PODEMOS TORNAR ESSE RESULTADO ÚTIL PARA PROCESSOS EM QUE AS ONDAS INCIDENTES VÊM DE TODAS AS DIREÇÕES, COM TODAS AS POLARIZAÇÕES POSSÍVEIS, COMO NO CASO DE UM ÁTOMO NUM CORPO NEGRO. NESSE CASO, NOTAMOS QUE A TAXA DE TRANSIÇÃO NÃO DEPENDE DA DIREÇÃO DA ONDA ($\hat{y}$), MAS DA POLARIZAÇÃO ($\hat{z}$), POIS O ELEMENTO DE MATRIZ É:

$$\langle \varphi_f | z | \varphi_i \rangle$$

PARA UMA POLARIZAÇÃO GENÉRICA $\hat{\varepsilon}$:

$$\langle \varphi_f | z | \varphi_i \rangle \longrightarrow \langle \varphi_f | \hat{\varepsilon} \cdot \vec{R} | \varphi_i \rangle$$

ASSUMINDO NOVAMENTE ONDAS INCOERENTES PODEMOS FAZER A MÉDIA SOBRE TODAS AS POLARIZAÇÕES (TOMANDO O UNITÁRIO $\hat{\varepsilon}$ COMO DEFINIDO PELOS ÂNGULOS ESFÉRICOS θ, ϕ, TOMANDO O EIXO $\hat{z}$ AO LONGO DE $\vec{R}$)

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta \, d\theta}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \, \left| \langle \varphi_f | \hat{\varepsilon} \cdot \vec{R} | \varphi_i \rangle \right|^2$$

$$= \int \frac{d\Omega}{4\pi} \langle \varphi_f | \hat{\varepsilon} \cdot \vec{R} | \varphi_i \rangle \langle \varphi_i | \hat{\varepsilon} \cdot \vec{R} | \varphi_f \rangle$$

$$= \int \frac{d\Omega}{4\pi} \sum_{a,b} \varepsilon^a \varepsilon^b \langle \varphi_f | R^a | \varphi_i \rangle \langle \varphi_i | R^b | \varphi_f \rangle$$

MAS A MÉDIA É FACILMENTE OBTIDA, POR SIMETRIA:

$$\int \frac{d\Omega}{4\pi} \varepsilon^a \varepsilon^b = K \delta_{ab} \quad \text{(POR SIMETRIA)}$$

$$\Rightarrow K = \int \frac{d\Omega}{4\pi} (\varepsilon^x)^2 = \int \frac{d\Omega}{4\pi} (\varepsilon^y)^2 = \int \frac{d\Omega}{4\pi} (\varepsilon^z)^2$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{d\Omega}{4\pi} \underbrace{\left[(\varepsilon^x)^2 + (\varepsilon^y)^2 + (\varepsilon^z)^2\right]}_{1} = \frac{1}{3}$$

ASSIM:

$$\int \frac{d\Omega}{4\pi} |\langle \varphi_f | \hat{\varepsilon} \cdot \vec{R} | \varphi_i \rangle|^2 = \frac{1}{3} \sum_{a,b} \delta_{ab} \langle \varphi_f | R^a | \varphi_i \rangle \langle \varphi_i | R^b | \varphi_f \rangle$$

$$= \frac{1}{3} \sum_a |\langle \varphi_f | R^a | \varphi_i \rangle|^2$$

$$= \frac{1}{3} \left[|\langle x \rangle|^2 + |\langle y \rangle|^2 + |\langle z \rangle|^2 \right] = \frac{|\vec{p}|^2}{3q^2}$$

FINALMENTE:

$$W_{if} = \frac{\pi}{3\varepsilon_0 c \hbar^2} |\vec{p}|^2 I(\omega_{fi})$$

DA RELAÇÃO ENTRE O FLUXO E A DENSIDADE DE ENERGIA ELETROMAGNÉTICA: $\frac{I(\omega)}{c} = \rho_{EM}(\omega)$

PODEMOS ESCREVER AINDA:

$$W_{if} = \frac{\pi}{3\epsilon_0 \hbar^2} \rho_{EM}(\omega_{fi}) |\vec{p}|^2$$

EMBORA O TRATAMENTO CLÁSSICO NÃO DÊ A PROBABILIDADE DE EMISSÃO ESPONTÂNEA ESSA PODE SER OBTIDA DA EXPRESSÃO ACIMA USANDO A DENSIDADE DE ENERGIA DO VÁCUO ELETROMAGNÉTICO:

$$\rho_{EM}^{(0)}(\omega) = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3}$$

$$\Rightarrow \quad W_{ESP} = \frac{\omega_{n1}^3 |\vec{p}_{n1}|^2}{3\pi\epsilon_0 \hbar c^3} \qquad \omega_{n1} = \frac{E_n - E_1}{\hbar}$$

ONDE n É O ESTADO INICIAL E 1 É O ESTADO FUNDAMENTAL.

$$|\vec{p}_{n1}|^2 = q^2 \left[|\langle \varphi_0 | x | \varphi_n \rangle|^2 + |\langle \varphi_0 | y | \varphi_n \rangle|^2 + |\langle \varphi_0 | z | \varphi_n \rangle|^2 \right]$$

ORDENS SUPERIORES EM $\left(\frac{a_0}{\lambda}\right)$:

O PRÓXIMO TERMO NA EXPANSÃO DE $W_I(t)$ É:

$$W_I(t) - W_{DE}(t) \cong \frac{iqE_0}{2m\omega} P_z \left[ikY e^{-i\omega t} + ikY e^{+i\omega t} \right]$$

$$= -\frac{qE_0 k P_z Y}{2m\omega} \left(e^{-i\omega t} + e^{i\omega t} \right)$$

$$= -\frac{qE_0}{mc} P_z Y \cos\omega t = -\frac{q}{m} B_0 P_z Y \cos\omega t$$

ONDE DEFINIMOS $B_0 = \frac{E_0}{c}$. PODEMOS ESCREVER

$$P_z Y = \frac{1}{2}(P_z Y - Z P_y) + \frac{1}{2}(P_z Y + Z P_y) = \frac{L_x}{2} + \frac{1}{2}(P_z Y + Z P_y)$$

JUNTANDO COM $W_{II}(t)$, QUE É DA MESMA ORDEM:

$$W_I + W_{II} - W_{DE} \cong -\frac{q}{2m}(L_x + 2S_x) B_0 \cos\omega t$$

$$- \frac{q}{2m}(P_z Y + Z P_y) B_0 \cos\omega t \equiv W_{DM}(t) + W_{QE}(t)$$

QUE SÃO, RESPECTIVAMENTE, OS TERMOS DE DIPOLO MAGNÉTICO E QUADRUPOLO ELÉTRICO.

PARA ENTENDER POR QUE O SEGUNDO TERMO CORRESPONDE AO QUADRUPOLO ELÉTRICO NOTAMOS QUE:

$$[z, H_0] = \left[z, \frac{\vec{P}^2}{2m}\right] = \left[z, \frac{P_z^2}{2m}\right] = \frac{2i\hbar P_z}{2m} = \frac{i\hbar}{m} P_z$$

E, ANALOGAMENTE, :

$$[Y, H_0] = \frac{i\hbar}{m} P_y$$

LOGO:

$$P_z Y + Z P_y = Y P_z + P_y Z = \frac{m}{i\hbar}\left\{ Y[Z, H_0] + [Y, H_0] Z \right\}$$

$$= \frac{m}{i\hbar}\left\{ Y Z H_0 - \cancel{Y H_0 Z} + \cancel{Y H_0 Z} - H_0 Y Z \right\}$$

$$= \frac{m}{i\hbar}\left(Y Z H_0 - H_0 Y Z \right)$$

E:

$$\langle \varphi_f | W_{QE}(t) | \varphi_i \rangle = -\frac{q E_0}{2\cancel{m} c}\left(\frac{\cancel{m}}{i\hbar}\right)(E_i - E_f)\langle \varphi_f | Y Z | \varphi_i \rangle$$

$$\times \cos \omega t = \frac{q E_0}{2 i c} \omega_{fi} \langle \varphi_f | Y Z | \varphi_i \rangle \cos \omega t$$

QUE É UM COMPONENTE DO QUADRUPOLO (Q_{YZ})

AS REGAS DE SELEÇÃO DE DIPOLO MAGNÉTICO SÃO:

$$\Delta l = 0 \qquad \Delta m_l = \pm 1, 0 \qquad \Delta m_s = \pm 1, 0$$

QUE SÃO FACILMENTE OBTIDAS DAS PROPRIEDADES DE (L_x, L_y, L_z) E (S_x, S_y, S_z)

PARA O QUADRUPOLO ELÉTRICO A ANÁLISE ENVOLVE ELEMENTOS DE MATRIZ DE $Y_{2,m}(\theta, \phi)$.

O RESULTADO É:

$$\Delta l = 0, \pm 2 \qquad \Delta m_l = 0, \pm 1, \pm 2 \qquad \Delta m_s = 0$$

AS PROBABILIDADES DE TRANSIÇÃO SÃO:

DIPOLO MAGNÉTICO:

$$|W_{fi}|^2 = \frac{q^2 B_0^2}{4m^2} |\langle \varphi_f | (L_x + 2S_x) | \varphi_i \rangle|^2$$

$$= \frac{E_0^2}{c^2} |\langle \varphi_f | M_x | \varphi_i \rangle|^2$$

ONDE USAMOS $B_0 = \frac{E_0}{c}$ E A EXPRESSÃO DO

DIPOLO MAGNÉTICO: $\vec{M} = \frac{q}{2m}(\vec{L} + 2\vec{S})$

ASSIM,

$$P_{fi}(t;\omega) = \frac{E_0^2}{4\hbar^2 c^2} |\langle \varphi_f | M_x | \varphi_i \rangle|^2 F(t; \omega \pm \omega_{fi})$$

$$= \frac{1}{2\epsilon_0 c^3 \hbar^2} \int |\langle \varphi_f | M_x | \varphi_i \rangle|^2 F(t; \omega \pm \omega_{fi}) I(\omega) d\omega$$

$$W_{fi} = \frac{\pi}{\epsilon_0 \hbar^2 c^3} |\langle \varphi_f | M_x | \varphi_i \rangle|^2 I(\omega_{fi})$$

PARA OUTRAS POLARIZAÇÕES:

$$W_{fi} = \frac{\pi}{\epsilon_0 \hbar^2 c^3} |\langle \varphi_f | M_y | \varphi_i \rangle|^2 I(\omega_{fi})$$

$$W_{fi} = \frac{\pi}{\epsilon_0 \hbar^2 c^3} |\langle \varphi_f | M_z | \varphi_i \rangle|^2 I(\omega_{fi})$$

NOTE QUE AS TAXAS DE DIPOLO MAG-
NÉTICO PODEM SER OBTIDAS DAS DE
DIPOLO ELÉTRICO ATRAVÉS DE:

$$\vec{p} \longrightarrow \frac{\vec{M}}{c}$$

TAXA DE EMISSÃO ESPONTÂNEA POR DIPOLO
MAGNÉTICO:

$$W^{DM}_{ESP} = \frac{\omega_{n1}^{3}\,|\vec{M}_{n1}|^{2}}{3\pi\epsilon_0 \hbar c^{5}} \qquad \omega_{n1} = \frac{E_n - E_1}{\hbar}$$

$$|\vec{M}_{n1}|^{2} = \left[\,|\langle\varphi_1|M_x|\varphi_n\rangle|^{2} + |\langle\varphi_1|M_y|\varphi_n\rangle|^{2} + |\langle\varphi_1|M_z|\varphi_n\rangle|^{2}\right]$$

QUADRUPOLO ELÉTRICO:

$$|W_{fi}|^2 = \frac{q^2 E_0^2}{4c^2} \omega_{fi}^2 |\langle \varphi_f | Y Z | \varphi_i \rangle|^2$$

$$= \frac{E_0^2}{4} \frac{\omega_{fi}^2}{c^2} |\langle \varphi_f | Q_{yz} | \varphi_i \rangle|^2$$

ONDE USAMOS : $Q_{yz} = q Y Z$. ANALOGAMENTE:

$$W_{fi} = \frac{\pi \omega_{fi}^2}{4\epsilon_0 c^3 \hbar^2} |\langle \varphi_f | Q_{yz} | \varphi_i \rangle|^2 I(\omega_{fi})$$