# CÁLCULO DA SEÇÃO DE CHOQUE

O CÁLCULO DA SEÇÃO DE CHOQUE É ANÁLOGO AO QUE FOI FEITO EM 1D: É PRECISO ANALIZAR AS CORRENTES DE PROBABILIDADE. VIMOS QUE A PROBABILIDADE DE ENCONTRAR A PARTÍCULA EM ALGUM PONTO NO ESPAÇO É CONSERVADA LOCALMENTE, OU SEJA, SATISFAZ:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \; ; \qquad \rho(\vec{r},t) = |\psi(\vec{r},t)|^2$$

$$\vec{J}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[\psi^*(\vec{r},t)\left(\frac{\hbar\vec{\nabla}}{i\mu}\right)\psi(\vec{r},t)\right]$$

$\vec{J}(\vec{r},t)$ TEM A INTERPRETAÇÃO DE CORRENTE DE PROBABILIDADE, OU SEJA, "QUANTIDADE DE PROBABILIDADE" POR UNIDADE DE TEMPO POR UNIDADE DE ÁREA TRANSVERSAL À DIREÇÃO DE $\vec{J}$.
ASSIM, PARA A PARTE INCIDENTE:

$$\vec{J}_i = \frac{\hbar\vec{k}}{\mu} \Rightarrow |\vec{J}_i| = \frac{\hbar k}{\mu}$$

PARA A PARTE ESPALHADA, PRECISAMOS UTILIZAR $\vec{\nabla}$ EM COORDENADAS ESFÉRICAS.

$$\vec{\nabla} = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\phi}}{r \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

PORTANTO, APLICANDO EM $f(\theta,\phi)\frac{e^{ikr}}{r}$ :

$$J_{sr} = \frac{\hbar}{\mu} Re\left[f^* \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{f}{i} \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\right]$$

$$= \frac{\hbar}{\mu} Re\left[|f|^2\left(\frac{k}{r^2} + \frac{i}{r^3}\right)\right] = \frac{\hbar k}{\mu r^2}|f(\theta,\phi)|^2$$

$$J_{s\theta} = \frac{\hbar}{\mu} Re\left[f^* \frac{e^{-ikr}}{r^2} \frac{e^{ikr}}{ir} \frac{\partial f}{\partial \theta}\right]$$

$$= \frac{\hbar}{\mu r^3} Re\left[\frac{f^*}{i}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right]$$

$$J_{s\phi} = \frac{\hbar}{\mu} Re\left[f^* \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{e^{ikr}}{ir^2 \sin\theta} \frac{\partial f}{\partial \phi}\right]$$

$$= \frac{\hbar}{\mu r^3 \sin\theta} Re\left[\frac{f^*}{i}\frac{\partial f}{\partial \phi}\right]$$

QUANDO $r \to \infty$, $J_{s\theta}, J_{s\phi} \ll J_{sr}$

$$\vec{J}_s \simeq J_{sr}\hat{r} = \frac{\hbar k}{\mu r^2}|f(\theta,\phi)|^2 \hat{r}$$

DA DEFINIÇÃO DA SEÇÃO DE CHOQUE DIFE-RENCIAL:

$$\sigma(\theta,\phi) = \frac{dn}{F_i \, d\Omega}$$

E DE:

$$F_i = |\vec{J}_i| = \frac{\hbar k}{\mu}$$

$$dn = \vec{J}_s \cdot \hat{r} \, dS = \vec{J}_s \cdot \hat{r} \, r^2 d\Omega$$

$$dn = \frac{\hbar k}{\mu} |f(\theta,\phi)|^2 d\Omega$$

DONDE OBTEMOS:

$$\boxed{\sigma(\theta,\phi) = |f(\theta,\phi)|^2}$$

PORTANTO, A SEÇÃO DE CHOQUE PODE SER OBTIDA DIRETAMENTE DA AMPLITUDE DE ESPALHAMENTO.

TUDO QUE PRECISAMOS É OBTER AS SOLUÇÕES DA E.S.I.T. SUJEITAS ÀS CONDIÇÕES DE CONTORNO ESPECIFICADAS

# EQUAÇÃO INTEGRAL DE LIPPMANN-SCHWINGER

O PROBLEMA QUE QUEREMOS RESOLVER É A EQUAÇÃO DIFERENCIAL:

$$\left[\nabla^2 + k^2 - U(\vec{r})\right] \psi_{\vec{k}}^{(+)}(\vec{r}) = 0 \quad (1)$$

SUJEITA À CONDIÇÃO DE CONTORNO:

$$\psi_{\vec{k}}^{(+)}(\vec{r}) = A\left[e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + f(\theta,\phi)\frac{e^{ikr}}{r}\right] \quad (r \to \infty) \quad (2)$$

EXISTE UMA MANEIRA DE "CONDENSAR" ESSAS DUAS CONDIÇÕES EM UMA SÓ! SEJA A SEGUINTE DEFINIÇÃO DA CHAMADA FUNÇÃO DE GREEN:

$$\left[\nabla^2 + k^2\right] G(\vec{r}) = \delta^{(3)}(\vec{r})$$

ONDE $\delta^{(3)}(\vec{r})$ É FUNÇÃO DELTA DE DIRAC EM 3 DIMENSÕES. SE $\varphi_0(\vec{r})$ É UMA SOLUÇÃO DE:

$$\left[\nabla^2 + k^2\right] \varphi_0(\vec{r}) = 0$$

SEGUE QUE, SE $\psi(\vec{r})$ FOR SOLUÇÃO DA SEGUINTE EQUAÇÃO INTEGRAL:

$$\psi(\vec{r}) = \varphi_0(\vec{r}) + \int d^3r' \, G(\vec{r}-\vec{r}\,') \, U(\vec{r}\,') \, \psi(\vec{r}\,') \qquad (3)$$

ENTÃO $\psi(\vec{r})$ SATISFAZ A EQUAÇÃO (1). DE FATO, TOMANDO $[\nabla^2 + k^2]$ DA EQUAÇÃO ACIMA:

$$[\nabla^2 + k^2]\psi(\vec{r}) = [\nabla^2 + k^2]\int d^3r' \, G(\vec{r}-\vec{r}\,') \, U(\vec{r}\,') \, \psi(\vec{r}\,')$$

TROCANDO A ORDEM DA INTEGRAÇÃO E DA APLICAÇÃO DE $[\nabla^2 + k^2]$

$$= \int d^3r' \left\{ [\nabla^2 + k^2] G(\vec{r}-\vec{r}\,') \right\} U(\vec{r}\,') \, \psi(\vec{r}\,')$$

MAS $[\nabla^2 + k^2] G(\vec{r}-\vec{r}\,') = \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}\,')$ E

$$= \int d^3r' \, \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}\,') \, U(\vec{r}\,') \, \psi(\vec{r}\,') = U(\vec{r}) \, \psi(\vec{r})$$

$$\Rightarrow [\nabla^2 + k^2 - U(\vec{r})]\psi(\vec{r}) = 0 \qquad (\text{Q.E.D.})$$

ALÉM DISSO, QUALQUER $\psi(\vec{r})$ QUE SATISFAZ (1) TAMBÉM SATISFAZ (3).

ESCOLHENDO CUIDADOSAMENTE $\varphi_0(\vec{r})$ E $G(\vec{r})$, PODEMOS FAZER COM QUE A SOLUÇÃO DE (3) TENHA AUTOMATICAMENTE O COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DADO EM (2).

VAMOS CONSIDERAR PRIMEIRAMENTE A FUNÇÃO DE GREEN $G(\vec{r})$. SE $\vec{r} \neq 0$, O LADO DIREITO DA EQUAÇÃO PARA $G(\vec{r})$ É ZERO:

$$\left[\nabla^2 + k^2\right] G(\vec{r}) = 0 \qquad (\vec{r} \neq 0)$$

DUAS SOLUÇÕES POSSÍVEIS COM SIMETRIA ESFÉRICA SÃO:

$$G^{(\pm)}(\vec{r}) \sim \frac{e^{\pm ikr}}{r}$$

AS SOLUÇÕES COMPLETAS SÃO:

$$G^{(\pm)}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{\pm ikr}}{r}$$ (VER PROVA MAIS ADIANTE)

OLHANDO AGORA AS EQS. (2-3), É SUGESTIVO ESCOLHER:

$$\varphi_0(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$$G^{(+)}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r}$$

E TEMOS:

$$\psi_{\vec{k}}^{(+)}(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \int d^3r' \, G^{(+)}(\vec{r}-\vec{r}\,')\, U(\vec{r}\,')\, \psi_{\vec{k}}^{(+)}(\vec{r}\,')$$

$$\psi_{\vec{k}}^{(+)}(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - \int \frac{d^3r'}{4\pi} \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} U(\vec{r}\,')\, \psi_{\vec{k}}^{(+)}(\vec{r}\,') \quad (4)$$

ESSA É A CHAMADA EQUAÇÃO INTEGRAL DE ESPALHAMENTO DE LIPPMANN-SCHWINGER.

É FÁCIL MOSTRAR QUE ELA LEVA AO COMPORTAMENTO DA EQ. (2). SUPONHA QUE O ALCANCE DE $V(\vec{r})$ SEJA $L$:

$$V(\vec{r}) \simeq 0 \qquad |\vec{r}| \gg L$$

A REGIÃO DE INTEGRAÇÃO DA VARIÁVEL $\vec{r}\,'$ EM (4) TEM DIMENSÃO LINEAR $L$:

$$|\vec{r}\,'| \lesssim L$$

SE $|\vec{r}| \gg L$ (COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO)

$$|\vec{r}-\vec{r}\,'| = \left[r^2 + r'^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{r}\,'\right]^{1/2} = r\left[1 + \frac{r'^2}{r^2} - 2\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^2}\right]^{1/2}$$

$$\simeq r\left[1 - \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^2}\right] = r - \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r} = r - \hat{r}\cdot\vec{r}\,'$$

ASSIM:

$$\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \cong \frac{e^{ikr}}{r}\, e^{-ik\hat{r}\cdot\vec{r}\,'}$$

LOGO, DE (4),

$$\psi^{(+)}_{\vec{k}}(\vec{r}) \xrightarrow[r\to\infty]{} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - \frac{e^{ikr}}{4\pi r}\left[\int d^3r'\, e^{-ik\hat{r}\cdot\vec{r}\,'}\, U(\vec{r}\,')\,\psi^{(+)}_{\vec{k}}(\vec{r}\,')\right]$$

O TERMO ENTRE COLCHETES SÓ DEPENDE DOS ÂNGULOS $(\theta,\phi)$, ATRAVÉS DE $\hat{r}$, MAS NÃO DEPENDE DE $r$. PORTANTO, DEFININDO:

$$\boxed{f_{\vec{k}}(\theta,\phi) = -\frac{1}{4\pi}\int d^3r'\, e^{-ik\hat{r}\cdot\vec{r}\,'}\, U(\vec{r}\,')\,\psi^{(+)}_{\vec{k}}(\vec{r}\,')} \quad (5)$$

TEMOS:

$$\psi^{(+)}_{\vec{k}}(\vec{r}) \xrightarrow[r\to\infty]{} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + f_{\vec{k}}(\theta,\phi)\,\frac{e^{ikr}}{r}$$

COMO HAVÍAMOS ANTECIPADO.

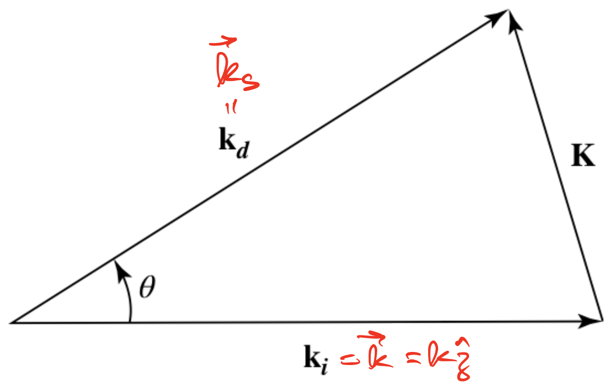
A EXPRESSÃO (5) PERMITE OBTER $f_{\vec{k}}(\theta,\phi)$ E A SEÇÃO DE CHOQUE, UMA VEZ OBTIDA A SOLUÇÃO DE (4).

É CONVENIENTE DEFINIR O VETOR DE ONDA ESPALHADO:

$$\vec{k}_s = k\,\hat{n}$$

O VETOR DE ONDA DE ESPALHAMENTO $\vec{K}$ (OU DE TRANSFERÊNCIA) É:

$$\vec{K} = \vec{k}_s - \vec{k} = k\,\hat{n} - k\,\hat{z}$$



# DEMONSTRAÇÃO DA FORMA DA FUNÇÃO DE GREEN

QUEREMOS RESOLVER:

$$[\nabla^2 + k^2]\, G(\vec{r}) = \delta^{(3)}(\vec{r})$$

USAREMOS O MÉTODO DAS TRANSFORMADAS DE FOURIER. DEFINIMOS:

$$G(\vec{r}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\, e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}\, \bar{G}(\vec{q})$$

COMO: (VER DISCIPLINA DE F689)

$$\delta(x) = \int \frac{dq}{(2\pi)}\, e^{iqx}$$

ENTÃO: $\delta^{(3)}(\vec{r}) \equiv \delta(x)\delta(y)\delta(z)$

$$\Rightarrow \delta^{(3)}(\vec{r}) = \int \frac{dq_x\, dq_y\, dq_z}{(2\pi)^3}\, e^{i(q_x x + q_y y + q_z z)}$$

$$= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\, e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}$$

$$[\nabla^2+k^2]G(\vec{r})=\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\,\overline{G}(\vec{q})\,[\nabla^2+k^2]\,e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}$$

$$=\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\,\overline{G}(\vec{q})\,[k^2-q^2]\,e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}$$

$$=\delta^{(3)}(\vec{r})=\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\,e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}$$

OU SEJA, IGUALANDO OS COEFICIENTES DE $e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}$

$$\overline{G}(\vec{q})(k^2-q^2)=1 \Rightarrow \boxed{\overline{G}(\vec{q})=\frac{1}{k^2-q^2}}$$

PORTANTO:

$$G(\vec{r})=\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\,\frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}}{k^2-q^2}$$

USANDO COORDENADAS ESFÉRICAS PARA $\vec{q}$, COM O EIXO $z$ AO LONGO DO VETOR FIXO $\vec{r}$

$$\vec{q}\cdot\vec{r}=qr\cos\theta \;;\; d^3q=q^2\sin\theta\, dq\, d\theta\, d\phi$$

$$G(\vec{r})=\int \frac{q^2\sin\theta\, dq\, d\theta\, d\phi}{(2\pi)^3}\,\frac{e^{iqr\cos\theta}}{k^2-q^2}$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{q^2\,dq}{k^2-q^2}\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta\, d\theta}{(2\pi)^2}\,e^{iqr\cos\theta}$$

TROCANDO VARIÁVEIS PARA $\mu = \cos\theta$ NA INTEGRAL ANGULAR:

$$\int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \, e^{iqr\cos\theta} = \int_{-1}^{+1} d\mu \, e^{iqr\mu} = \frac{1}{iqr}\left(e^{iqr} - e^{-iqr}\right)$$

PORTANTO:

$$G(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi^2 r} \int_0^{\infty} \frac{q\,dq}{k^2 - q^2} \frac{\left(e^{iqr} - e^{-iqr}\right)}{i}$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 r}\left[\int_0^{\infty} \frac{q\,dq}{k^2-q^2}\frac{e^{iqr}}{i} - \int_0^{\infty} \frac{q\,dq}{k^2-q^2} e^{-iqr}\right]$$

FAZENDO $q \to -q$ NA SEGUNDA INTEGRAL:

$$G(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi^2 i r}\left[\int_0^{\infty} \frac{q\,dq\,e^{iqr}}{k^2-q^2} + \int_{-\infty}^{0} \frac{q\,dq\,e^{iqr}}{k^2-q^2}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 i r} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q\,dq\,e^{iqr}}{k^2-q^2}$$

$$= \frac{(-1)}{4\pi^2 i r} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q\,dq\,e^{iqr}}{(q-k)(q+k)}$$

NOTA-SE QUE A INTEGRAL É MAL DEFINIDA POIS HÁ DOIS POLOS NO CAMINHO DE INTEGRAÇÃO: $q = k$, $q = -k$

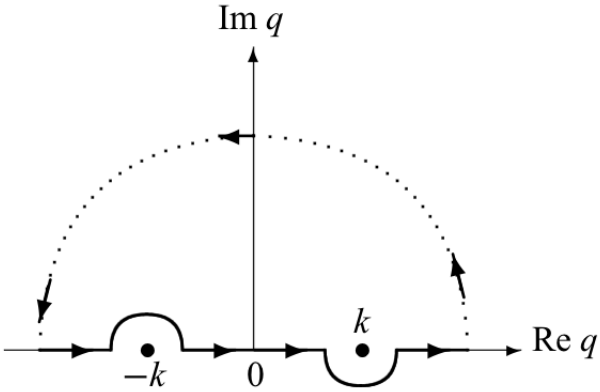
ISSO NÃO DEVERIA SURPREENDER, POIS VIMOS QUE HÁ VÁRIAS SOLUÇÕES PARA $G(\vec{x})$, QUE DIFEREM NO SEU COMPORTAMENTO QUANDO $|\vec{x}| \to \infty$. VAMOS ESCOLHER NESSE MOMENTO, DESLOCAR OS POLOS DO EIXO REAL, DANDO UMA PEQUENA PARTE IMAGINÁRIA POSITIVA $i\eta$ $(\eta>0)$ PARA O POLO EM $q=k$ E UMA PEQUENA PARTE IMAGINÁRIA NEGATIVA $-i\eta$ PARA O POLO EM $q=-k$:

$$q-k \longrightarrow q-(k+i\eta) = q-k-i\eta$$

$$q+k \longrightarrow q+(k+i\eta) = q+k+i\eta$$

O CAMINHO DE INTEGRAÇÃO É DEFORMÁVEL NO CAMINHO ABAIXO NO PLANO DE $q$ COMPLEXO.

$k \to k+i\eta$



COM ISSO:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q\,dq\,e^{iqr}}{(q-k-i\eta)(q+k+i\eta)}$$

PODEMOS AGORA "COMPLETAR" O CAMINHO DE INTEGRAÇÃO COM O SEMI-CÍRCULO DE RAIO $R$ NO SEMI-PLANO SUPERIOR (PONTILHADO NA FIGURA), TOMANDO $R\to\infty$.
MAS A INTEGRAL NO SEMI-CÍRCULO SE ANULA POIS, PARA $q\in\mathbb{C}$ AO LONGO DO CAMINHO:

$$q = Re^{i\phi} \qquad \phi\in[0,\pi]$$

$$\Rightarrow e^{iqr} = e^{irRe^{i\phi}} = e^{irR\cos\phi}\, e^{-rR\sin\phi}$$

ONDE $\sin\phi > 0$. PORTANTO, PARA $R\gg 1$, O INTEGRANDO É:

$$\frac{q e^{iqr}}{(q-k-i\eta)(q+k+i\eta)} \xrightarrow[R\to\infty]{} \frac{e^{irR\cos\phi}\, e^{-rR\sin\phi}}{Re^{i\phi}}$$

CUJO MÓDULO DECAI EXPONENCIALMENTE

$$\sim \frac{e^{-aR}}{R}$$

NOTE QUE O CAMINHO DE INTEGRAÇÃO É $\sim \pi R$, QUE CANCELA O $\frac{1}{R}$ DO INTEGRANDO, MAS A INTEGRAL DECAI EXPONENCIALMENTE A ZERO. PORTANTO, FICAMOS COM:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q\,dq\,e^{iqr}}{(q-k-i\eta)(q+k+i\eta)} = \oint \frac{q\,dq\,e^{iqr}}{(q-k-i\eta)(q+k+i\eta)} =$$

A INTEGRAL DA DIREITA PODE SER CALCULADA PELO MÉTODO DOS RESÍDUOS.
O ÚNICO POLO NO INTERIOR DO CIRCUITO DE INTEGRAÇÃO É O POLO SIMPLES EM $q = k + i\eta$:

$$= (2\pi i)\, \frac{\cancel{(k+i\eta)}}{2\cancel{(k+i\eta)}}\, e^{ir(k+i\eta)} = \pi i\, e^{ikr}$$

ONDE TOMAMOS $\eta \to 0^+$ NO ÚLTIMO PASSO.
ASSIM:

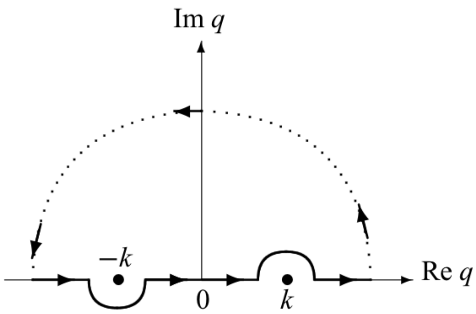
$$G(\vec{r}) = \frac{-1}{4\pi^2 i r} \times \pi i\, e^{ikr} = -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r} = G^{(+)}(\vec{r})$$

QUE É O RESULTADO ANTERIOR QUE TÍNHAMOS ENCONTRADO $G^{(+)}(\vec{r})$

ESSA FUNÇÃO DE GREEN TEM O COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DESEJADO.
OUTRAS PRESCRIÇÕES DE COMO LIDAR COM OS POLOS LEVAM A COMPORTAMENTOS ASSINTÓTICOS DISTINTOS. POR EXEMPLO, SE FIZERMOS

$$k \to k - i\eta$$

CORRESPONDENTE AO CAMINHO ABAIXO:




OBTEMOS:

$$G^{(-)}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{-ikr}}{r}$$

SE TOMARMOS O VALOR PRINCIPAL DA INTEGRAL, OBTEMOS:

$$G_P(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi}\frac{\cos kr}{r}$$ E ASSIM POR DIANTE.