O PROBLEMA DE DOIS CORPOS

VAMOS MOSTRAR QUE O PROBLEMA DE DOIS CORPOS INTERAGINDO ATRAVÉS DE UMA FORÇA QUE SÓ DEPENDE DA DISTÂNCIA ENTRE OS CORPOS PODE SER REDUZIDO AO PROBLEMA ANTERIOR.

ANÁLISE CLÁSSICA

SEJAM 2 CORPOS DE MASSAS m_1, m_2, CUJAS POSIÇÕES SÃO $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, RESPECTIVAMENTE, QUE INTERAGEM ATRAVÉS DE FORÇAS MÚTUAS DERIVÁVEIS DE UM POTENCIAL $V(\vec{r}_1-\vec{r}_2)$, QUE SÓ DEPENDE DA DISTÂNCIA ENTRE OS CORPOS: $\vec{r}_1-\vec{r}_2$.

A LAGRANGIANA DO SISTEMA É:

$$L = T - V = \frac{m_1}{2}\dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{m_2}{2}\dot{\vec{r}}_2^{\,2} - V(\vec{r}_1-\vec{r}_2)$$

OS MOMENTOS CANONICAMENTE CONJUGADOS A $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ SÃO, RESPECTIVAMENTE,

$$\vec{p}_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_1} = m_1 \dot{\vec{r}}_1 \quad ; \quad \vec{p}_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_2} = m_2 \dot{\vec{r}}_2$$

SÃO OS MOMENTOS LINEARES DE $\underline{1}$ E $\underline{2}$.

ESSE PROBLEMA SE SIMPLIFICA CONSIDERAVELMENTE NUM OUTRO SISTEMA DE COORDENADAS:

COORDENADA DO CENTRO DE MASSA

$$\vec{r}_G = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{M}\vec{r}_1 + \frac{m_2}{M}\vec{r}_2$$

COORDENADA RELATIVA

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

ONDE A MASSA TOTAL É $M = m_1 + m_2$. NOTE QUE $\vec{r}_G$ É A MÉDIA PONDERADA DAS POSIÇÕES, ONDE OS PESOS SÃO AS FRAÇÕES DA MASSA TOTAL. PODEMOS ESCREVER AS TRANSFORMAÇÕES INVERSAS:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_G + \frac{m_2}{M}\vec{r} \qquad \vec{r}_2 = \vec{r}_G - \frac{m_1}{M}\vec{r}$$

EM TERMOS DAS NOVAS COORDENADAS, A LAGRANGIANA FICA:

$$L = \frac{M}{2}\dot{\vec{r}}_G^{\,2} + \frac{\mu}{2}\dot{\vec{r}} - V(\vec{r}) \equiv L_G + L_r$$

ONDE :

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{M}$$ É A MASSA REDUZIDA

E:

$$L_G = \frac{M}{2}\dot{\vec{R}}_G^2 \qquad L_r = \frac{\mu}{2}\dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r})$$

ASSIM, VEMOS QUE NAS NOVAS COORDENADAS, A LAGRANGIANA SE DESACOPLA EM 2 LAGRANGIANAS INDEPENDENTES!

A LAGRANGIANA DO CENTRO DE MASSA L_G LEVA À EQUAÇÃO DE MOVIMENTO

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_G}{\partial \dot{\vec{R}}_G}\right) - \frac{\partial L_G}{\partial \vec{R}_G} = 0 \rightarrow M\ddot{\vec{R}}_G = 0 \Rightarrow \dot{\vec{R}}_G = \text{CONST.}$$

⇒ O CENTRO DE MASSA REALIZA UM MRU, O QUE PODERIA TER SIDO ANTECIPADO, POIS NÃO HÁ FORÇAS EXTERNAS.

A LAGRANGIANA DA COORDENADA RELATIVA L_r NOS DÁ:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_r}{\partial \dot{\vec{r}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0 \Rightarrow \mu\ddot{\vec{r}} = -\frac{dV}{dr}$$

⇒ QUE É A EQUAÇÃO DA DINÂMICA DE UMA PARTÍCULA DE MASSA μ SOB A AÇÃO DE UM POTENCIAL $V(r)$, COMO ANUNCIADO.

ASSIM, A DINÂMICA NÃO TRIVIAL É EXATAMENTE AQUELA DE UMA PARTÍCULA SOB FORÇA CENTRAL QUE JÁ TÍNHAMOS ANALISADO.

PARA A ANÁLISE QUÂNTICA, PRECISAMOS DO FORMALISMO HAMILTONIANO. EM TERMOS DAS COORDENADAS INICIAIS, TEMOS:

$$\vec{p}_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_1} = m_1 \dot{\vec{r}}_1 \quad ; \quad \vec{p}_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_2} = m_2 \dot{\vec{r}}_2$$

$$H = \vec{p}_1 \cdot \dot{\vec{r}}_1 + \vec{p}_2 \cdot \dot{\vec{r}}_2 - L = \frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^{\,2}}{2m_2} + V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

E, EM TERMOS DAS NOVAS COORDENADAS:

$$\vec{P}_G = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_G} = M \dot{\vec{r}}_G = m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2,$$

QUE É O MOMENTO LINEAR TOTAL, E

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = \mu \dot{\vec{r}} = \frac{m_1 m_2}{M}(\dot{\vec{r}}_1 - \dot{\vec{r}}_2) = \frac{m_2}{M}\vec{p}_1 - \frac{m_1}{M}\vec{p}_2$$

QUE É CHAMADO DE MOMENTO RELATIVO.

FINALMENTE:

$$H = \dot{\vec{r}}_G \cdot \vec{P}_G + \dot{\vec{r}} \cdot \vec{p} - L = \overbrace{\frac{\vec{P}_G^{\,2}}{2M}}^{H_G} + \overbrace{\frac{\vec{p}^{\,2}}{2\mu} + V(\vec{r})}^{H_r} \equiv H_G + H_r$$

OU SEJA, O DESACOPLAMENTO ENTRE CENTRO DE MASSA E COORDENADA RELATIVA TAMBÉM FICA CLARO NO FORMALISMO HAMILTONIANO.

ANÁLISE QUÂNTICA

PARA ANALISAR QUANTICAMENTE, DEVEMOS UTILIZAR AS REGRAS DE QUANTIZAÇÃO E ASSOCIAR OPERADORES ÀS COORDENADAS:

$$\vec{r}_1 \rightarrow \vec{R}_1 \; ; \quad \vec{r}_2 \rightarrow \vec{R}_2 \; ; \quad \vec{p}_1 \rightarrow \vec{P}_1 \; ; \quad \vec{p}_2 \rightarrow \vec{P}_2$$

QUE OBEDECEM ÀS RELAÇÕES DE COMUTAÇÃO

$$[X_1, P_{1x}] = [X_2, P_{2x}] = [Y_1, P_{1y}] = [Y_2, P_{2y}] = [Z_1, P_{1z}] = [Z_2, P_{2z}] = i\hbar$$

E TODOS OS OUTROS COMUTADORES SE ANULAM. NAS NOVAS VARIÁVEIS:

$$\vec{R}_G = \frac{m_1}{M}\vec{R}_1 + \frac{m_2}{M}\vec{R}_2 \quad ; \quad \vec{R} = \vec{R}_1 - \vec{R}_2$$

$$\vec{P}_G = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 \quad ; \quad \vec{P} = \frac{m_2}{M}\vec{P}_1 - \frac{m_1}{M}\vec{P}_2$$

É FÁCIL MOSTRAR QUE:

$$[X_G, P_{Gx}] = [X, P_x] = i\hbar$$

E ANALOGAMENTE PARA AS COMPONENTES y, z (COMUTADORES CRUZADOS SE ANULAM) E TODOS OS COMUTADORES ENTRE OPERADORES DO CENTRO DE MASSA E DAS COORDENADAS RELATIVAS SE ANULAM.

OU SEJA, É COMO SE $\vec{R}_G$ E $\vec{P}_G$, POR UM LADO, E $\vec{R}$ E $\vec{P}$, POR OUTRO, FOSSEM 2 PARTÍCULAS FICTÍCIAS DIFERENTES.

SEGUE QUE O HAMILTONIANO FICA:

$$H = \underbrace{\frac{\vec{P}_G^2}{2M}}_{H_G} + \underbrace{\frac{\vec{P}^2}{2\mu} + V(\vec{R})}_{H_r}$$

E AS DINÂMICAS DAS 2 "PARTÍCULAS" SE DESACOPLAM. NOTE QUE:

$$[H_G, H_r] = 0$$

E OS DOIS HAMILTONIANOS PODEM SER DIAGONALIZADOS SIMULTANEAMENTE.

SEJA UMA REPRESENTAÇÃO DE POSIÇÃO CUJA BASE É:

$$\{ |\vec{r}_G, \vec{r}\rangle \}$$

PODEMOS ESCREVER OS AUTO-ESTADOS COMO:

$$|\chi_G, \varphi_r\rangle$$

DE TAL FORMA QUE:

$$H_G |\chi_G, \varphi_r\rangle = E_G |\chi_G, \varphi_r\rangle$$

$$H_r |\chi_G, \varphi_r\rangle = E_r |\chi_G, \varphi_r\rangle$$

$$H |\chi_G, \varphi_r\rangle = E |\chi_G, \varphi_r\rangle = (E_G + E_r) |\chi_G, \varphi_r\rangle$$

AS AUTO-FUNÇÕES SÃO:

$$\langle \vec{r}_G, \vec{r} | \chi_G, \varphi_r\rangle = \chi_G(\vec{r}_G)\varphi_r(\vec{r})$$

OU SEJA, AS AUTO-FUNÇÕES SÃO PRODUTOS DAS AUTO-FUNÇÕES DE H_G E H_r.

COMO H_G É A HAMILTONIANA DE UMA PARTÍCULA LIVRE, SUAS AUTO-FUNÇÕES SÃO ONDAS PLANAS:

$$\chi_G^{(\vec{p}_G)}(\vec{r}_G) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{i\vec{p}_G\cdot\vec{r}_G/\hbar}$$

CUJOS AUTO-VALORES DE ENERGIA SÃO

$$E_G = \frac{\vec{p}_G^{\,2}}{2M}$$

OU SEJA:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla_G^2\right)\chi_G^{(\vec{p}_G)}(\vec{r}_G) = \left(\frac{p_G^2}{2M}\right)\chi_G^{(\vec{p}_G)}(\vec{r}_G)$$

A PARTE MAIS INTERESSANTE DA DINÂMICA É A DA COORDENADA RELATIVA:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V(\vec{r})\right]\varphi_n(\vec{r}) = E_n(\vec{r})$$

QUE É A EQUAÇÃO QUE JÁ ANALISAMOS.