EFEITOS DE TROCA

UMA DAS PRINCIPAIS CONSEQUÊNCIAS DO POSTULADO DE SIMETRIZAÇÃO SÃO OS EFEITOS DE TROCA, QUE NÃO TÊM ANÁLOGO CLÁSSICO.

VAMOS IMAGINAR QUE POMOS 2 PARTÍCULAS EM DOIS ESTADOS $|m\rangle$ E $|n\rangle$, ORTOGONAIS ENTRE SI E NORMALIZADOS. SE AS PARTÍCULAS NÃO SÃO IDÊNTICAS, PODEMOS PREPARAR O ESTADO:

$$|D\rangle = |1:m; 2:n\rangle$$

ONDE O $\underline{D}$ DENOTA QUE AS PARTÍCULAS SÃO DISTINGUÍVEIS. SE AS PARTÍCULAS SÃO IDÊNTICAS E BOSÔNICAS, O ESTADO CORRESPONDENTE É:

$$|\psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|1:m; 2:n\rangle + |1:n; 2:m\rangle\right]$$

E SE FOREM FERMIÔNICAS:

$$|\psi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|1:m; 2:n\rangle - |1:n; 2:m\rangle\right]$$

SEJA UM OPERADOR A_1 QUE ATUA NO ESPAÇO $\mathcal{E}(1)$ E O MESMO OPERADOR QUE ATUA EM $\mathcal{E}(2)$: A_2.

UM OPERADOR SIMÉTRICO É $(A_1 - A_2)^2$. VAMOS CALCULAR SEU VALOR MÉDIO NOS 3 ESTADOS ACIMA.

PARTÍCULAS DISTINGUÍVEIS:

$$\langle D|(A_1-A_2)^2|D\rangle = \langle D|(A_1^2+A_2^2-2A_1A_2)|D\rangle$$

$$= \langle 1:m;2:n|(A_1^2+A_2^2-2A_1A_2)|1:m;2:n\rangle$$
$$= \langle 1:m|A_1^2|1:m\rangle + \langle 2:n|A_2^2|2:n\rangle - 2\langle 1:m|A_1|1:m\rangle \times$$
$$\times \langle 2:n|A_2|2:n\rangle$$

ONDE USAMOS QUE A_1 SÓ ATUA EM $\mathcal{E}(1)$ E A_2 SÓ ATUA EM $\mathcal{E}(2)$.

$$\langle D|(A_1-A_2)^2|D\rangle = \langle A^2\rangle_m + \langle A^2\rangle_n - 2\langle A\rangle_m\langle A\rangle_n$$

ONDE O SUB-ÍNDICE INDICA EM QUE ESTADO O VALOR MÉDIO É CALCULADO.

PARTÍCULAS IDÊNTICAS:

$$\langle \psi_\pm|(A_1-A_2)^2|\psi_\pm\rangle = \frac{1}{2}\left[\langle 1:m;2:n| \pm \langle 1:n;2:m|\right]$$
$$(A_1^2+A_2^2-2A_1A_2)\left[|1:m;2:n\rangle \pm |1:n;2:m\rangle\right]$$

TOMEMOS PRIMEIRO A_1^2:

$$\langle \psi_\pm | A_1^2 | \psi_\pm \rangle = \frac{1}{2}\left[\langle A^2 \rangle_m + \langle A^2 \rangle_n \pm \langle m|A^2|n\rangle \cancelto{0}{\langle n|m\rangle} \pm \langle n|A^2|m\rangle \cancelto{0}{\langle m|n\rangle}\right] = \frac{1}{2}\left[\langle A^2\rangle_m + \langle A^2\rangle_n\right]$$

AGORA PARA A_2^2:

$$\langle \psi_\pm | A_2^2 | \psi_\pm \rangle = \frac{1}{2}\left[\langle A^2\rangle_n + \langle A^2\rangle_m\right]$$

E, FINALMENTE PARA $A_1 A_2$:

$$\langle \psi_\pm | A_1 A_2 | \psi_\pm \rangle = \frac{1}{2}\Big[\langle A\rangle_m \langle A\rangle_n + \langle A\rangle_n \langle A\rangle_m \pm \underbrace{\langle m|A|n\rangle}_{A_{mn}} \underbrace{\langle n|A|m\rangle}_{A_{mn}^*} \pm \langle n|A|m\rangle \langle m|A|n\rangle\Big]$$

$$= \langle A\rangle_m \langle A\rangle_n \pm |A_{mn}|^2$$

JUNTANDO TUDO:

$$\langle \psi_\pm | (A_1 - A_2)^2 | \psi_\pm \rangle = \langle A^2\rangle_m + \langle A^2\rangle_n - 2\langle A\rangle_m \langle A_n\rangle \mp 2|A_{mn}|^2$$

O ÚLTIMO TERMO DISTINGUE O RESULTADO DE PARTÍCULAS IDÊNTICAS DO DE PARTÍCULAS NÃO IDÊNTICAS!

SE A REPRESENTA, POR EXEMPLO, A POSIÇÃO DA PARTÍCULA X, ENTÃO $(X_1 - X_2)^2$ É UMA MEDIDA DA DISTÂNCIA MÉDIA (AO QUADRADO) ENTRE AS PARTÍCULAS: R^2. ASSIM:

$$R_\pm^2 = R_D^2 \mp 2 |X_{mn}|^2$$

ONDE: $X_{mn} = \langle m | X | n \rangle$

EM TERMOS DAS FUNÇÕES DE ONDA: $\varphi_{m,n}(x) = \langle x | m,n \rangle$

$$X_{mn} = \int dx\, \varphi_m^*(x)\, x\, \varphi_n(x)$$

(i) A DISTÂNCIA MÉDIA ENTRE BÓSONS É MENOR QUE A DISTÂNCIA MÉDIA ENTRE FÉRMIONS

$$R_+ < R_-$$

BÓSONS TENDEM A "SE JUNTAR" E FÉRMIONS A "SE AFASTAR" E ISSO É UM EFEITO PURAMENTE DA SIMETRIZAÇÃO DA FUNÇÃO DE ONDA. NÃO HÁ FORÇAS REAIS, MAS ISSO É ÀS VEZES CHAMADO DE FORÇA DE TROCA

(ii) ESSE EFEITO É GERAL E INDEPENDE DO OPERADOR A EM QUESTÃO.

(iii) SE AS FUNÇÕES DE ONDA NÃO SE SOBREPÕEM,

$$X_{mn} = 0$$

E O EFEITO DESAPARECE.

(iv) NÓS IGNORAMOS O SPIN. NO CASO FERMIÔNICO, ISSO É IMPOSSÍVEL. PORÉM, COMO JÁ VIMOS ANTES, SE O SPIN TOTAL É $S=1$ (ASSUMINDO FÉRMIONS DE SPIN ½), AS FUNÇÕES ESPACIAIS SÃO ANTI-SIMÉTRICAS E A DISTÂNCIA MÉDIA ENTRE OS FÉRMIONS É MAIOR DO QUE A DE PARTÍCULAS DISTINGUÍVEIS OU BÓSONS. SE $S=0$, A PARTE ESPACIAL É SIMÉTRICA E A DISTÂNCIA MÉDIA É COMO A DE BÓSONS.

ESPALHAMENTO DE PARTÍCULAS IDÊNTICAS

COMO PODEMOS USAR OS RESULTADOS DO CAP. 8 PARA DESCREVER O ESPALHAMENTO ENTRE DUAS PARTÍCULAS IDÊNTICAS?

RELEMBRANDO, O ESPALHAMENTO ENTRE DUAS PARTÍCULAS NÃO IDÊNTICAS DE MASSAS m_1 E m_2 É DESCRITO POR UMA FUNÇÃO DE ONDA DA FORMA:

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \chi(\vec{R})\, \psi_{\vec{k}}(\vec{r})$$

ONDE: $\vec{R} = \dfrac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$ (COORD. CENTRO DE MASSA)

$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ (COORD. RELATIVA)

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \vec{\nabla}_R^2 \chi(\vec{R}) = E_G\, \chi(\vec{R}) \qquad (M = m_1 + m_2)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \vec{\nabla}_{\vec{r}}^2 + V(\vec{r})\right] \psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} \psi_{\vec{k}}(\vec{r}) \qquad \left(\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right)$$

$$E = E_G + \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} = \text{ENERGIA TOTAL}$$

$\chi(\vec{R})$ DESCREVE A DINÂMICA DO CENTRO DE MASSA COMO SENDO A DE UMA PARTÍCULA LIVRE DE MASSA M E ENERGIA E_G.

A DINÂMICA DA COORDENADA RELATIVA É A DE UMA PARTÍCULA CUJA MASSA É A MASSA EFETIVA μ SOB A AÇÃO DO POTENCIAL $V(\vec{r})$

A CONDIÇÃO DE CONTORNO IMPOSTA SOBRE $\psi_{\vec{k}}(\vec{r})$ É TAL QUE, QUANDO $|\vec{r}| \to \infty$:

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) \longrightarrow e^{ikz} + f_k(\theta,\phi)\,\frac{e^{ikr}}{r}$$

ONDE TOMAMOS O SISTEMA DE COORDENADAS DE TAL FORMA QUE: $\vec{k} = k\hat{z}$.

SE AS PARTÍCULAS SÃO IDÊNTICAS, $m_1 = m_2 \equiv m$ E

$$\vec{R} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2} \qquad \mu = \frac{m}{2} \qquad M = 2m$$

A PERMUTAÇÃO DAS COORDENADAS ESPACIAIS NÃO ALTERA $\vec{R}$, MAS:

$$P_{21}\ \vec{r} = -\vec{r}$$

SUPONDO QUE O POTENCIAL SATISFAZ

$$V(-\vec{r}) = V(\vec{r})$$

SEGUE QUE, SE $\psi_{\vec{k}}(\vec{r})$ É SOLUÇÃO DA EQ. DA COORDENADA RELATIVA, ENTÃO $\psi_{\vec{k}}(-\vec{r})$ TAMBÉM É. ASSIM, PODEMOS SIMETRIZAR A FUNÇÃO DE ONDA PARA OBTERMOS FUNÇÕES DE ONDA QUE DESCREVAM PARTÍCULAS IDÊNTICAS.

(a) BÓSONS (SEM SPIN)

$$\Psi_B(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \chi(\vec{R})\left[\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) + \psi_{\vec{k}}(-\vec{r})\right]$$

O COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DA PARTE DE ESPALHAMENTO, PORTANTO É:

$$e^{ikz} + e^{-ikz} + \left[f_k(\theta,\phi) + f_k(\pi-\theta, \phi+\pi)\right]\frac{e^{ikr}}{r}$$

ONDE USAMOS QUE, EM COORDENADAS ESFÉRICAS:

$$\vec{r} \to (r, \theta, \phi) \qquad -\vec{r} \to (r, \pi-\theta, \phi+\pi)$$

COMO JÁ VIMOS, A AMPLITUDE DE ESPALHAMENTO É O COEFICIENTE DA ONDA ESFÉRICA:

$$f_k^B(\theta,\phi) = f_k(\theta,\phi) + f_k(\pi-\theta,\phi+\pi)$$

E A SEÇÃO DE CHOQUE É:

$$\sigma_k^B(\theta,\phi) = |f_k(\theta,\phi) + f_k(\pi-\theta,\phi+\pi)|^2$$

O MESMO RESULTADO É VÁLIDO PARA FÉRMIONS DE SPIN 1/2 SE O ESTADO DE SPIN É O SINGLETO:

$$|S=0, M=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|1:+;2:-\rangle - |1:-;2:+\rangle\right]$$

POIS NESSE CASO A FUNÇÃO ESPACIAL É SIMÉTRICA, COMO VIMOS.

(b) FÉRMIONS DE SPIN 1/2 NO ESTADO TRIPLETO

SE O ESTADO DE SPIN FOR QUALQUER UM ENTRE OS 3 ESTADOS DO TRIPLETO:

$$|S=1, M=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|1:+;2:-\rangle + |1:-;2:+\rangle\right]$$

$$|S=1, M=\pm 1\rangle = |1:\pm;2:\pm\rangle$$

A FUNÇÃO DE ONDA ESPACIAL É ANTI-SIMÉTRICA E:

$$f_k^{F(S=1)}(\theta,\phi) = [f_k(\theta,\phi) - f_k(\pi-\theta,\phi+\pi)]$$

E:

$$\sigma_k^{F(S=1)}(\theta,\phi) = |f_k(\theta,\phi) - f_k(\pi-\theta,\phi+\pi)|^2$$

NOTEM QUE, SE O POTENCIAL É CENTRAL: $V(\vec{r}) \equiv V(|\vec{r}|)$, NÃO HÁ DEPENDÊNCIA COM ϕ. NESSE CASO, O ESPALHAMENTO A 90° $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$f_k^B(\theta) = 2 f_k\left(\frac{\pi}{2}\right) \qquad f_k^{F(S=1)}(\theta) = 0$$

E

$$\sigma_k^B(\theta) = 4\left|f_k\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|^2 \qquad \sigma_k^{F(S=1)} = 0$$

O ESPALHAMENTO A 90° PARA BÓSONS OU FÉRMIONS DE $S=1/2$ NO SINGLETO É 4 VEZES MAIOR QUE PARA PARTÍCULAS NÃO IDÊNTICAS DE MESMA MASSA. A 90°, FÉRMIONS DE $S=1/2$ NO TRIPLETO TEM ESPALHAMENTO NULO

ESSE É UM EFEITO PURAMENTE DO POSTULADO DE SIMETRIZAÇÃO E INDEPENDE DA ENERGIA E DO POTENCIAL DE INTERAÇÃO.