POSTULADO DA SIMETRIZAÇÃO

ANTES DE CONSIDERARMOS SISTEMAS GENÉRICOS COM N PARTÍCULAS IDÊNTICAS, VAMOS ILUSTRAR OS CONCEITOS FÍSICOS NOVOS COM OS INSTRUMENTOS JÁ DEFINIDOS PARA $N=2$.

POSTULADO DA SIMETRIZAÇÃO ($N=2$)

UM SISTEMA DE 2 PARTÍCULAS IDÊNTICAS É DESCRITO APENAS POR ESTADOS QUE SÃO AUTO-VETORES DE P_{21} CUJO AUTO-VALOR DEPENDE DAS PARTÍCULAS ENVOLVIDAS. PARTICULAS QUE SÃO DESCRITAS POR ESTADOS SIMÉTRICOS ($\lambda=1$) SÃO CHAMADAS DE BÓSONS E AQUELAS QUE SÃO DESCRITAS POR ESTADOS ANTI-SIMÉTRICOS ($\lambda=-1$) SÃO CHAMADAS DE FÉRMIONS.

EMPIRICAMENTE, PARTÍCULAS DE SPIN SEMI-INTEIRO (ELÉTRONS, PRÓTONS, NÊUTRONS, NEUTRINOS, QUARKS) SÃO FÉRMIONS. PARTÍCULAS COM SPIN INTEIRO (FÓTONS, MÉSONS, GLÚONS, $W^{\pm}$, Z^0, GRÁVITONS) SÃO BÓSONS. EXISTE UM TEOREMA DEVIDO A PAULI (TEOREMA DE SPIN-ESTATÍSTICA) QUE, A PARTIR

DE ALGUMAS HIPÓTESES GERAIS, PROVA A RELAÇÃO ENTRE O SPIN DA PARTÍCULA E O CARÁTER DE SEUS ESTADOS QUÂNTICOS.

ALGUMAS CONSEQUÊNCIAS DO POSTULADO

a) A DEGENERESCÊNCIA DE TROCA ADVÉM DO FATO DE QUE UM ESTADO DE 2 PARTÍCULAS EM QUE UMA OCUPA O ESTADO $|\phi\rangle$ E A OUTRA O ESTADO $|\chi\rangle$ PODE, A PRINCÍPIO SER DESCRITO POR UMA COMBINAÇÃO LINEAR GENÉRICA:

$$|\psi\rangle = \alpha\,|1:\phi;2:\chi\rangle + \beta\,|1:\chi;2:\phi\rangle$$

$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ (ASSUMINDO $|\phi\rangle, |\chi\rangle$ ORTONORMAIS)

PELO POSTULADO DA SIMETRIZAÇÃO APENAS ESTADOS QUE SÃO AUTO-VETORES DE P_{21} SÃO ADMISSÍVEIS. PORTANTO:

$$P_{21}|\psi\rangle = \alpha\,|1:\chi;2:\phi\rangle + \beta\,|1:\phi;2:\chi\rangle =$$

$$= \lambda\alpha\,|1:\phi;2:\chi\rangle + \lambda\beta\,|1:\chi;2:\phi\rangle$$

PARA BÓSONS, $\lambda=+1$: $\alpha=\beta$

$$|\psi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[|1:\phi;2:\chi\rangle + |1:\chi;2:\phi\rangle\Big]$$

PARA FÉRMIONS, $\lambda=-1$: $\alpha=-\beta$

$$|\psi_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[|1:\phi;2:\chi\rangle - |1:\chi;2:\phi\rangle\Big]$$

SEMPRE A MENOS DE UMA FASE GLOBAL IRRELEVANTE. ASSIM, VEMOS QUE A DEGENERESCÊNCIA DE TROCA É COMPLETAMENTE REMOVIDA.

NOS EXEMPLOS QUE DEMOS ATRÁS, O POSTULADO NOS DITA:

1) ESPALHAMENTO DE PARTÍCULAS IDÊNTICAS NO REFERENCIAL DO CENTRO DE MASSA

O ESTADO FINAL EM QUE UMA PARTÍCULA TEM MOMENTO $\vec{p}$ E A OUTRA MOMENTO $-\vec{p}$ PERMITIDO PELO POSTULADO É:

$$|\psi_f\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[|1:\vec{p},2:-\vec{p}\rangle \pm |1:-\vec{p};2:\vec{p}\rangle\Big]$$

ONDE O SINAL $+$ VALE PARA BÓSONS E O SINAL $-$ PARA FÉRMIONS.

2) DUAS PARTÍCULAS DE SPIN 1/2, UMA COM $S_z = \frac{\hbar}{2}$ E OUTRA COM $S_z = -\frac{\hbar}{2}$

NESSE CASO, AS PARTÍCULAS SÃO NECESSARIAMENTE FÉRMIONS, POIS O SPIN É SEMI-INTEIRO. PORTANTO, O ESTADO CONSIDERADO DEVE SER:

$$|\phi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+-\rangle - |-+\rangle\right] \quad \text{OU} \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = -\beta$$

ASSIM, A PROBABILIDADE DE MEDIRMOS $S_{1x} = S_{2x} = \frac{\hbar}{2}$ É:

$$P_{xx}(+1,+1) = \frac{1}{4}\left|\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right| = 0$$

SEM AMBIGUIDADE.

b) CONSTRUÇÃO DOS ESTADOS

COMO CONSTRUIR ESTADOS JÁ (ANTI-)SIMETRIZADOS?

i) CONSTRUA UM ESTADO ROTULANDO AS PARTÍCULAS ARBITRARIAMENTE

ii) APLIQUE $\underline{S}$ OU $\underline{A}$, CONFORME A PARTÍCULA FOR BÓSON OU FÉRMION, RESPECTIVAMENTE

iii) NORMALIZE

ASSIM, PARA ESTADOS $|\phi\rangle$ E $|\chi\rangle$ ORTONORMAIS QUAISQUER:

$$|\psi\rangle = |1:\phi;2:\chi\rangle$$

BÓSONS: $S|\psi\rangle = \frac{1}{2}\left[|1:\phi;2:\chi\rangle + |1:\chi;2:\phi\rangle\right]$

NORMALIZANDO $\Rightarrow |\psi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|1:\phi;2:\chi\rangle + |1:\chi;2:\phi\rangle\right]$

FÉRMIONS: $A|\psi\rangle = \frac{1}{2}\left[|1:\phi;2:\chi\rangle - |1:\chi;2:\phi\rangle\right]$

NORMALIZANDO $\Rightarrow |\psi_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|1:\phi;2:\chi\rangle - |1:\chi;2:\phi\rangle\right]$

DEVEMOS NOTAR QUE, SE $|\phi\rangle = |\chi\rangle$:

BÓSONS: $|\psi_S\rangle = |1:\phi;2:\phi\rangle$ JÁ SIMETRIZADO E NORMALIZADO

FÉRMIONS: $|\psi_A\rangle \propto A|1:\phi;2:\phi\rangle = 0$!

CONCLUI-SE QUE FÉRMIONS NÃO PODEM OCUPAR O MESMO ESTADO. ESSE É O CHAMADO PRINCÍPIO DE EXCLUSÃO DE PAULI, AQUI NO CASO $N=2$, MAS QUE É GERAL PARA QUALQUER $\underline{N}$ COMO VEREMOS.

EXEMPLO: DUAS PARTÍCULAS IDÊNTICAS DE MASSA m NÃO INTERAGENTES, NUM POÇO QUADRADO INFINITO

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < a \\ \infty & \text{DO CONTRÁRIO} \end{cases}$$

AS AUTO-FUNÇÕES E AUTO-ENERGIAS SÃO:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right); \quad E_n = \underbrace{\frac{h^2}{8ma^2}}_{E_1} n^2; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

a) SE SÃO BÓSONS DE SPIN-0, OS ESTADOS SÃO DO TIPO: (TODOS NÃO DEGENERADOS)

$$|n, m\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\,|1:n;\, 2:m\rangle + |1:m;\, 2:n\rangle\,\right]$$

$$E^S_{n,m} = E_1 (n^2 + m^2) \quad (\text{SE } m \neq n)$$

$$|n,n\rangle \quad (\text{JÁ SIMETRIZADO}) \quad (\text{SE } n = m)$$

$$E^S_{n,n} = 2 E_1 n^2$$

ESTADO FUNDAMENTAL: $|1,1\rangle$ $(E^S_{11} = 2E_1)$

EST. EXCITADOS: $|1,2\rangle$ $(E^S_{12} = 5E_1)$; $|2,2\rangle$ $(E^S_{2,2} = 8E_1)$; $|1,3\rangle$ $(E^S_{13} = 10E_1)$; $|2,3\rangle$ $(E^S_{23} = 13E_1)$ ...

EM TERMOS DE FUNÇÕES DE ONDA, TEMOS

$$\langle x_1, x_2 | n, m \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \Big[\langle x_1, x_2 | 1{:}n ; 2{:}m \rangle +$$

$$+ \langle x_1, x_2 | 1{:}m ; 2{:}n \rangle \Big]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \Big[\psi_n(x_1) \psi_m(x_2) + \psi_m(x_1) \psi_n(x_2) \Big]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{a} \Big[\sin\left(\frac{n\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi x_2}{a}\right) + \sin\left(\frac{m\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x_2}{a}\right) \Big]$$

É EVIDENTE A SIMETRIA PELA TROCA $x_1 \rightleftarrows x_2$.

$$\langle x_1 x_2 | n, n \rangle = \psi_n(x_1) \psi_n(x_2)$$

$$= \frac{2}{a} \sin\left(\frac{n\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x_2}{a}\right)$$

QUE JÁ É OBVIAMENTE SIMÉTRICA POR $x_1 \rightleftarrows x_2$.

b) SE AS PARTÍCULAS SÃO FÉRMIONS DE SPIN ½

O ESTADO FUNDAMENTAL CORRESPONDE A PÔR AS PARTÍCULAS NO ESTADO $m=1$ COM SPINS OPOSTOS:

$$|1+,1-\rangle \equiv KA\left[\,|1:1,+;2:1,-\rangle\right] \quad (E^{A}_{11}=2E_1)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\,|1:1,+;2:1,-\rangle-|1:1,-;2:1,+\rangle\right]$$

$$=|1:1;2:1\rangle\otimes\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\,|1:+;2:-\rangle-|1:-;2:+\rangle\right]$$

NOTE QUE, NESSE CASO, A PARTE ESPACIAL É SIMÉTRICA E A PARTE DE SPIN É RESPONSÁVEL PELA ANTI-SIMETRIA DO ESTADO. ALÉM DISSO, A PARTE DE SPIN CORRESPONDE AO ESTADO DE SPIN TOTAL $S=0$:

$$|S=0,M=0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\,|+-\rangle-|-+\rangle\right]$$

SE TENTARMOS PÔR OS 2 FÉRMIONS EM $m=1$ COM O MESMO SPIN, DIGAMOS $+\hbar/2$, O PRINCÍPIO DE EXCLUSÃO IMPEDIRÁ:

$$|1+1+\rangle=KA\left[\,|1:1+;2:1+\rangle\right]=\frac{K}{2}\left[\,|1:1+;2:1+\rangle-\right.$$
$$\left.-|1:1+;2:1+\rangle\right]=0$$

O MESMO RACIOCÍNIO IMPEDE QUE HAJA UM ESTADO COMO $|1-1->$.

TODOS OS ESTADOS COM <u>AMBOS</u> OS FÉRMIONS NO MESMO ESTADO ESPACIAL $\underline{m}$ SÃO NÃO DEGENERADOS COM ESTADO DE SPIN TOTAL $S=0, M=0$.

$$|m+,m-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|1:m,+;2:m,-\rangle - |1:m,-;2:m,+\rangle\right]$$

$$= |1:m;2:m\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|1:+;2-\rangle - |1:-;2:+\rangle\right]$$

MAS É PERFEITAMENTE POSSÍVEL OCUPAR DOIS ESTADOS DIFERENTES $n \neq m$ COM QUAISQUER VALORES DE SPIN S_z. POR EXEMPLO, O PRIMEIRO ESTADO EXCITADO É <u>QUADRUPLAMENTE</u> DEGENERADO: $(E^A_{12} = 5E_1)$

$$|1,\varepsilon;2,\varepsilon'\rangle = KA\left[|1:1,\varepsilon;2:2,\varepsilon'\rangle\right]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|1:1,\varepsilon;2:2,\varepsilon'\rangle - |1:2,\varepsilon';2:1,\varepsilon\rangle\right]$$

ONDE $\varepsilon = \pm \;;\; \varepsilon' = \pm$

POR EXEMPLO:

$$|1,+;2,+\rangle = K_A[|1:1,+;2:2,+\rangle]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}[|1:1,+;2:2,+\rangle - |1:2,+;2:1,+\rangle]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}[|1:1;2:2\rangle - |1:2;2:1\rangle] \otimes \underbrace{|1:+;2:+\rangle}_{|S=1,M=1\rangle}$$

SEMELHANTEMENTE:

$$|1,-;2,-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|1:1;2:2\rangle - |1:2;2:1\rangle] \otimes \underbrace{|1:-;2:-\rangle}_{|S=1,M=-1\rangle}$$

POR OUTRO LADO:

$$|1,+;2,-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|1:1,+;2:2,-\rangle - |1:2,-;2:1,+\rangle]$$

$$|1,-;2,+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|1:1,-;2:2,+\rangle - |1:2,+;2:1,-\rangle]$$

É POSSÍVEL TOMAR COMBINAÇÕES LINEARES DESSES DOIS ÚLTIMOS ESTADOS, POIS SÃO DEGENERADOS:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}[|1,+;2,-\rangle + |1,-;2,+\rangle] = [|1:1;2:2\rangle - |1:2;2:1\rangle] \otimes$$

$$\otimes \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}[|1:+;2:-\rangle + |1:-;2:+\rangle]}_{|S=1,M=0\rangle}$$

FINALMENTE, A OUTRA COMBINAÇÃO LINEAR É:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|1,+;2,-\rangle - |1,-;2,+\rangle\right] = \left[|1:1;2:2\rangle + |1:2;2:1\rangle\right] \otimes$$

$$\otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|1:+;2:-\rangle - |1:-;2:+\rangle\right] \rightarrow |S=0, M=0\rangle$$

PODEMOS AINDA ESCREVER AS FUNÇÕES DE ONDA/SPINORES. POR EXEMPLO

$$\langle x_1, x_2 | n+, n-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_n(x_1)\varphi_n(x_2) \\ -\varphi_n(x_1)\varphi_n(x_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{a}\begin{bmatrix} 0 \\ \sin\left(\frac{n\pi x_1}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi x_2}{a}\right) \\ -\sin\left(\frac{n\pi x_1}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi x_2}{a}\right) \\ 0 \end{bmatrix}$$

ONDE A ORDEM ESCOLHIDA PARA OS COMPONENTES DO SPINOR FOI:

$$\begin{bmatrix} \psi_{++}(x_1, x_2) \\ \psi_{+-}(x_1, x_2) \\ \psi_{-+}(x_1, x_2) \\ \psi_{--}(x_1, x_2 \end{bmatrix}$$

ALÉM DISSO:

$$\langle x_1,x_2|1,+;2,+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)-\varphi_2(x_1)\varphi_1(x_2)\right]\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{a}\begin{bmatrix}\sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right)\sin\left(\frac{2\pi x_2}{a}\right)-\sin\left(\frac{2\pi x_1}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi x_2}{a}\right)\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\langle x_1,x_2|1,-;2,-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)-\varphi_2(x_1)\varphi_1(x_2)\right]\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{a}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\\sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right)\sin\left(\frac{2\pi x_2}{a}\right)-\sin\left(\frac{2\pi x_1}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi x_2}{a}\right)\end{bmatrix}$$

$$\langle x_1,x_2|1,+;2,-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\\-\varphi_2(x_1)\varphi_1(x_2)\\0\end{bmatrix}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{a}\begin{bmatrix}0\\\sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right)\sin\left(\frac{2\pi x_2}{a}\right)\\-\sin\left(\frac{2\pi x_1}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi x_2}{a}\right)\\0\end{bmatrix}$$

$$\langle x_1, x_2 | 1,-; 2,+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -\varphi_2(x_1)\varphi_1(x_2) \\ \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{a} \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin\left(\frac{2\pi x_1}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi x_2}{a}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right)\sin\left(\frac{2\pi x_2}{a}\right) \\ 0 \end{bmatrix}$$

FINALMENTE, AS COMBINAÇÕES LINEARES QUE DÃO AUTO-ESTADOS DE $\vec{S}^2 = (\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2$ COM $M=0$ SÃO:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\langle x_1, x_2 | 1,+; 2,-\rangle + \langle x_1, x_2 | 1,-; 2,+\rangle\right] =$$

$$\left[\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2) - \varphi_2(x_1)\varphi_1(x_2)\right] \times \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{|S=1, M=0\rangle}$$

E:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\langle x_1, x_2 | 1,+; 2,-\rangle - \langle x_1, x_2 | 1,-; 2,+\rangle\right] =$$

$$\left[\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2) + \varphi_2(x_1)\varphi_1(x_2)\right] \times \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{|S=0, M=0\rangle}$$

EXISTE UM FATO INTERESSANTE SOBRE ESTADOS DE DOIS FÉRMIONS, QUE É O SEGUINTE. CONSIDERE OS ESTADOS ABAIXO:

$$|n+,n-\rangle = |1:n;2:n\rangle \otimes \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|1:+;2:-\rangle - |1:-;2:+\rangle\right]}_{|S=0,M=0\rangle}$$

PARA ESTADOS ORBITAIS IGUAIS É:

$$|n\pm,m\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|1:n;2:m\rangle - |1:m;2:n\rangle\right] \otimes \underbrace{|1:\pm;2:\pm\rangle}_{|S=1,M=\pm 1\rangle}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|n+,m-\rangle + |n-,m+\rangle\right] = \left[|1:n;2:m\rangle - |1:m;2:n\rangle\right] \otimes$$
$$\otimes \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|1:+;2:-\rangle + |1:-;2:+\rangle\right]}_{|S=1,M=0\rangle}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|n+,m-\rangle - |n-,m+\rangle\right] = \left[|1:n;2:m\rangle + |1:m;2:n\rangle\right] \otimes$$
$$\otimes \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|1:+;2:-\rangle - |1:-;2:+\rangle\right]}_{|S=0,M=0\rangle}$$

TODOS ESSES ESTADOS TEM A FORMA DE UM PRODUTO TENSORIAL ENTRE UM KET PURAMENTE ESPACIAL, ENVOLVENDO OS ESTADOS $\varphi_n(x)$ E/OU $\varphi_m(x)$ E UMA PARTE PURAMENTE DE SPIN. COMO O PRODUTO DAS DUAS PARTES TEM QUE SER ANTI-SIMÉTRICO, ISSO PODE SER ALCANÇADO SE A PARTE ESPACIAL É ANTI-SIMÉTRICA E A DE SPIN SIMÉTRICA OU VICE-VERSA

ASSIM, COMO $|S=0, M=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|1:+;2-\rangle - |1:-;2:+\rangle\right]$

É ANTI-SIMÉTRICO PELA TROCA DOS ÍNDICES DE SPIN, ELE É SEMPRE ACOMPANHADO POR UMA PARTE ESPACIAL SIMÉTRICA. DA MESMA FORMA, OS ESTADOS DE SPIN TOTAL $S=1$:

$$|S=1, M=\pm 1\rangle = |1:\pm;2:\pm\rangle$$

$$|S=1, M=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|1:+;2:-\rangle + |1:-;2,+\rangle\right]$$

SÃO SIMÉTRICOS POR TROCA DE ÍNDICES DE SPIN E SÃO SEMPRE ACOMPANHADOS DE UMA PARTE ESPACIAL ANTI-SIMÉTRICA.