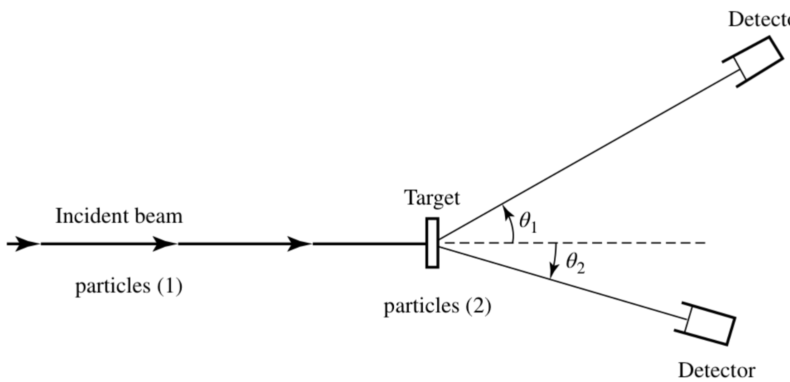
INTRODUÇÃO À TEORIA QUÂNTICA DE ESPALHAMENTO

EXPERIMENTOS DE ESPALHAMENTO SÃO MUITO COMUNS EM FÍSICA, DESDE O EXPERIMENTO DE RUTHERFORD ATÉ AS COLISÕES EM GRANDES ACELERADORES. É, PORTANTO, IMPORTANTE ENTENDER COMO É FEITA A DESCRIÇÃO QUÂNTICA. VAMOS FOCAR NO ESPALHAMENTO DE UM FEIXE COLIMADO DE PARTÍCULAS POR UM ALVO EM REPOUSO NO LABORATÓRIO, COMO NA FIGURA.



VAMOS ANALISAR AQUI APENAS O ESPALHAMENTO ELÁSTICO, OU SEJA, AS PARTÍCULAS ESPALHADAS NOS DETECTORES SÃO AS MESMAS QUE AS INCIDENTES E NÃO HÁ MUDANÇA NOS ESTADOS "INTERNOS" DAS PARTÍCULAS (COMO EXCITAÇÃO DOS ÁTOMOS, POR EXEMPLO).

OUTRAS HIPÓTESES QUE FAREMOS:

(i) IGNORAREMOS O SPIN DAS PARTÍCULAS

(ii) A DENSIDADE DE PARTÍCULAS ALVO É BAIXA O SUFICIENTE PARA QUE SE POSSA IGNORAR ESPALHAMENTO DE UMA PARTÍCULA INCIDENTE POR MAIS DE UMA PARTÍCULA ALVO ("ESPALHAMENTO MÚLTIPLO").

(iii) O FEIXE INCIDENTE É POUCO DENSO DE TAL FORMA QUE PODEMOS IGNORAR AS INTERAÇÕES ENTRE AS PARTÍCULAS INCIDENTES.

(iv) AS ONDAS ESPALHADAS POR PARTÍCULAS ALVO DISTINTAS <u>NÃO</u> INTERFEREM COERENTEMENTE. PODEMOS CONSIDERAR O ESPALHAMENTO <u>APENAS</u> ENTRE UMA PARTÍCULA INCIDENTE E UMA PARTÍCULA ALVO.

(v) POTENCIAL DE INTERAÇÃO ENTRE AS PARTÍCULAS SÓ DEPENDE DA POSIÇÃO RELATIVA ENTRE ELAS: $V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$

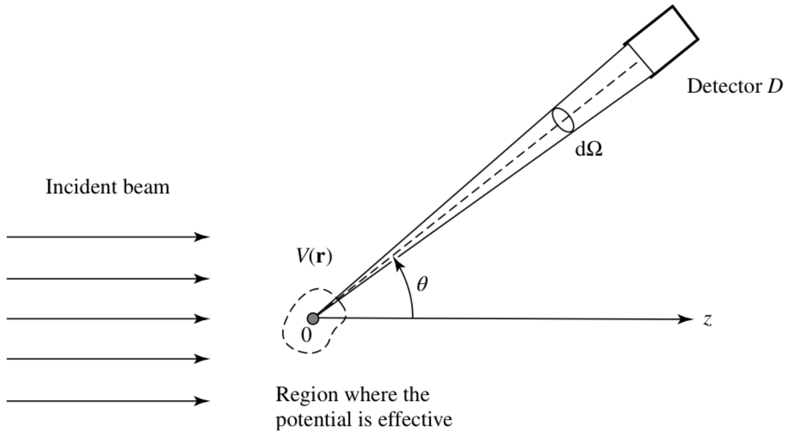
O PROBLEMA DE ESPALHAMENTO ENTRE UMA PARTÍCULA INCIDENTE E UMA PARTÍCULA ALVO É UM CASO DE UM PROBLEMA DE DOIS CORPOS. PORTANTO, PODEMOS SEPARAR A DINÂMICA DO MOVIMENTO DO CENTRO DE MASSA DAQUELA DA COORDENADA RELATIVA.

O PROBLEMA DA COORDENADA RELATIVA $\vec{r}$ É REGIDO POR:

$$H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2\mu} + V(\vec{r}) \qquad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

ONDE $\vec{p}$ É O MOMENTO RELATIVO.

SEÇÃO DE CHOQUE DE ESPALHAMENTO



VAMOS DEFINIR A SEÇÃO DE CHOQUE, A QUANTIDADE USUALMENTE MEDIDA NOS EXPERIMENTOS. CONSIDERE A FIGURA ACIMA. A DIREÇÃO DO FEIXE INCIDENTE É $\hat{z}$ E O ALVO ESTÁ PRÓXIMO À ORIGEM.

SEJA F_i A INTENSIDADE DO FEIXE INCIDENTE

$$F_i = \frac{\text{NÚMERO DE PARTÍCULAS INCIDENTES}}{\text{UNIDADE DE TEMPO . UNIDADE DE ÁREA}}$$

O DETECTOR É COLOCADO BEM LONGE DO ALVO NUMA DIREÇÃO DETERMINADA POR ÂNGULOS (θ, ϕ) ESFÉRICOS. SUA ABERTURA SUBENTENDE UM ÂNGULO ESFÉRICO $d\Omega$ (VER FIGURA)

O ÂNGULO SÓLIDO É DADO POR

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2}$$

ONDE dS É A ÁREA DA ABERTURA E r É A DISTÂNCIA DO DETECTOR AO ALVO.

SEJA AGORA dn O NÚMERO DE PARTÍCULAS DETECTADO POR UNIDADE DE TEMPO.
SE HOUVER APENAS UMA PARTÍCULA NA FRENTE DO FEIXE, DEFINIMOS A SEÇÃO DE CHOQUE DIFERENCIAL DE ESPALHAMENTO:

$$\sigma(\theta,\phi) = \frac{dn}{F_i \, d\Omega}$$

SE HOUVER N_T PARTÍCULAS ALVO NO CAMINHO DO FEIXE, DEVEMOS TAMBÉM DIVIDIR POR N_T:

$$\sigma(\theta,\phi) = \frac{dn}{F_i \, N_T \, d\Omega}$$

NOTE AS DIMENSÕES: $[dn] = \frac{1}{T}$; $[F_i] = \frac{1}{L^2 T}$
$[N_T] = [d\Omega] = 1$

PORTANTO $\sigma(\theta,\phi)$ TEM DIMENSÃO DE ÁREA

A SEÇÃO DE CHOQUE TOTAL É:

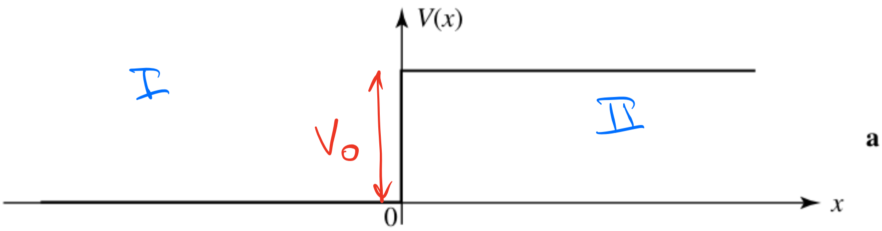
$$\sigma = \int \sigma(\theta,\phi)\, d\Omega = \int \sigma(\theta,\phi) \sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

UMA UNIDADE DE ÁREA COMUMENTE UTILIZADA PARA SEÇÕES DE CHOQUE É:

$$1 \text{ barn} = 1\,\text{b} = 10^{-24}\,\text{cm}^2 = 10^{-6}\,\text{Å}^2$$

ESTADOS ESTACIONÁRIOS DE ESPALHAMENTO

ANTES DE EMBARCARMOS NO CÁLCULO DAS PROPRIEDADES DO ESPALHAMENTO, VAMOS VOLTAR AOS RESULTADOS EM 1D. VAMOS CONSIDERAR O PROBLEMA DO POTENCIAL DEGRAU PARA $E > V_0$



OS ESTADOS ESTACIONÁRIOS OBTIDOS DE

$$H\psi(x) = E\psi(x)$$

PARA ESSE PROBLEMA NÃO SÃO DE QUADRADO INTEGRÁVEL. NA VERDADE, ESTUDAMOS ESTADOS TAIS QUE:

REGIÃO I: $\psi_k(x) = A_1 e^{ikx} + A_1' e^{-ikx}$ $(x<0)$

REGIÃO II: $\psi_k(x) = A_3 e^{iqx}$ $(x>0)$

ONDE $k = \dfrac{\sqrt{2\mu E}}{\hbar}$; $k_0 = \dfrac{\sqrt{2\mu V_0}}{\hbar}$; $q = \sqrt{k^2 - k_0^2}$

ARGUMENTAMOS FISICAMENTE QUE ESSE ESTADO REPRESENTA UMA ONDA INCIDENTE PELA ESQUERDA ($A_1 e^{ikx}$), UMA ONDA REFLETIDA ($A_1' e^{-ikx}$) E UMA ONDA TRANSMITIDA ($A_3 e^{iqx}$).

NA VERDADE, NO ENTANTO, UMA DESCRIÇÃO DE ESPALHAMENTO PELO POTENCIAL CORRESPONDE A TOMARMOS UM PACOTE DE ONDAS CONSTRUÍDO POR SUPERPOSIÇÃO DOS ESTADOS ESTACIONÁRIOS $\psi_k(x)$. SE EM $t=0$:

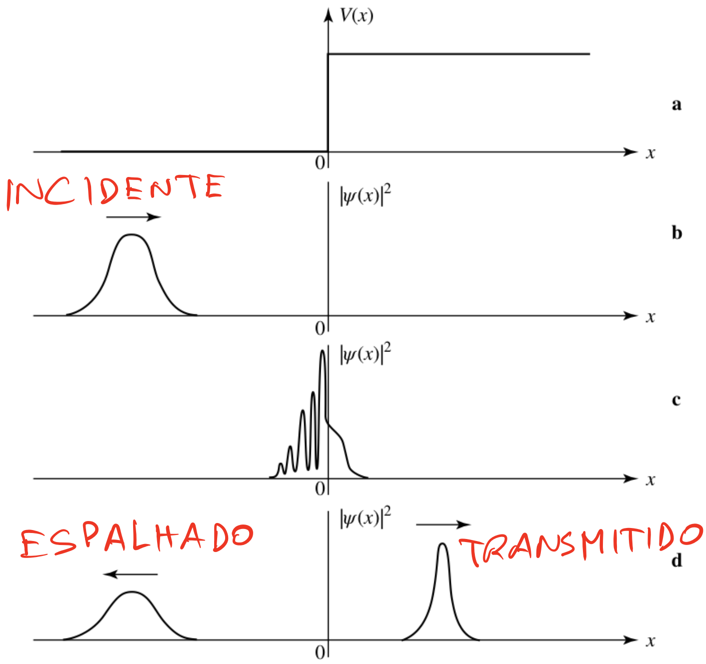
$$\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk\, g(k)\, \psi_k(x)$$

O ESTADO EVOLUI NO TEMPO SEGUNDO A DINÂMICA DE SCHRÖDINGER HABITUAL :

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk\, g(k)\, \psi_k(x)\, e^{-iE_k t/\hbar}$$

ONDE $E_k = \dfrac{\hbar^2 k^2}{2\mu}$

$g(k)$ DEVE SER ESCOLHIDA DE MODO A GERAR UM PACOTE LOCALIZADO NUMA REGIÃO EM $x<0$ EM $t=0$ COMO NA FIGURA b ABAIXO



COMO MOSTRADO NO COMPLEMENTO J_I DO LIVRO, A EVOLUÇÃO TEMPORAL DO PACOTE PARA $t>0$ É MOSTRADA NAS FIGURAS <u>c</u> E <u>d</u> ACIMA. NO MOMENTO DA FIGURA <u>c</u>, O PACOTE INCIDE NO DEGRAU E É DEFORMADO DE MANEIRA COMPLEXA. MAS, PARA INSTANTES POSTERIORES, COMO NA FIGURA <u>d</u>, O PACOTE SE DIVIDE EM 2: UMA PARTE É TRANSMITIDA $(x>0)$ E OUTRA PARTE É REFLETIDA $(x<0)$. A PARTE REFLETIDA CORRESPONDE À PARTÍCULA SENDO ESPALHADA PELO POTENCIAL. EM <u>1D</u>, ESSA É A ÚNICA PARTE ESPALHADA. EM <u>3D</u> A FÍSICA É MAIS RICA, COMO VEREMOS.

ASSIM, O USO DE ESTADOS ESTACIONÁRIOS DE ESPALHAMENTO NOS DÁ AS INFORMAÇÕES QUE QUEREMOS, COMO O COEFICIENTE DE REFLEXÃO:

$$R = \left| \frac{A_1'}{A_1} \right|$$

QUE EM 1D FAZ O PAPEL DA SEÇÃO DE CHOQUE DE ESPALHAMENTO.

VAMOS MOSTRAR QUE HÁ UM PROCEDIMENTO ANÁLOGO EM $D>1$: PODEMOS PROCURAR ESTADOS ESTACIONÁRIOS DE ESPALHAMENTO (COM CONDIÇÕES DE CONTORNO ADEQUADAS), QUE CONTÉM AS INFORMAÇÕE DE QUE PRECISAMOS (COMO A SEÇÃO DE CHOQUE). PODE-SE CONSTRUIR COM ESSES ESTADOS, PACOTES DE ONDAS QUE CORRESPONDEM EXATAMENTE À SITUAÇÃO FÍSICA DE UM EXPERIMENTO DE ESPALHAMENTO.

ESTADOS ESTACIONÁRIOS DE ESPALHAMENTO EM D>1

OS ESTADOS ESTACIONÁRIOS QUE PROCURAMOS SÃO SOLUÇÕES (DE QUADRADO NÃO INTEGRÁVEL) DA EQ. DE SCHRÖDINGER IND. DO TEMPO:

$$H\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r})$$

ONDE: $H = H_0 + V(\vec{r}) = \dfrac{\vec{P}^2}{2\mu} + V(\vec{r})$

VAMOS ASSUMIR QUE $V(\vec{r})$ DECAI MAIS RÁPIDO QUE $\dfrac{1}{r}$ QUANDO $r \to \infty$. O CASO COULOMBIANO REQUER UM TRATAMENTO ESPECIAL. TAMBÉM VAMOS SUPOR $E>0$, QUE CORRESPONDE AO SETOR CONTÍNUO DO ESPECTRO SE $V(\vec{r})<0$. PODEMOS DEFINIR A ENERGIA COMO SENDO

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} \quad (= \text{ENERGIA CINÉTICA QUANDO } r \to \infty)$$

POR CONVENIÊNCIA: $V(\vec{r}) = \dfrac{\hbar^2}{2\mu} U(\vec{r})$

TAL QUE:

$$H\psi(\vec{r}) = \left[-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2\mu} + V(\vec{r})\right]\psi(\vec{r}) = E\,\psi(\vec{r}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu}\psi(\vec{r})$$

$$\Rightarrow \boxed{\left[\nabla^2 + k^2 - U(\vec{r})\right]\psi(\vec{r}) = 0}$$

PRECISAMOS AGORA ESPECIFICAR AS CONDIÇÕES DE CONTORNO A SEREM SATISFEITAS POR $\psi(\vec{r})$.

CONDIÇÕES DE CONTORNO

POR ANALOGIA COM O CASO <u>1D</u>, ESPERAMOS QUE AS CONDIÇÕES DE CONTORNO SEJAM TAIS QUE, FORA DO ALCANCE DO POTENCIAL, A FUNÇÃO DE ONDA TENHA:

(i) UMA PARTE INCIDENTE
(ii) UMA PARTE TRANSMITIDA
(iii) UMA PARTE ESPALHADA

AS DUAS PRIMEIRAS PARTES SÃO IDÊNTICAS: SE A PARTÍCULA INCIDE AO LONGO DO EIXO z DA ESQUERDA PARA A DIREITA

$$\psi_i(\vec{r}) = A e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = A e^{ikz} \quad (\vec{k} = k\hat{z})$$

NOTE QUE $\psi_i(\vec{r})$ RESOLVE $H\psi = E\psi$ NA REGIÃO FORA DO ALCANCE DO POTENCIAL $V(\vec{r})=0$: $[\nabla^2+k^2]\psi_i(\vec{r})=0$

A PARTE ESPALHADA É MENOS TRIVIAL. FISICAMENTE, ESPERAMOS QUE A PARTÍCULA POSSA SER ESPALHADA EM QUALQUER DIREÇÃO (θ,ϕ). UMA POSSIBILIDADE É QUE UMA ONDA RADIAL

$$[\nabla^2+k^2]\frac{e^{ikr}}{r} = \left[\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(r\ )+k^2\right]\frac{e^{ikr}}{r}$$

$$= \left[\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(e^{ikr}) + k^2\frac{e^{ikr}}{r}\right] = 0$$

DE MANEIRA MAIS GERAL, UMA SOLUÇÃO DA FORMA:

$$\psi_s(\vec{r}) \sim f(\theta,\phi)\frac{e^{ikr}}{r}$$

É TAL QUE: $[\nabla^2+k^2]\psi_s(\vec{r}) = [\nabla^2+k^2]f(\theta,\phi)\frac{e^{ikr}}{r}$

$$= \frac{e^{ikr}}{r}\left[\frac{L^2}{\hbar^2 r^2}\right]f(\theta,\phi) \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$$

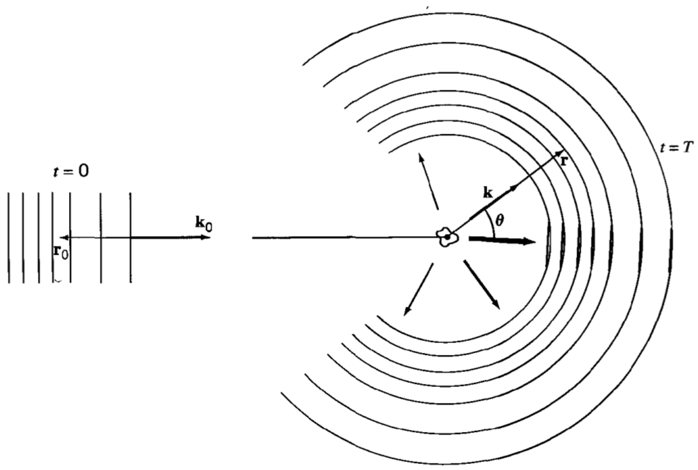
ONDE L^2 É O MÓDULO QUADRADO DO MOMENTO ANGULAR (VER O LAPLACIANO NO CAP. 7).

$f(\theta,\phi)$ = AMPLITUDE DE ESPALHAMENTO

PORTANTO, POSTULAMOS O SEGUINTE COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DOS ESTADOS ESTACIONÁRIOS:

$$\boxed{\psi_{\vec{k}}^{(+)}(\vec{r}) = A\left[e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + f(\theta,\phi)\frac{e^{ikr}}{r}\right] \quad (r\to\infty)}$$

A FIGURA ABAIXO ILUSTRA ESSE COMPORTAMENTO:



PACOTES DE ONDAS CONSTRUÍDOS COM ESSAS AUTO-FUNÇÕES SE COMPORTAM COMO NA FIGURA ABAIXO: