SISTEMAS DE $N > 2$ PARTÍCULAS IDÊNTICAS

VAMOS AGORA GENERALIZAR O QUE FIZEMOS PARA 2 PARTÍCULAS IDÊNTICAS PARA N PARTÍCULAS IDÊNTICAS. PARA FIXAR IDEIAS É MELHOR EXEMPLIFICAR COM $N=3$ PARA DEPOIS GENERALIZAR.

(a) PARA $N=3$, PODEMOS DEFINIR $6=3!$ PERMUTADORES (INCLUINDO NO CONJUNTO A IDENTIDADE)

$$P_{123} \equiv 1 \,;\; P_{312} \,;\; P_{231} \,;\; P_{132} \,;\; P_{213} \,;\; P_{321}$$

ONDE:

$$P_{312} |1: u_i ; 2: u_j ; 3: u_k\rangle = |3: u_i ; 1: u_j ; 2: u_k\rangle$$
$$= |1: u_j ; 2: u_k ; 3: u_i\rangle$$

EM GERAL:

$$P_{npq} |1: u_i ; 2: u_j ; 3: u_k\rangle = |n: u_i ; p: u_j ; q: u_k\rangle$$

A PARTIR DESSA ATUAÇÃO NA BASE TEMOS A ATUAÇÃO EM QUALQUER ESTADO.
PARA N QUALQUER, HÁ $N!$ PERMUTADORES.

(b) TRANSPOSIÇÕES

TRANSPOSIÇÕES SÃO PERMUTAÇÕES QUE TROCAM APENAS DUAS PARTÍCULAS. POR EXEMPLO, P_{213}, P_{132} E P_{321} SÃO TRANSPOSIÇÕES (TROCA $1 \rightleftarrows 2$, $2 \rightleftarrows 3$, $1 \rightleftarrows 3$, RESPECTIVAMENTE).

TRANSPOSIÇÕES SÃO HERMITIANOS, IGUAIS A SUAS INVERSAS E, PORTANTO, UNITÁRIOS. POR EXEMPLO:

$$P_{213} = P_{213}^{-1} = P_{213}^{\dagger}$$

PERMUTAÇÕES QUAISQUER PODEM SER ESCRITAS COMO PRODUTOS DE TRANSPOSIÇÕES. POR EXEMPLO:

$$P_{312} = P_{132} P_{213} \quad \text{OU} \quad P_{321} P_{132} \quad \text{OU} \quad P_{213} P_{321}$$

EMBORA ESSA DECOMPOSIÇÃO EM TRANSPOSIÇÕES NÃO SEJA ÚNICA, O NÚMERO DE TRANSPOSIÇÕES UTILIZADAS É SEMPRE PAR OU ÍMPAR, DEPENDENDO DA PERMUTAÇÃO. DIZ-SE QUE A PARIDADE É UMA PROPRIEDADE DA PERMUTAÇÃO.

PARA UM DADO N, METADE DAS PERMUTAÇÕES SÃO PARES E A OUTRA METADE É ÍMPAR.

(c) PERMUTAÇÕES SÃO UNITÁRIAS

COMO PERMUTAÇÕES SÃO PRODUTOS DE OPERADORES UNITÁRIOS, ELAS SÃO TAMBÉM UNITÁRIAS:

$$P = T_1 T_2 \cdots T_N \Rightarrow P^\dagger = T_N^\dagger \cdots T_2^\dagger T_1^\dagger = T_N^{-1} \cdots T_2^{-1} T_1^{-1}$$

$$P^{-1} = T_N^{-1} \cdots T_2^{-1} T_1^{-1} \Rightarrow \boxed{P^{-1} = P^\dagger}$$

ENTRETANTO, PERMUTAÇÕES NÃO SÃO NECESSARIAMENTE HERMITIANAS. ISSO PORQUE AS TRANSPOSIÇÕES NÃO NECESSARIAMENTE COMUTAM ENTRE SI. ENTÃO, POR EXEMPLO, PODEMOS TER:

$$P = T_1 T_2 \; ; \; P^\dagger = T_2^\dagger T_1^\dagger = T_2 T_1 \neq T_1 T_2 = P$$

MAS NOTE QUE A PARIDADE DE $P^\dagger$ É A MESMA DE P POIS UTILIZA-SE O MESMO NÚMERO DE TRANSPOSIÇÕES, EM ORDEM INVERSA.

(d) ESTADOS COMPLETAMENTE SIMÉTRICOS E ANTI-SIMÉTRICOS

UM ESTADO É COMPLETAMENTE SIMÉTRICO SE:

$$P_\alpha |\psi_S\rangle = |\psi_S\rangle \quad \text{PARA TODA PERMUTAÇÃO } P_\alpha$$

E UM ESTADO É COMPLETAMENTE ANTI-SIMÉTRICO SE:

$$P_\alpha |\psi_A\rangle = \varepsilon_\alpha |\psi_A\rangle \quad \text{PARA TODA PERMUTAÇÃO } P_\alpha$$

ONDE $\varepsilon_\alpha = (-1)^{p_\alpha}$, ONDE p_α É A PARIDADE DE P_α, OU SEJA, $p_\alpha = 0$ SE P_α É PAR E $p_\alpha = 1$ SE P_α É ÍMPAR.

DEFINIMOS OS PROJETORES

$$S = \frac{1}{N!} \sum_\alpha P_\alpha \qquad A = \frac{1}{N!} \sum_\alpha \varepsilon_\alpha P_\alpha$$

PODE-SE MOSTRAR QUE:

$$S^\dagger = S \;;\; S^2 = S \;;\; A^\dagger = A \;;\; A^2 = A \;;\; AS = SA = 0$$

OU SEJA, SÃO PROJETORES ORTOGONAIS,

E, DADA UMA PERMUTAÇÃO P_α QUALQUER:

$$P_\alpha S = S P_\alpha = S$$

$$P_\alpha A = A P_\alpha = \varepsilon_\alpha A$$

SEGUE QUE S E A PROJETAM NOS SUB-ESPAÇOS DE ESTADOS SIMÉTRICOS $\mathcal{E}_S$ E ANTI-SIMÉTRICOS $\mathcal{E}_A$, RESPECTIVAMENTE.
DE FATO:

$$P_\alpha \underbrace{\left[S|\psi\rangle\right]}_{|\psi_S\rangle} = \underbrace{\left[S|\psi\rangle\right]}_{|\psi_S\rangle}$$

$$P_\alpha \underbrace{\left[A|\psi\rangle\right]}_{|\psi_A\rangle} = \varepsilon_\alpha \underbrace{\left[A|\psi\rangle\right]}_{|\psi_A\rangle}$$

(i) NOTE QUE $S\left[P_\alpha|\psi\rangle\right]$ E $S|\psi\rangle$ SÃO O MESMO ESTADO ($|\psi\rangle$ QUALQUER)

$$S P_\alpha|\psi\rangle = S|\psi\rangle$$

E $A\left[P_\alpha|\psi\rangle\right]$ E $A|\psi\rangle$ SÃO IGUAIS A MENOS DE SINAL:

$$A P_\alpha|\psi\rangle = \varepsilon_\alpha A|\psi\rangle$$

ii) PARA $N > 2$,

$$S + A \neq \mathbb{1}$$

OU SEJA, O ESPAÇO TOTAL $\mathcal{E}$ NÃO É A SOMA DIRETA DE $\mathcal{E}_S$ E $\mathcal{E}_A$.

POSTULADO DE SIMETRIZAÇÃO (N QUALQUER)

UM SISTEMA DE N PARTÍCULAS IDÊNTICAS É DESCRITO APENAS POR ESTADOS COMPLETAMENTE SIMÉTRICOS ($|\psi_S\rangle \in \mathcal{E}_S$) NO CASO DE BÓSONS OU ESTADOS COMPLETAMENTE ANTI-SIMÉTRICOS ($|\psi_A\rangle \in \mathcal{E}_A$) NO CASO DE FÉRMIONS.

NOTEM QUE PARTÍCULAS NÃO ELEMENTARES, COMO PRÓTONS E NÊUTRONS, "HERDAM" SUA ESTATÍSTICA DE SEUS CONSTITUINTES. UM PRÓTON E UM NÊUTRON SÃO COMPOSTOS DE 3 QUARKS. QUANDO PERMUTAMOS DOIS PRÓTONS, ESTAMOS PERMUTANDO UM NÚMERO ÍMPAR DE FÉRMIONS E O ESTADO TROCA DE SINAL, PORTANTO, PRÓTONS E NÊUTRONS SÃO FÉRMIONS.

UM MÉSON É FORMADO POR UM QUARK E UM ANTI-QUARK, OU SEJA, UM NÚMERO PAR DE FÉRMIONS, CUJA PERMUTAÇÃO NÃO TROCA O SINAL DO ESTADO: UM MÉSON É UM BÓSON.
UMA PARTÍCULA FORMADA POR UM NÚMERO QUALQUER DE BÓSONS É UM BÓSON.

AS REGRAS DE SOMA DE MOMENTOS ANGULARES GARANTE A VALIDADE DO TEOREMA DE SPIN-ESTATÍSTICA PARA PARTÍCULAS COMPOSTAS:

O MOMENTO ANGULAR TOTAL DE UM NÚMERO PAR DE MOMENTOS ANGULARES SEMI-INTEIROS É INTEIRO. A SOMA DE UM NÚMERO ÍMPAR DE MOMENTOS ANGULARES SEMI-INTEIROS É SEMI-INTEIRO. QUALQUER SOMA DE MOMENTOS ANGULARES INTEIROS É INTEIRA.
FINALMENTE, NADA DISSO MUDA SE ADICIONARMOS, ALÉM DOS SPINS DAS PARTÍCULAS, OS MOMENTOS ANGULARES ORBITAIS, QUE SÃO SEMPRE INTEIROS

VÁRIOS DOS RESULTADOS JÁ DISCUTIDOS PARA $N=2$ SE GENERALIZAM IMEDIATAMENTE PARA MAIS PARTÍCULAS, COMO, POR EXEMPLO, A REMOÇÃO DA DEGENERESCÊNCIA DE TROCA E A CONSTRUÇÃO DE ESTADOS (ANTI-)SIMETRIZADOS USANDO O (ANTI-)SIMETRIZADOR.

VAMOS EXEMPLIFICAR O ÚLTIMO CASO COM ALGUNS EXEMPLOS. SUPONHA 3 PARTÍCULAS E VAMOS TENTAR ACOMODÁ-LAS EM 3 ESTADOS DIFERENTES ORTONORMALIZADOS $|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle$. SE AS PARTÍCULAS SÃO DISTINGUÍVEIS UMA POSSÍVEL OCUPAÇÃO É:

$$|\psi_D\rangle = |1:a;\, 2:b;\, 3:c\rangle$$

PARA BÓSONS IDÊNTICOS, O ESTADO ACIMA PRECISA SER SIMETRIZADO DE FORMA A NÃO OCUPAR NENHUM ESTADO COM UMA PARTÍCULA PRIVILEGIADA. USANDO OS SIMETRIZADORES DE $N=3$:

$$P_{123} \equiv 1;\ P_{312};\ P_{231};\ P_{132};\ P_{213};\ P_{321}$$

$$|\psi_B\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\Big[\,|1:a;\,2:b;\,3:c\rangle + |1:c;\,2:a;\,3:b\rangle +$$

$$+\,|1:b;\,2:c;\,3:a\rangle + |1:a;\,2:c;\,3:b\rangle +$$

$$+\,|1:b;\,2:a;\,3:c\rangle + |1:c;\,2:b;\,3:a\rangle\Big]$$

ONDE JÁ NORMALIZAMOS O ESTADO FINAL: $\frac{1}{6} \to \frac{1}{\sqrt{6}}$

E, PARA FÉRMIONS, UTILIZAMOS O ANTI-SIMETRIZADOR A, EM QUE OS 3 ÚLTIMOS TERMOS GANHAM UM SINAL NEGATIVOS, POIS SÃO PERMUTAÇÕES ÍMPARES:

$$|\psi_F\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\Big[\,|1:a;\,2:b;\,3:c\rangle + |1:c;\,2:a;\,3:b\rangle +$$

$$+\,|1:b;\,2:c;\,3:a\rangle - |1:a;\,2:c;\,3:b\rangle -$$

$$-\,|1:b;\,2:a;\,3:c\rangle - |1:c;\,2:b;\,3:a\rangle\Big]$$

ESSE PROCESSO SE TORNA MUITO TRABALHOSO PARA N GRANDE. NESSE CASO, HÁ UM TRUQUE QUE É ESPECIALMENTE ÚTIL NO CASO FERMIÔNICO, ONDE PODE SER TRABALHOSO DESCOBRIR OS TERMOS COM SINAIS NEGATIVOS.

O ESTADO $|\psi_F\rangle$ PODE SER OBTIDO ATRAVÉS DO CHAMADO DETERMINANTE DE SLATER:

$$|\psi_F\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{vmatrix} |1:a\rangle & |1:b\rangle & |1:c\rangle \\ |2:a\rangle & |2:b\rangle & |2:c\rangle \\ |3:a\rangle & |3:b\rangle & |3:c\rangle \end{vmatrix}$$

O CÁLCULO DO DETERMINANTE ACIMA, ATRAVÉS DAS REGRAS HABITUAIS, TROCANDO PRODUTOS POR PRODUTOS TENSORIAIS, NOS DÁ O MESMO ESTADO CONSTRUÍDO ATRAVÉS DE $\underline{A}$.
ESSE PROCEDIMENTO SE GENERALIZA PARA N QUALQUER, ONDE A MATRIZ FICA $N \times N$.

a) O PROCEDIMENTO PODE SER USADO TAMBÉM PARA BÓSONS: BASTA TORNAR POSITIVOS TODOS OS SINAIS NEGATIVOS DO DETERMINANTE. A ESSE OBJETO MATEMÁTICO DÁ-SE O NOME DE PERMANENTE.

b) O PRINCÍPIO DE EXCLUSÃO DE PAULI FICA EVIDENTE. SE DOIS FÉRMIONS OCUPAM O MESMO ESTADO, POR EXEMPLO FAZENDO $a=b$, DUAS COLUNAS DO DETERMINANTE FICAM IGUAIS E O DETERMINANTE SE ANULA.

A EVOLUÇÃO TEMPORAL NÃO RETIRA ESTADOS DOS SUB-ESPAÇOS $\mathcal{E}_A$ OU $\mathcal{E}_S$

OS POSTULADOS DA MECÂNICA QUÂNTICA INTRODUZIDOS NO CAPÍTULO 3 SÃO FACILMENTE MODIFICADOS PELO POSTULADO DA SIMETRIZAÇÃO: TODOS OS ESTADOS UTILIZADOS (E AUTO-VALORES) DEVEM PERTENCER AOS SUB-ESPAÇOS (ANTI-) SIMETRIZADOS $(\mathcal{E}_A)$ $\mathcal{E}_S$.

APENAS UM POSTULADO MERECE CONSIDERAÇÃO ESPECIAL: O DA EVOLUÇÃO TEMPORAL. A QUESTÃO É: SE O ESTADO INICIAL A $t=0$ PERTENCE A $\mathcal{E}_S$ OU $\mathcal{E}_A$, A EVOLUÇÃO TEMPORAL MANTÉM O ESTADO NESSES SUB-ESPAÇOS OU ELA PODE "TIRAR" O ESTADO DELES?

PARA ISSO, DEVEMOS LEMBRAR QUE O HAMILTONIANO DE UM SISTEMA DE PARTÍCULAS IDÊNTICAS É SEMPRE UM OPERADOR SIMÉTRICO, OU SEJA,

$$P_\alpha H(1,2,\dots,N)P_\alpha^\dagger = H(1,2,\dots,N) \quad \text{OU}$$

$$H(P1,P2,\dots,PN) = H(1,2,\dots,N)$$

O OPERADOR $H(1,2,\cdots,N)$ PERMANECE INVARIANTE SOB <u>QUALQUER</u> PERMUTAÇÃO DAS PARTÍCULAS. TOME, POR EXEMPLO, O HAMILTONIANO DO ÁTOMO DE HÉLIO $(Z=2)$:

$$H = \frac{\vec{P}_1^{\,2}}{2m} + \frac{\vec{P}_2^{\,2}}{2m} - \frac{2e^2}{R_1} - \frac{2e^2}{R_2} + \frac{e^2}{|\vec{R}_1 - \vec{R}_2|}$$

ONDE ASSUMIMOS QUE O NÚCLEO PERMANECE IMÓVEL. É CLARO QUE H É SIMÉTRICO POR TROCA DE $\vec{R}_1 \rightleftarrows \vec{R}_2$, $\vec{P}_1 \rightleftarrows \vec{P}_2$. NOTEM QUE, PARA ISSO, É FUNDAMENTAL QUE QUALQUER ELÉTRON TENHA A MESMA MASSA $\underline{m}$ E A MESMA CARGA $-q = -\sqrt{4\pi\epsilon_0}\, e$.

COMO VIMOS, SEGUE QUE H COMUTA COM TODAS AS PERMUTAÇÕES P_α:

$$[H, P_\alpha] = 0$$

MAS A EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER, EM FORMA INFINITESIMAL É:

$$H|\psi(t)\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \frac{i\hbar}{dt}\left[|\psi(t+dt)\rangle - |\psi(t)\rangle\right]$$

$$\Rightarrow |\psi(t+dt)\rangle = |\psi(t)\rangle + \frac{dt}{i\hbar} H |\psi(t)\rangle$$

APLICANDO P_α NESSA EQUAÇÃO E USANDO $[H, P_\alpha] = 0$:

$$P_\alpha |\psi(t+dt)\rangle = P_\alpha |\psi(t)\rangle + \frac{dt}{i\hbar} H P_\alpha |\psi(t)\rangle$$

PORTANTO, SE $|\psi(t)\rangle$ É (ANTI-) SIMETRIZADO

$P_\alpha |\psi(t)\rangle = |\psi(t)\rangle$ (BÓSONS) OU

$P_\alpha |\psi(t)\rangle = \varepsilon_\alpha |\psi(t)\rangle$ (FÉRMIONS)

SEGUE QUE $|\psi(t+dt)\rangle$ TAMBÉM É:

$$P_\alpha |\psi(t+dt)\rangle = |\psi(t)\rangle + \frac{dt}{i\hbar} H |\psi(t)\rangle = |\psi(t+dt)\rangle$$

(BÓSONS)

$$P_\alpha |\psi(t+dt)\rangle = \varepsilon_\alpha \left[|\psi(t)\rangle + \frac{dt}{i\hbar} H |\psi(t)\rangle \right] = \varepsilon_\alpha |\psi(t+dt)\rangle$$

(FÉRMIONS)

PROVANDO QUE A EVOLUÇÃO TEMPORAL NÃO "TIRA" OS ESTADOS DOS SUB-ESPAÇOS $\mathcal{E}_S$, $\mathcal{E}_A$.