A ENERGIA DE INTERAÇÃO É:

$$V(r) = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} \Rightarrow \frac{dV}{dr} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2} = \frac{e^2}{r^2}$$

PODEMOS ESCREVER: $\vec{E} = \frac{1}{qr}\frac{dV}{dr}\vec{r}$

ASSIM: $$\vec{B}' = -\frac{1}{c^2}\vec{v}\times\left[\frac{1}{qr}\frac{dV}{dr}\right]\vec{r}$$

$$= \frac{1}{qc^2}\left(\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}\right)(\vec{r}\times\vec{v})$$

$$= \frac{1}{mqc^2}\left(\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}\right)\underbrace{\vec{r}\times\vec{p}}_{\vec{L}}$$

FINALMENTE:

$$W' = \frac{1}{m^2c^2}\left(\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}\right)\vec{L}\cdot\vec{S} = \frac{e^2}{m^2c^2r^3}\vec{L}\cdot\vec{S}$$

EXISTE UM FATOR (1/2) ADICIONAL QUE ADVÉM DO FATO DE QUE O REFERENCIAL DO ELÉTRON NÃO É INERCIAL (PRECESSÃO DE THOMAS)

ASSIM:

$$W_{so} = \frac{1}{2} W' = \frac{e^2}{2m^2c^2} \frac{1}{r^3} \vec{L}\cdot\vec{S} = \frac{1}{2m^2c^2}\left(\frac{1}{R}\frac{dV(R)}{dR}\right)\vec{L}\cdot\vec{S}$$

ORDEM DE GRANDEZA DE W_{so}:

$$W_{so} \simeq \frac{e^2\hbar^2}{m^2c^2R^3} \qquad H_0 \cong \frac{e^2}{R}$$

$$\frac{W_{so}}{H_0} \cong \frac{\hbar^2}{m^2c^2R^2} \simeq \frac{\hbar^2}{m^2c^2}\frac{1}{a_0^2} = \frac{\hbar^2}{m^2c^2}\frac{e^4m^2}{\hbar^4} = \frac{e^4}{\hbar^2c^2}$$

$$= \left(\frac{1}{137}\right)^2 \cong 10^{-4}$$

QUE É DA MESMA ORDEM DE W_{mr} (10^{-3}eV)

W_D: ESSE TERMO TEM ORIGEM NO FATO DE QUE O ELÉTRON EM $\vec{r}$ NÃO "SENTE" APENAS O POTENCIAL $V(\vec{r})$ MAS TAMBÉM UMA "MÉDIA" DE $V(\vec{r})$ NUMA VIZINHANÇA DE VOLUME $\delta\sigma \sim \left(\frac{\hbar}{mc}\right)^3$, ONDE $\frac{\hbar}{mc}$ É O COMPRIMENTO DE ONDA DE COMPTON.

ASSIM, SE EXPANDIRMOS EM TORNO DE $\vec{r}$:

$$V(\vec{r}+\vec{\delta}) = V(\vec{r}) + \vec{\delta}\cdot\vec{\nabla}V + \frac{1}{2}\delta_i\delta_j\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\right) + \cdots$$

PARA UMA MÉDIA SEM DIREÇÃO ~~PREFERENCIAL~~

$$\langle \delta_i \rangle = 0 \qquad \langle \delta_i \delta_j \rangle = \delta_{ij} \langle \delta_i^2 \rangle = \frac{\delta_{ij}}{3}\langle |\vec{\delta}|^2 \rangle$$

SE PUSERMOS $\langle |\vec{\delta}|^2 \rangle \cong \left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2$

$$\langle V(\vec{r}+\vec{\delta}) \rangle = V(\vec{r}) + \frac{1}{3}\frac{\hbar^2}{m^2c^2}\nabla^2 V$$

O SEGUNDO TERMO É IGUAL A W_D A MENOS DE UM FATOR. PARA O POTENCIAL COULOMBIANO:

$$W_D = \frac{\hbar^2}{8m^2c^2}\nabla^2\left(-\frac{e^2}{r}\right)$$

MAS: $\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = \vec{\nabla}\cdot\left[\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)\right] = \vec{\nabla}\cdot\left[-\frac{\hat{r}}{r^2}\right] = -4\pi\,\delta^{(3)}(\vec{r})$

QUE PODE SER OBTIDA INTEGRANDO EM UM ESFERA DE RAIO $\underline{R}$ QUALQUER E APLICANDO O TEOREMA DE GAUSS

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \left[\frac{\hat{r}}{r^2}\right] dV = \int_S \frac{\hat{r}}{r^2} \cdot d\vec{S} = \int d\Omega = 4\pi$$

COMO O RESULTADO É VÁLIDO PARA QUALQUER $\underline{R}$, O INTEGRANDO DA INTEGRAL VOLUMÉTRICA DA ESQUERDA TEM QUE SER PROPORCIONAL À DELTA DE DIRAC. ASSIM:

$$W_D = \frac{\pi e^2 \hbar^2}{2m^2c^2} \delta^{(3)}(\vec{R})$$

O VALOR ESPERADO DE W_D NUM ESTADO $\psi(\vec{r})$ QUALQUER SERÁ:

$$\langle W_D \rangle = \frac{\pi e^2 \hbar^2}{2m^2c^2} |\psi(0)|^2$$

NOTE QUE APENAS OS ESTADOS $\underline{S}$, CUJA FUNÇÃO DE ONDA NÃO SE ANULA EM $\vec{r}=0$, TERÃO CONTRIBUIÇÃO DO TERMO DE DARWIN.

ORDEM DE GRANDEZA DE W_D:

COMO $|\psi(\vec{r})|^2$ TEM DIMENSÃO DE INVERSO DE VOLUME, PODEMOS ESTIMAR, PARA O ÁTOMO DE HIDROGÊNIO:

$$|\psi(0)|^2 \sim \frac{1}{a_0^3} = \frac{m^3 e^6}{\hbar^6}$$

LOGO:

$$W_D \simeq \frac{e^2 \hbar^2}{m^2 c^2} \frac{m^3 e^6}{\hbar^6} = \frac{m e^8}{\hbar^4 c^2}$$

USANDO:

$$H_0 \cong E_I \sim \frac{m e^4}{\hbar^2}$$

$$\frac{W_D}{H_0} \cong \frac{e^4}{\hbar^2 c^2} = \left(\frac{1}{137}\right)^2 \cong 10^{-4}$$

MAIS UMA VEZ. TODOS OS TERMO DO HAMILTONIANO DE ESTRUTURA FINA TÊM A MESMA ORDEM DE GRANDEZA.

O HAMILTONIANO HIPERFINO

O PRÓTON É UMA PARTÍCULA DE SPIN 1/2, CUJO OPERADOR DE SPIN É DENOTADO POR $\vec{I}$. ASSOCIADO AO SPIN, HÁ UM MOMENTO MAGNÉTICO:

$$\vec{M}_I = g_p \frac{\mu_n}{\hbar} \vec{I}$$

ONDE:

$$\mu_n = \frac{q\hbar}{2M_p} \qquad \text{(MAGNETON NUCLEAR)}$$

M_p = MASSA DO PRÓTON

$g_p = 5{,}585$ (FATOR GIROMAGNÉTICO DO PRÓTON)

EVIDENTEMENTE $\dfrac{\mu_n}{\mu_B} \simeq \dfrac{1}{2000} \ll 1$.

O ELÉTRON, PORTANTO, É AFETADO PELO CAMPO MAGNÉTICO CRIADO PELO DIPOLO MAGNÉTICO DO PRÓTON. HÁ 3 TERMOS QUE CONTRIBUEM PARA O HAMILTONIANO HIPERFINO W_{hf}.

$$W_{hf} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\left\{-\frac{q}{mR^3}\vec{L}\cdot\vec{\mu}_I + \frac{1}{R^3}\left[3(\vec{\mu}\cdot\hat{n})(\vec{\mu}_I\cdot\hat{n}) - \vec{\mu}\cdot\vec{\mu}_I\right] + \frac{8\pi}{3}\vec{\mu}\cdot\vec{\mu}_I\,\delta^{(3)}(\vec{R})\right\}$$

NOTE QUE ESTAMOS USANDO $\vec{\mu}$ PARA O MOMENTO MAGNÉTICO DO ELÉTRON (O LIVRO USA $\vec{\mu}_s$) E ESTAMOS ASSUMINDO $q>0$, PORTANTO A CARGA DO ELÉTRON É $-q$. O LIVRO USA q COMO SENDO UMA QUANTIDADE NEGATIVA, DAÍ A DIFERENÇA DE SINAL DO PRIMEIRO TERMO.

1º TERMO: INTERAÇÃO ENTRE O MOMENTO MAGNÉTICO DO PRÓTON COM O CAMPO MAGNÉTICO CRIADO PELO MOVIMENTO DO ELÉTRON EM TORNO DO PRÓTON. PELA LEI DE BIOT-SAVART:

$$\vec{B}_e = \frac{\mu_0}{4\pi}(-q)\frac{\vec{v}\times(-\vec{r})}{r^3} = -\frac{\mu_0 q}{4\pi}\frac{\vec{r}\times\vec{v}}{r^3} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q}{m}\frac{\vec{L}}{r^3}$$

ASSIM:

$$W^1 = -\vec{\mu}_I\cdot\vec{B}_e = -\frac{\mu_0}{4\pi}\left(-\frac{q}{mr^3}\right)\vec{L}\cdot\vec{\mu}_I$$

2º TERMO: INTERAÇÃO DIPOLO-DIPOLO ENTRE O DIPOLO MAGNÉTICO DO ELÉTRON E O DO PRÓTON. ESSE TERMO É CONHECIDO DA MAGNETOSTÁTICA.

3º TERMO: ESSE TERMO É CHAMADO DE TERMO DE CONTATO DE FERMI E VEM DO FATO DE QUE O CAMPO MAGNÉTICO CRIADO PELO PRÓTON DENTRO DO PRÓTON (LEMBRE-SE DE QUE O PRÓTON NÃO É UMA PARTÍCULA PONTUAL ELEMENTAR) É MODIFICADO EM RELAÇÃO À SUA FORMA FORA DO PRÓTON, QUE É O QUE 2º TERMO DESCREVE, DAÍ A FUNÇÃO DELTA DE DIRAC QUE SÓ ATUA NA POSIÇÃO DO PRÓTON, OU SEJA, QUANDO AS FUNÇÕES DE ONDA DO PRÓTON E DO ELÉTRON COINCIDEM.

ORDEM DE GRANDEZA DE W_{hf}

OS DOIS PRIMEIROS TERMOS SÃO DE ORDEM

$$\frac{q^2\hbar^2}{M_p m R^3}\quad\frac{\mu_0}{4\pi}=\frac{e^2\hbar^2}{M_p m R^3}\quad\mu_0\epsilon_0=\frac{e^2\hbar^2}{M_p m c^2 R^3}\simeq\frac{m}{M_p}W_{so}$$

OU SEJA, SÃO $\sim 10^{-3}\,W_{so}\sim 10^{-6}\,eV$

POR OUTRO LADO, COMPARANDO O TERMO DE FERMI E O DE DARWIN, QUE CONTÉM AMBOS UMA FUNÇÃO DELTA

$$\frac{\mu_0}{4\pi} M M_I = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q^2 \hbar^2}{m M_P} = \frac{e^2 \hbar^2}{m M_P c^2} \simeq \frac{m}{M_P} \frac{e^2 \hbar^2}{m^2 c^2}$$

OU SEJA, A RAZÃO ENTRE OS COEFICIENTES DA FUNÇÃO DELTA É TAL QUE:

$$\frac{W_{FERMI}}{W_D} \sim \frac{m}{M_P} \sim 10^{-3}$$

CONCLUINDO, O HAMILTONIANO HIPERFINO É DA ORDEM DE $10^{-3} \times$ HAMILTONIANO DE ESTRUTURA FINA.