PARTÍCULAS IDÊNTICAS

NA NATUREZA, PARTÍCULAS ELEMENTARES COMO ELÉTRONS, PRÓTONS, NÊUTRONS, NEUTRINOS, FÓTONS, ETC. SÃO IDÊNTICAS E INDISTINGUÍVEIS. SUAS CARACTERÍSTICAS FÍSICAS, COMO MASSA, CARGA, SPIN, ETC. SÃO EXATAMENTE AS MESMAS E É IMPOSSÍVEL DISTINGUI-LAS. VAMOS ANALISAR AS CONSEQUÊNCIAS DESSE FATO, PRIMEIRO NO CONTEXTO DA MECÂNICA CLÁSSICA E DEPOIS DA MECÂNICA QUÂNTICA

PARTÍCULAS IDÊNTICAS NA MECÂNICA CLÁSSICA

SUPONHAMOS UM SISTEMA CLÁSSICO DE DUAS PARTÍCULAS IDÊNTICAS. A LAGRANGIANA E A HAMILTONIANA SÃO TAIS QUE:

$$L[\vec{r}_1, \vec{v}_1; \vec{r}_2, \vec{v}_2] = L[\vec{r}_2, \vec{v}_2; \vec{r}_1, \vec{v}_1]$$

$$H[\vec{r}_1, \vec{p}_1; \vec{r}_2, \vec{p}_2] = H[\vec{r}_2, \vec{p}_2; \vec{r}_1, \vec{p}_1]$$

OU SEJA, AMBAS SÃO INVARIANTES PELA TROCA DE VARIÁVEIS DINÂMICAS: $1 \rightleftarrows 2$

POR EXEMPLO, TOMEMOS DUAS PARTÍCULAS SOB A AÇÃO DE UM POTENCIAL EXTERNO $V(\vec{r})$ E INTERAÇÃO MÚTUA $U(\vec{r}_1-\vec{r}_2)$:

$$L[\vec{r}_1,\vec{v}_1;\vec{r}_2,\vec{v}_2]=\frac{1}{2}m\vec{v}_1^{\,2}+\frac{1}{2}m\vec{v}_2^{\,2}-V(\vec{r}_1)-V(\vec{r}_2)-U(\vec{r}_1-\vec{r}_2)$$

$$H[\vec{r}_1,\vec{p}_1;\vec{r}_2,\vec{p}_2]=\frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m}+\frac{\vec{p}_2^{\,2}}{2m}+V(\vec{r}_1)+V(\vec{r}_2)+U(\vec{r}_1-\vec{r}_2)$$

NOTE QUE DEVEMOS TER:

$$U(\vec{r}_1-\vec{r}_2)=U(\vec{r}_2-\vec{r}_1)\Longleftrightarrow U(\vec{r})=U(-\vec{r})$$

COMO É O CASO, POR EXEMPLO, DO POTENCIAL COULOMBIANO:

$$U(\vec{r})=\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}$$

NOTEM QUE A INVARIÂNCIA POR TROCA $1\rightleftarrows 2$ SÓ EXISTE SE AS PARTÍCULAS SÃO IDÊNTICAS. POR EXEMPLO, SE AS MASSAS SÃO DIFERENTES L E H NÃO SÃO INVARIANTES. O MESMO ACONTECE SE $V(\vec{r})$ DEPENDER DAS CARGAS, COMO $V(\vec{r})=-q\vec{E}\cdot\vec{r}$ (CAMPO ELÉTRICO EXTERNO)

AS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO QUE DECORREM SÃO:

$$m \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -\vec{\nabla}_1 V(\vec{r}_1) - \vec{\nabla}_1 U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

$$m \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = -\vec{\nabla}_2 V(\vec{r}_2) - \vec{\nabla}_2 U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

SUPONHAMOS QUE $\vec{r}_1(t) = \vec{r}(t)$, $\vec{r}_2(t) = \vec{r}\,'(t)$ SEJA SOLUÇÃO DESSA EQUAÇÕES:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) - \vec{\nabla} U(\vec{r} - \vec{r}\,')$$

$$m \frac{d^2 \vec{r}\,'}{dt^2} = -\vec{\nabla}' V(\vec{r}\,') - \vec{\nabla}' (\vec{r}\,' - \vec{r})$$

É EVIDENTE QUE $\vec{r}_1(t) = \vec{r}\,'(t)$, $\vec{r}_2(t) = \vec{r}(t)$ TAMBÉM É SOLUÇÃO:

$$m \frac{d^2 \vec{r}\,'}{dt^2} = -\vec{\nabla}' V(\vec{r}\,') - \vec{\nabla}' (\vec{r}\,' - \vec{r})$$

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) - \vec{\nabla} U(\vec{r} - \vec{r}\,')$$

POIS SÃO AS MESMAS EQUAÇÕES!.

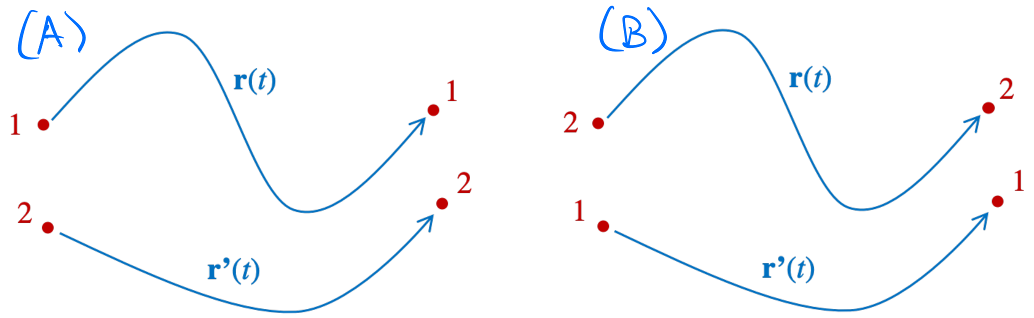
ASSIM, COMO AS PARTÍCULAS SÃO IDÊNTICAS, A SOLUÇÃO:

(A) $\vec{r}_1(t) = \vec{r}(t) \qquad \vec{r}_2(t) = \vec{r}\,'(t)$

É FISICAMENTE INDISTINGUÍVEL DE:

(B) $\vec{r}_1(t) = \vec{r}\,'(t) \qquad \vec{r}_2(t) = \vec{r}(t)$

COMO MOSTRADO NA FIGURA ABAIXO.



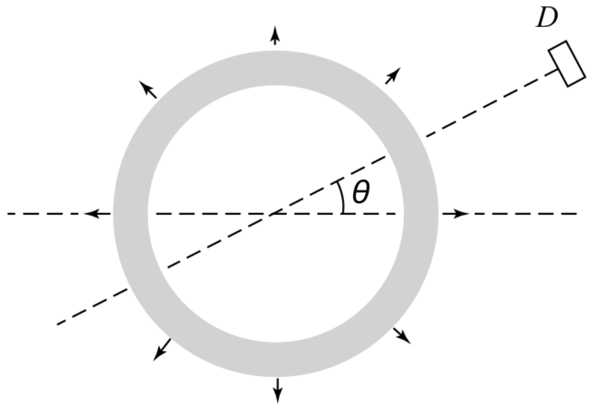
AS DUAS DESCRIÇÕES, (A) OU (B), NOS DÃO AS MESMAS PREVISÕES FÍSICAS, ELAS SÃO COMPLETAMENTE EQUIVALENTES. ASSIM, PODEMOS ESCOLHER QUALQUER UMA DAS DUAS DESCRIÇÕES E IGNORAR A OUTRA. COMO AS TRAJETÓRIAS SÃO BEM DEFINIDAS E DETERMINÍSTICAS, SE ESCOLHERMOS ROTULAR AS PARTÍCULAS DE 1 E 2 NO INÍCIO DO MOVIMENTO, ESSES RÓTULOS PERMANECERÃO BEM DEFINIDOS PARA SEMPRE. ELES AGEM COMO PROPRIEDADES INTRÍNSECAS DAS PARTÍCULAS.

PARTÍCULAS IDÊNTICAS NA MECÂNICA QUÂNTICA

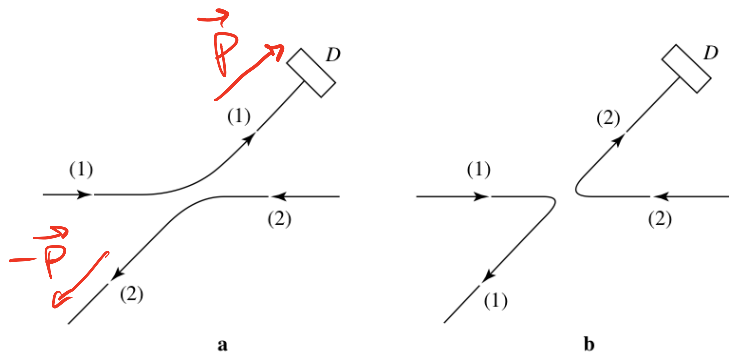
COMO VIMOS, A INDISTINGUIBILIDADE DAS PARTÍCULAS NÃO É UM PROBLEMA NA MECÂNICA CLÁSSICA PORQUE HÁ TRAJETÓRIAS BEM DEFINIDAS. COMO ESTAS NÃO EXISTEM NA MECÂNICA QUÂNTICA, NÃO É POSSÍVEL ROTULAR AS PARTÍCULAS. DE FATO, IMAGINE UM EXPERIMENTO DE ESPALHAMENTO DE PARTÍCULAS IDÊNTICAS. INICIALMENTE, AS PARTÍCULAS SÃO PREPARADAS EM PACOTES DE ONDAS LOCALIZADOS E BEM SEPARADOS, QUE SE MOVEM UM NA DIREÇÃO DO OUTRO, COMO ABAIXO À ESQUERDA:

NESSA SITUAÇÃO INICIAL, É POSSÍVEL ROTULAR CADA PACOTE COM (1) E (2). PORÉM, DURANTE A COLISÃO, OS PACOTES SE JUNTAM E OCUPAM A MESMA REGIÃO DO ESPAÇO: HÁ SUPERPOSIÇÃO ESPACIAL DO PACOTE. QUANDO ISSO ACONTECE, PERDEMOS A CAPACIDADE DE CONTINUAR USANDO OS RÓTULOS SEM AMBIGUIDADE. (FIGURA ACIMA À DIREITA)

APÓS A COLISÃO, OS PACOTES SE EXPANDEM COMO ONDAS ESFÉRICAS. ESQUEMATICAMENTE, ELES PASSAM A OCUPAR UMA CASCA ESFÉRICA, COMO NA FIGURA:



SE UMA PARTÍCULA FOR DETECTADA NO DETECTOR D, É IMPOSSÍVEL DIZER SE ELA VEIO DO PACOTE (1) OU (2). É POSSÍVEL IMAGINAR DUAS TRAJETÓRIAS CLÁSSICAS, COMPATÍVEIS COM ESSA DETECÇÃO, EM QUE A PARTÍCULA DETECTADA É A (1) OU A (2):



SUPONHAMOS QUE A DIREÇÃO DEFINIDA PELO DETECTOR D CORRESPONDE A UM MOMENTO $\vec{p}$. COMO ESTAMOS IMAGINANDO QUE A COLISÃO OCORRE NO REFERENCIAL DO CENTRO DE MASSA, EM QUE O MOMENTO TOTAL É NULO, A OUTRA PARTÍCULA TEM NECESSARIAMENTE MOMENTO $-\vec{p}$.

SE QUISERMOS APLICAR OS POSTULADOS DA MECÂNICA QUÂNTICA, PARA CALCULAR AS PROBABILIDADES DOS RESULTADOS DA DETECÇÃO, PRECISAMOS DIZER A QUAL ESTADO FINAL CORRESPONDE A DETECÇÃO DE UMA PARTÍCULA EM D:

$$dP(\vec{p}) = |\langle \psi_f(\vec{p}) | \psi \rangle|^2 d^3p$$

UMA POSSIBILIDADE É USARMOS $|1:\vec{p}; 2:-\vec{p}\rangle$ CORRESPONDENTE A (a) NA FIGURA:

$$\langle \vec{r}_1, \vec{r}_2 | 1:\vec{p}; 2:-\vec{p}\rangle = \frac{e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}_1}\, e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}_2}}{(2\pi\hbar)^3}$$

PODEMOS TAMBÉM UTILIZAR (b): $|1:-\vec{p}; 2:\vec{p}\rangle$

$$\langle \vec{r}_1, \vec{r}_2 | 1:-\vec{p}; 2:\vec{p}\rangle = \frac{e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}_1}\, e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}_2}}{(2\pi\hbar)^3}$$

NA REALIDADE, PODEMOS ATÉ UTILIZAR UMA COMBINAÇÃO LINEAR DESSES DOIS ESTADOS. TEMOS UMA AMBIGUIDADE QUE LEVA A RESULTADOS DIFERENTES PARA AS PREVISÕES DA MECÂNICA QUÂNTICA. QUE PROCEDIMENTO DEVEMOS SEGUIR?

ESSA AMBIGUIDADE TAMBÉM AFETA OS ESTADOS INICIAIS. IMAGINE DUAS PARTÍCULAS IDÊNTICAS DE SPIN $1/2$, NUMA SITUAÇÃO EM QUE APENAS OS GRAUS DE LIBERDADE DE SPIN SÃO IMPORTANTES (ISSO PODE SER RELAXADO, MAS A DISCUSSÃO FICA MAIS SIMPLES SE OLHARMOS SÓ PARA O SPIN). O ESPAÇO DE ESTADOS É GERADO POR UMA BASE: $|\varepsilon_1 = \pm, \varepsilon_2 = \pm\rangle$ (QUADRIDIMENSIONAL) SE PREPARARMOS O SISTEMA DE TAL MANEIRA QUE UMA PARTÍCULA TEM $S_z = \frac{\hbar}{2}$ E A OUTRA TEM $S_z = -\frac{\hbar}{2}$, PODEMOS USAR:

$$|\phi_i^{(1)}\rangle = |+,-\rangle \quad \text{OU} \quad |\phi_i^{(2)}\rangle = |-,+\rangle$$

OU AINDA, DE MANEIRA MAIS GERAL,

$$|\phi_i\rangle = \alpha|+,-\rangle + \beta|-,+\rangle \; ; \; |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

A INDISTINGUIBILIDADE DAS PARTÍCULAS NÃO PERMITE, A PRINCÍPIO, QUE HAJA UMA ESCOLHA "CORRETA" DO ESTADO INICIAL. ESSA SITUAÇÃO É DENOMINADA "DEGENERESCÊNCIA DE TROCA".

AGORA, SUPONHAMOS QUE QUEIRAMOS SABER A PROBABILIDADE DE SE MEDIR AS DUAS COMPONENTES DE S_x DAS PARTÍCULAS E OBTER: $S_{1x} = \frac{\hbar}{2}$ E $S_{2x} = \frac{\hbar}{2}$. A ESSE RESULTADO DA MEDIDA CORRESPONDE UM KET ÚNICO:

$$|\varphi_f\rangle = |+\rangle_x \otimes |+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|\varepsilon_1=+\rangle + |\varepsilon_1=-\rangle\right] \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|\varepsilon_2=+\rangle + |\varepsilon_2=-\rangle\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[|++\rangle + |+-\rangle + |-+\rangle + |--\rangle\right]$$

ONDE A OPERAÇÃO DE PRODUTO TENSORIAL $\otimes$ TEM INTERPRETAÇÃO ÓBVIA. NESSE CASO, NÃO HÁ OUTRO KET CORRESPONDENTE AO ESTADO, NÃO HÁ DEGENERESCÊNCIA DE TROCA. A PROBABILIDADE PROCURADA É:

$$P_{xx}(+1,+1) = |\langle\varphi_f|\varphi_i\rangle|^2 = \left|\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right|^2 = \frac{1}{4}|\alpha+\beta|^2$$

OU SEJA, A PROBABILIDADE PROCURADA DEPENDE DA ESCOLHA QUE FAZEMOS DOS COEFICIENTES α E β DO ESTADO INICIAL. A DEGENERESCÊNCIA DE TROCA FAZ COM QUE A "RECEITA" DA MECÂNICA QUÂNTICA SEJA AMBÍGUA. NESSE CAPÍTULO, VAMOS DESCOBRIR COMO ELIMINAR ESSA AMBIGUIDADE.

EMBORA NOSSAS CONSIDERAÇÕES TENHAM SE LIMITADO A SISTEMAS DE DUAS PARTÍCULAS IDÊNTICAS, ELAS SE ESTENDEM PARA $N > 2$ PARTÍCULAS.

OPERADORES DE PERMUTAÇÃO

CONSIDEREM, DE INÍCIO, DUAS PARTÍCULAS NÃO IDÊNTICAS, POR EXEMPLO, UM ELÉTRON E UM PRÓTON. VAMOS ASSUMIR TAMBÉM QUE ELAS TÊM O MESMO SPIN, DE TAL FORMA QUE SEUS ESPAÇOS DE ESTADOS SÃO ISOMÓRFICOS, OU SEJA, HÁ UMA RELAÇÃO UM PARA UM DE ESTADOS DOS 2 ESPAÇOS. POR EXEMPLO, UMA BASE COMPLETA EM CADA ESPAÇO É:

$$|\vec{R}, m_s\rangle ; \qquad \vec{R} \in \mathbb{R}^3 , \quad m_s = -s, -s+1, \dots, s-1, s$$

ONDE $\underline{s}$ É O SPIN DA PARTÍCULA. UMA BASE EM $\mathcal{E}(1)$, O ESPAÇO DA PARTÍCULA 1 PODE SER ESCOLHIDA: $\{|u_i\rangle, i = 1, 2, \dots\}$ E A MESMA BASE PODE SER ESCOLHIDA PARA A PARTÍCULA 2. EM TERMOS DE FUNÇÕES DE ONDA:

$$\mathcal{E}(1) : \langle \vec{r}_1, m_1 | u_i \rangle = u_i(\vec{r}_1, m_1)$$

$$\mathcal{E}(2) : \langle \vec{r}_2, m_2 | u_i \rangle = u_i(\vec{r}_2, m_1)$$

CADA $u_i(\vec{r}, m)$ REPRESENTA UM SPINOR.

UMA BASE DO ESPAÇO TOTAL DE 2 PARTÍCULAS PODE ENTÃO SER DENOTADA POR:

$|1: u_i ; 2: u_j\rangle \Rightarrow$

$$\Rightarrow \langle \vec{r}_1 m_1 ; \vec{r}_2 m_2 | 1: u_i ; 2: u_j\rangle = u_i(\vec{r}_1, m_1)\, u_j(\vec{r}_2, m_2)$$

NOTE QUE NESSA NOTAÇÃO, O NÚMERO ANTES DO ELEMENTO DA BASE (1 OU 2) DENOTA A QUAL ESPAÇO (OU QUAL PARTÍCULA) PERTENCE AQUELE ESTADO. ASSIM, OS DOIS SEGUINTES ESTADOS SÃO EQUIVALENTES:

$$|1: u_i ; 2: u_j\rangle \quad , \quad |2: u_j ; 1: u_i\rangle$$

POIS EM AMBOS A PARTÍCULA 1 ESTÁ NO ESTADO $|u_i\rangle$ E A PARTÍCULA 2 ESTÁ NO ESTADO $|u_j\rangle$. NO ENTANTO:

$$|1: u_i ; 2: u_j\rangle \neq |1: u_j ; 2 u_i\rangle \quad \text{SE} \quad i \neq j$$

POIS OS KETS APRESENTAM OCUPAÇÕES DIFERENTES DOS ESTADOS.

PODEMOS AGORA DEFINIR O OPERADOR LINEAR P_{21} CUJA AÇÃO NA BASE DE $\mathcal{E}$ É:

$$P_{21}|1:u_i;2:u_j\rangle = |1:u_j;2:u_i\rangle$$

ESSA AÇÃO, PORTANTO, CONSISTE EM TROCAR AS PARTÍCULAS DE ESTADOS.
A PARTIR DE SUA AÇÃO EM QUALQUER ESTADO DA BASE, TEMOS A AÇÃO DE P_{21} EM QUALQUER ESTADO $|\psi\rangle$ DE $\mathcal{E}$:

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j} c_{ij}|1:u_i;2:u_j\rangle$$

$$P_{21}|\psi\rangle = \sum_{ij} c_{ij}|1:u_j;2u_i\rangle$$

RENOMEANDO OS ÍNDICES MUDOS $(i \rightleftarrows j)$:

$$P_{21}|\psi\rangle = \sum_{ij} c_{ji}|1:u_i;2:u_j\rangle$$

E VEMOS QUE A AÇÃO DE P_{21} NOS COEFICIENTES É TAL QUE OS ÍNDICES SÃO TROCADOS:

$$\langle 1:u_i;2:u_j|\psi\rangle = c_{ij} \quad ; \quad \langle 1:u_i;2:u_j|P_{21}|\psi\rangle = c_{ji}$$

EM PARTICULAR, NA BASE $\{|u_i\rangle\} \rightarrow \{|\vec{r}, m\rangle\}$

$$|\psi\rangle = \sum_{\substack{m_1\\ m_2}} \int d^3r_1\, d^3r_2 \langle 1:\vec{r}_1 m_1; 2:\vec{r}_2 m_2|\psi\rangle \times$$

$$\times |1:\vec{r}_1 m_1; 2:\vec{r}_2 m_2\rangle$$

$$= \sum_{m_1, m_2} \int d^3r_1\, d^3r_2\, \psi_{m_1, m_2}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\, |1:\vec{r}_1 m_1; 2:\vec{r}_2 m_2\rangle$$

$$P_{21}|\psi\rangle = \sum_{m_1, m_2} \int d^3r_1\, d^3r_2\, \psi_{m_2 m_1}(\vec{r}_2, \vec{r}_1)|1:\vec{r}_1 m_1; 2:\vec{r}_2 m_2\rangle$$

EM OUTRAS PALAVRAS, A AÇÃO DE P_{21} NAS FUNÇÕES DE ONDA (OU SPINORES) CONSISTE EM TROCAR AS COORDENADAS E OS RÓTULOS DE S_z $1 \rightleftarrows 2$:

$$P_{21}\psi_{m_1, m_2}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \psi_{m_1, m_2}(\vec{r}_2, \vec{r}_1)$$

PROPRIEDADES DE P_{21}

(a) $P_{21}^2 = 1$, QUE DECORRE DIRETAMENTE DA DEFINIÇÃO. PORTANTO:

$$(P_{21})^{-1} = P_{21}$$

(b) P_{21} É HERMITIANO. CONSIDERE UM ELEMENTO DE MATRIZ GENÉRICO:

$$\langle 1: u_{i'}; 2: u_{j'} | P_{21} | 1: u_i; 2: u_j \rangle =$$

$$= \langle 1: u_{i'}; 2: u_{j'} | 1: u_j; 2: u_i \rangle = \delta_{i'j}\, \delta_{j'i}$$

MAS:

$$\langle 1: u_{i'}; 2: u_{j'} | P_{21}^{\dagger} | 1: u_i; 2: u_j \rangle =$$

$$= \left(\langle 1: u_i; 2: u_j | P_{21} | 1: u_{i'}; 2: u_{j'} \rangle \right)^*$$

$$= \left(\langle 1: u_i; 2: u_j | 1: u_{j'}; 2: u_{i'} \rangle \right)^*$$

$$= \delta_{ij'}\, \delta_{ji'}$$

VEMOS QUE P_{21} E $P_{21}^{\dagger}$ TÊM OS MESMOS ELEMENTOS DE MATRIZ NA BASE. SÃO, PORTANTO, IGUAIS.

(c) $P_{21}^{-1} = P_{21}^{\dagger}$, OU SEJA, P_{21} É UM OPERADOR UNITÁRIO. ISSO SEGUE DIRETAMENTE DE (a) E (b).

KETS SIMÉTRICOS E ANTI-SIMÉTRICOS. SIMETRIZADOR E ANTI-SIMETRIZADOR

COMO P_{21} É HERMITIANO, SEUS AUTO-VALORES SÃO REAIS. COMO $P_{21}^2 = 1$, SE λ É AUTO-VALOR DE P_{21}:

$$P_{21}|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle \Rightarrow P_{21}^2|\lambda\rangle = \lambda^2|\lambda\rangle \Rightarrow \lambda^2 = 1$$

$$\Rightarrow \lambda = +1 \text{ OU } -1$$

AUTO-VETORES DE P_{21} COM AUTO-VALOR 1 SÃO DITOS SIMÉTRICOS E COM -1 SÃO DITOS ANTI-SIMÉTRICOS

$P_{21}|\psi_S\rangle = |\psi_S\rangle \Rightarrow |\psi_S\rangle$ É SIMÉTRICO

$P_{21}|\psi_A\rangle = -|\psi_A\rangle \Rightarrow |\psi_A\rangle$ É ANTI-SIMÉTRICO

SEJAM OS SEGUINTES OPERADORES:

$$S = \frac{1}{2}(1 + P_{21}) \qquad A = \frac{1}{2}(1 - P_{21})$$

ELES SÃO HERMITIANOS, JÁ QUE P_{21} É HERMITIANO E:

$$S^2 = \frac{1}{4}(1 + 2P_{21} + P_{21}^2) = \frac{1}{4}(2 + 2P_{21}) = \frac{1}{2}(1 + P_{21}) = S$$

$$A^2 = \frac{1}{4}(1 - 2P_{21} + P_{21}^2) = \frac{1}{4}(2 - 2P_{21}) = \frac{1}{2}(1 - P_{21}) = A$$

PORTANTO, S E A SÃO PROJETORES. ELES PROJETAM EM SUB-ESPAÇOS ORTOGONAIS:

$$SA = \frac{1}{4}(1 + P_{21})(1 - P_{21}) = \frac{1}{4}(1 - P_{21}^2) = 0$$

$$AS = \frac{1}{4}(1 - P_{21})(1 + P_{21}) = \frac{1}{4}(1 - P_{21}^2) = 0$$

E PARA ESTADOS $|\psi\rangle$ E $|\psi'\rangle$ QUAISQUER:

$$|\phi\rangle = S|\psi\rangle \quad ; \quad |\phi'\rangle = A|\psi'\rangle$$

$$\langle\phi'|\phi\rangle = \langle\psi'|AS|\psi\rangle = 0$$

FINALMENTE, ESSES SUB-ESPAÇOS SÃO COMPLEMENTARES:

$$S + A = \frac{1}{2}(1 + P_{21}) + \frac{1}{2}(1 - P_{21}) = 1$$

PARA ESTADOS $|\psi\rangle$ QUAISQUER, $S|\psi\rangle$ É SIMÉTRICO E $A|\psi\rangle$ É ANTI-SIMÉTRICO:

$$P_{21} S|\psi\rangle = \frac{1}{2} P_{21}(1 + P_{21})|\psi\rangle = \frac{1}{2}(P_{21} + 1)|\psi\rangle = S|\psi\rangle$$

$$P_{21} A|\psi\rangle = \frac{1}{2} P_{21}(1 - P_{21})|\psi\rangle = \frac{1}{2}(P_{21} - 1)|\psi\rangle = -A|\psi\rangle$$

POR ESSA PROPRIEDADE, <u>S</u> É CHAMADO DE SIMETRIZADOR E <u>A</u> É O ANTI-SIMETRIZADOR.

NOTE $|\psi\rangle$ E $P_{21}|\psi\rangle$ DÃO ORIGEM AO MESMO KET SOB A AÇÃO DE S:

$$S P_{21}|\psi\rangle = \frac{1}{2}(1 + P_{21}) P_{21}|\psi\rangle = \frac{1}{2}(P_{21} + 1)|\psi\rangle = S|\psi\rangle$$

SOB A AÇÃO DE <u>A</u>, ELES DÃO ORIGEM AO MESMO KET, <u>A MENOS DO SINAL</u>:

$$A P_{21}|\psi\rangle = \frac{1}{2}(1 - P_{21}) P_{21}|\psi\rangle = \frac{1}{2}(P_{21} - 1)|\psi\rangle = -A|\psi\rangle$$

TRANSFORMAÇÃO DE OPERADORES POR PERMUTAÇÃO

CONSIDERE UM OPERADOR $B(1)$ QUE AGE EM $\mathcal{E}(1)$. USEMOS A BASE $\{|u_i\rangle\}$ DE AUTO-ESTADOS DE $B(1)$, COM AUTO-VALORES b_i:

$$B(1)|u_i\rangle = b_i|u_i\rangle$$

A TRANSFORMAÇÃO DE $B(1)$ PELO UNITÁRIO P_{21} É: TAL QUE:

$$P_{21}B(1)P_{21}^{\dagger}|1:u_i;2:u_j\rangle = P_{21}B(1)|1:u_j;2:u_i\rangle$$

$$= b_j P_{21}|1:u_j;2:u_i\rangle = b_j|1:u_i;2:u_j\rangle$$

QUE É MESMA AÇÃO DE $B(2)$, OU SEJA, O MESMO OPERADOR, PORÉM ATUANDO EM $\mathcal{E}(2)$:

$$P_{21}B(1)P_{21}^{\dagger} = B(2)$$

ANALOGAMENTE: $P_{21}B(2)P_{21}^{\dagger} = B(1)$

E:

$$P_{21}[B(1)+C(2)]P_{21}^{\dagger} = B(2)+C(1)$$

$$P_{21}[B(1)C(2)]P_{21}^{\dagger} = B(2)C(1)$$

DE MANEIRA GERAL, PARA OPERADORES QUAISQUER $O(1,2)$:

$$P_{21}\, O(1,2)\, P_{21}^{\dagger} = O(2,1)$$

POR EXEMPLO:

$$P_{21}\left[\vec{S}_1 + \vec{L}_2\right] P_{21}^{\dagger} = \vec{S}_2 + \vec{L}_1$$

$$P_{21}\left[\frac{\vec{P}_1^2}{2m} + V(\vec{r}_2)\right] P_{21}^{\dagger} = \frac{\vec{P}_2^2}{2m} + V(\vec{r}_1)$$

$$P_{21}\left[\frac{e^2}{|\vec{R}_1 - \vec{R}_2|}\right] P_{21}^{\dagger} = \frac{e^2}{|\vec{R}_1 - \vec{R}_2|}$$

UM OPERADOR É DITO SIMÉTRICO SE:

$$O(1,2) = O(2,1)$$

$\frac{e^2}{|\vec{R}_1 - \vec{R}_2|}$ É UM OPERADOR SIMÉTRICO, ASSIM COMO $\left(\frac{\vec{P}_1^2}{2m} + \frac{\vec{P}_2^2}{2m}\right)$ OU $(\vec{S}_1 + \vec{S}_2)$.

SEGUE QUE: $P_{21}\, O(1,2)\, P_{21}^{\dagger} = O(2,1) = O(1,2)$

$$\Rightarrow P_{21}\, O(1,2)\, P_{21}^{-1} = O(1,2) \Rightarrow P_{21}\, O(1,2) = O(1,2)\, P_{21}$$

OU SEJA,

$$[O(1,2), P_{21}] = 0$$

OPERADORES SIMÉTRICOS COMUTAM COM P_{21} E, POR CONSEQUÊNCIA, TAMBÉM COMUTAM COM S E A.