A SÉRIE E A APROXIMAÇÃO DE BORN

A EQ. DE LIPPMANN-SCHWINGER É BASTANTE DIFÍCIL DE SER RESOLVIDA. ABORDAGENS APROXIMADAS SÃO IMPORTANTES. UMA DELAS É FAZER UMA EXPANSÃO EM UMA SÉRIE DE POTÊNCIAS DO POTENCIAL $V(\vec{r})$. SE O POTENCIAL FOR "FRACO", EM ALGUM SENTIDO, OS PRIMEIROS TERMOS DA SÉRIE PODEM SER SUFICIENTES. SEJA:

$$\psi^{(+)}_{\vec{k}}(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \int d^3r'\, G^{(+)}(\vec{r}-\vec{r}\,')\, U(\vec{r}\,')\, \psi^{(+)}_{\vec{k}}(\vec{r}\,')$$

$$\equiv \psi^{(0)}_{\vec{k}}(\vec{r}) + \int d^3r'\, G^{(+)}(\vec{r},\vec{r}\,')\, U(\vec{r}\,')\, \psi^{(+)}_{\vec{k}}(\vec{r}\,')$$

EQUIVALENTEMENTE, EM NOTAÇÃO DE DIRAC

$$\langle\vec{r}|\psi^{(+)}_{\vec{k}}\rangle = \langle\vec{r}|\psi^{(0)}_{\vec{k}}\rangle + \int d^3r'\, \langle\vec{r}|G^{(+)}|\vec{r}\,'\rangle\langle\vec{r}\,'|U|\psi^{(+)}_{\vec{k}}\rangle$$

ONDE $G^{(+)}(\vec{r},\vec{r}\,')$ É VISTA COMO A REPRESENTAÇÃO DO OPERADOR $G^{(+)}$. COMO EQUAÇÃO ENTRE KETS (INDEPENDENTE DA REPRESENTAÇÃO), PODEMOS ESCREVER:

$$|\psi^{(+)}_{\vec{k}}\rangle = |\psi^{(0)}_{\vec{k}}\rangle + G^{(+)}U|\psi^{(+)}_{\vec{k}}\rangle$$ ONDE USAMOS

$$\int d^3r'\, |\vec{r}\,'\rangle\langle\vec{r}\,'| = \mathbb{1}$$

REARRANJANDO:

$$(\mathbb{1} - G^{(+)} U)\,|\psi^{(+)}_{\vec{k}}\rangle = |\psi^{(0)}_{\vec{k}}\rangle$$

$$\Rightarrow\ |\psi^{(0)}_{\vec{k}}\rangle = (\mathbb{1} - G^{(+)} U)^{-1}\,|\psi^{(0)}_{\vec{k}}\rangle$$

ONDE "RESOLVEMOS FORMALMENTE" A EQUAÇÃO EM TERMOS DO OPERADOR INVERSO DE $\mathbb{1} - G^{(+)}U$. NESSA FORMA, ESSA SOLUÇÃO NÃO É MUITO ÚTIL, MAS SE UTILIZARMOS:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

$$\Rightarrow (\mathbb{1} - G^{(+)} U)^{-1} = \mathbb{1} + G^{(+)}U + G^{(+)}UG^{(+)}U + G^{(+)}UG^{(+)}UG^{(+)}U + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} [G^{(+)}U]^n$$

$$\Rightarrow |\psi^{(+)}_{\vec{k}}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} [G^{(+)}U]^n\,|\psi^{(0)}_{\vec{k}}\rangle$$

$$= |\psi^{(0)}_{\vec{k}}\rangle + G^{(+)}U|\psi^{(0)}_{\vec{k}}\rangle + G^{(+)}UG^{(+)}U|\psi^{(0)}_{\vec{k}}\rangle + \cdots$$

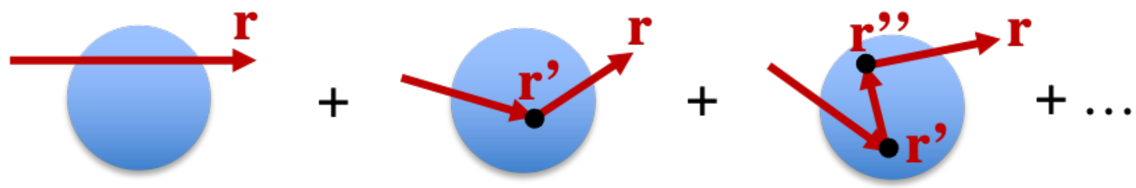
ESSA É UMA SOLUÇÃO DA EQ. DE L-S EM SÉRIE DE POTÊNCIAS DE U. ELA É CHAMADA DE SÉRIE DE BORN.

VOLTANDO PARA A REPRESENTAÇÃO $|\vec{r}\rangle$, INSERINDO AS RELAÇÕES DE FECHAMENTO APROPRIADAS:

$$\psi^{(+)}_{\vec{k}}(\vec{r}) = \psi^{(0)}_{\vec{k}}(\vec{r}) + \int d^3r'\, G(\vec{r},\vec{r}\,')\, U(\vec{r}\,')\, \psi^{(0)}_{\vec{k}}(\vec{r}\,') +$$

$$+ \int d^3r' \int d^3r''\, G(\vec{r},\vec{r}\,')\, U(\vec{r}\,')\, G(\vec{r}\,',\vec{r}\,'')\, U(\vec{r}\,'')\, \psi^{(0)}_{\vec{k}}(\vec{r}\,'') + \cdots$$

SEMPRE LEMBRANDO QUE $\psi^{(0)}_{\vec{k}}(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$, PODEMOS REPRESENTAR OS TERMOS DA SÉRIE DE BORN PICTORICAMENTE:



CADA SETA VERMELHA REPRESENTA UMA $G^{(+)}$ E CADA PONTO INTERNO À REGIÃO DO POTENCIAL (BOLA PRETA) DEVE SER INTEGRADO NA REGIÃO AZUL.

EM APLICAÇÕES PRÁTICAS, TRUNCAMOS A SÉRIE NOS PRIMEIROS TERMOS. EM ORDEM DOMINANTE:

$$\psi^{(+)}_{\vec{k}}(\vec{r}) = \psi^{(0)}_{\vec{k}}(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

ESSA PODE PARECER UMA APROXIMAÇÃO MUITO RUIM MAS, QUANDO LEVADA À AMPLITUDE DE ESPALHAMENTO:

$$f_k(\Omega) = -\frac{1}{4\pi}\int d^3r'\, e^{-ik\hat{r}\cdot\vec{r}\,'}\, U(\vec{r}\,')\, \psi_{\vec{k}}^{(+)}(\vec{r}\,')$$

$$\cong -\frac{1}{4\pi}\int d^3r'\, e^{-ik\hat{r}\cdot\vec{r}\,'}\, U(\vec{r}\,')\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}\,'}$$

$$= -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\int d^3r'\, e^{-i(k\hat{r}-\vec{k})\cdot\vec{r}\,'}\, V(\vec{r}\,')$$

NOTE QUE O VETOR DE ONDA INCIDENTE É $\vec{k} = k\hat{z}$, E O VETOR DE ONDA ESPALHADO É $k\hat{r}$. DA DEFINIÇÃO DO VETOR DE ONDA DE ESPALHAMENTO: $\vec{K} = k\hat{r} - k\hat{z} = k(\hat{r}-\hat{z})$

$$f_k^{(B)}(\Omega) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\int d^3r\, e^{-i\vec{K}\cdot\vec{r}}\, V(\vec{r})$$ 1ª ORDEM NO POTENCIAL

QUE É A TRANSFORMADA DE FOURIER DO POTENCIAL CALCULADA NO VETOR DE ONDA DE ESPALHAMENTO. ESSA É A CHAMADA APROXIMAÇÃO DE BORN PARA $f_k(\Omega)$. SEGUE QUE:

$$\sigma_k^{(B)}(\theta,\phi) = \frac{\mu^2}{4\pi^2\hbar^2}\left|\int d^3r\, e^{-i\vec{K}\cdot\vec{r}}\, V(\vec{r})\right|^2$$

VAMOS ANALISAR O CASO EM QUE O POTENCIAL É CENTRAL: $V(\vec{r}) = V(|\vec{r}|) = V(r)$

A TRANSFORMADA DE FOURIER FICA:

$$\tilde{V}(\vec{K}) = \int d^3r\, V(r)\, e^{-i\vec{K}\cdot\vec{r}} = \int_0^\infty r^2 dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta\, V(r) e^{-iKr\cos\theta}$$

ONDE TOMAMOS O EIXO $\hat{z}$ DAS COORDENADAS POLARES AO LONGO DE $\vec{K}$. A PARTE ANGULAR É

$$2\pi \int_{-1}^{+1} d\mu\, V(r)\, e^{-iKr\mu} = \frac{2\pi V(r)}{iKr}\left(e^{iKr} - e^{-iKr}\right)$$

$$= \frac{4\pi V(r)}{Kr} \sin(Kr)$$

$$\Rightarrow \tilde{V}(\vec{K}) = \frac{4\pi}{K} \int_0^\infty r \sin(Kr)\, V(r)\, dr$$

SEGUE QUE:

$$f_k^{(B)}(\Omega) = -\frac{2\mu}{\hbar^2 K} \int_0^\infty r\, V(r) \sin(Kr)\, dr$$

O MÓDULO DE $\vec{K}$ É TAL QUE:

$$K^2 = |k(\hat{r} - \hat{z})|^2 = k^2 |\hat{r} - \hat{z}|^2 = k^2 (2 - 2\,\hat{r}\cdot\hat{z})$$

$$= 2k^2(1 - \cos\theta) = 4k^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow K = 2k \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

NOTE QUE $f_k(\theta,\phi) = f_k(\theta)$ NÃO DEPENDE DE ϕ.
ISSO É CONSEQUÊNCIA DO POTENCIAL SER CENTRAL. RESUMINDO:

$$\boxed{\begin{gathered} f_k^{(B)}(\theta) = -\frac{2\mu}{\hbar^2 K} \int_0^\infty r V(r) \sin(Kr)\, dr \\ K = 2k \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{gathered}}$$

"APROXIMAÇÃO DE BORN PARA POTENCIAIS CENTRAIS"

<u>EXEMPLO</u>: POTENCIAL DE YUKAWA

$$V(r) = (V_0 a) \frac{e^{-r/a}}{r}$$

ESSE POTENCIAL DECAI MAIS RÁPIDO QUE $\frac{1}{r}$
E TEM ALCANCE <u>a</u>.

$$I = \int_0^\infty e^{-r/a} \sin(Kr)\, dr = \frac{K}{K^2 + a^{-2}}$$

$$f_k^{(B)}(\theta) = -\frac{2\mu(V_0 a)}{\hbar^2} \frac{1}{4k^2 \sin^2\theta/2 + a^{-2}}$$

$$= -\left(\frac{2\mu}{\hbar^2 k^2}\right) V_0 \frac{a}{4\sin^2\frac{\theta}{2} + (ka)^{-2}}$$

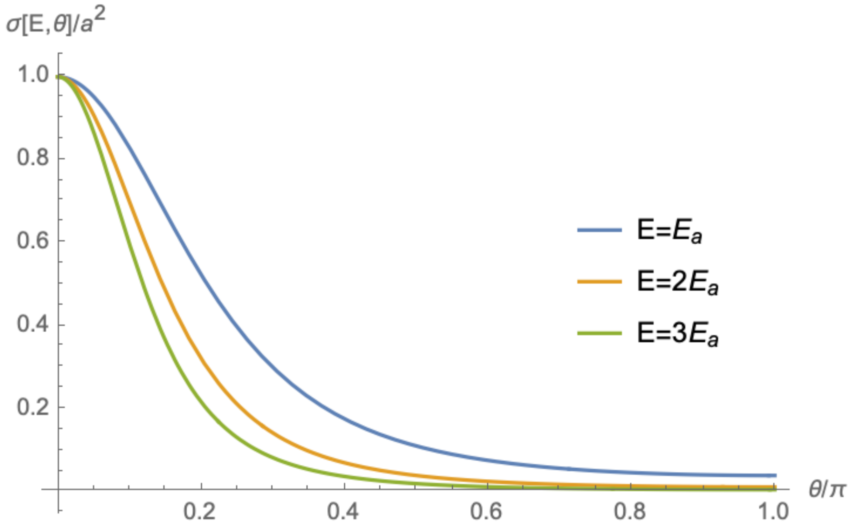
$$f_k^{(B)}(\theta) = -\left(\frac{V_0}{E}\right) \frac{a}{4\sin^2\frac{\theta}{2} + (ka)^{-2}}$$

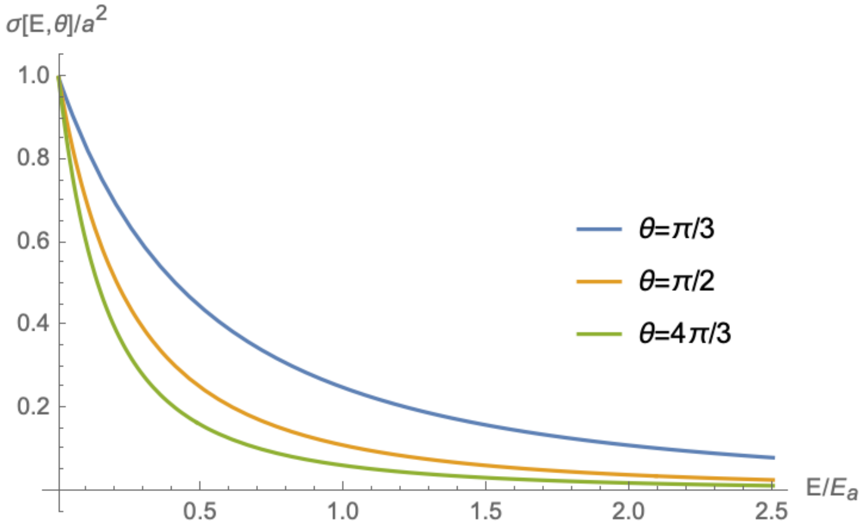
DEFININDO: $E_a = \dfrac{\hbar^2}{2\mu a^2}$

$$f_k^{(B)}(\theta) = -\left(\frac{V_0}{E}\right)\frac{a}{4\sin^2\frac{\theta}{2} + (E_a/E)}$$

$$\sigma_k^{(B)}(\theta) = \left(\frac{V_0}{E}\right)^2 \frac{a^2}{\left[(E_a/E) + 4\sin^2\theta/2\right]^2}$$

NOS PLOTS ABAIXO, $V_0 = 1$:





A SEÇÃO DE CHOQUE TOTAL É:

$$\sigma_k^{(B)} = 2\pi \int_0^{\pi} \sigma_k^{(B)}(\theta) \sin\theta \, d\theta$$

$$= 2\pi a^2 \left(\frac{V_0}{E}\right)^2 \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta \, d\theta}{[b + 4\sin^2\theta/2]^2} \qquad \left(b \equiv \frac{E_a}{E}\right)$$

$$= 2\pi a^2 \left(\frac{V_0}{E}\right)^2 \frac{2}{b(b+4)}$$

$$= 4\pi a^2 \frac{V_0^2}{E_a(4E+E_a)} = 4\pi a^2 \frac{(V_0/E_a)^2}{1+4E/E_a}$$

QUANDO $E \to \infty$: $\sigma_k^{(B)} \to \left(\frac{V_0}{E_a}\right)^2 4\pi a^2$

NO GRÁFICO ABAIXO, $V_0 = E_a$

SE TOMARMOS O POTENCIAL DE YUKAWA

$$V(r) = V_0 a \frac{e^{-r/a}}{r}$$

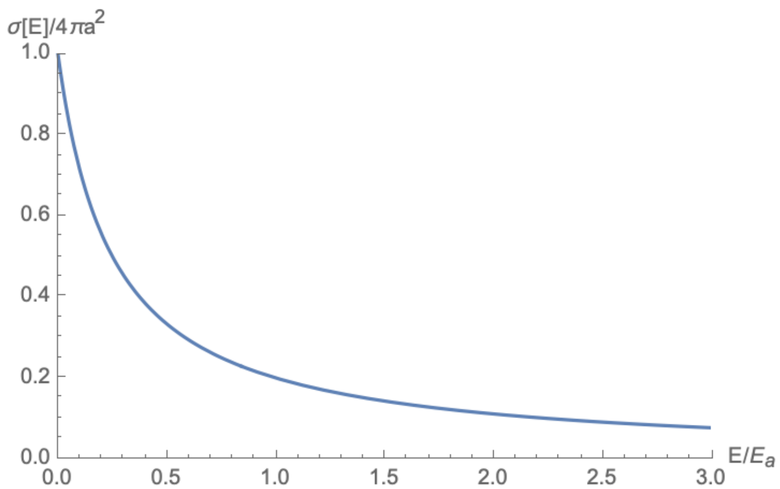
E FIZERMOS:

$a \to \infty$ E $V_0 a \to -e^2$, $V(r) \to -\frac{e^2}{r}$

QUE É O POTENCIAL COULOMBIANO. EMBORA A TEORIA NÃO VALHA PARA ESSE POTENCIAL PODE-SE VERIFICAR QUE SEÇÃO DE CHOQUE É OBTIDA:

$$\sigma^{(coul)}_{BORN}(\theta) = \frac{e^4}{16E^2}\frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}$$

QUE É IDÊNTICO AO RESULTADO EXATO (!) E TAMBÉM AO RESULTADO DA MECÂNICA CLÁSSICA!



VALIDADE DA APROXIMAÇÃO DE BORN

PODEMOS ESTIMAR A REGIÃO DE VALIDADE DA APROXIMAÇÃO DE BORN, EXIGINDO QUE O 2º TERMO DA APROXIMAÇÃO SEJA MUITO MENOR QUE O 1º. ASSIM:

$$\left| \int d^3r' \, G(\vec{r},\vec{r}\,') U(\vec{r}\,') \psi_{\vec{k}}^{(0)}(\vec{r}\,') \right| \ll |\psi_{\vec{k}}^{(0)}(\vec{r}\,')|$$

USANDO $\psi_{\vec{k}}^{(0)}(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ E A EXPRESSÃO DA FUNÇÃO DE GREEN:

$$\left| \int \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} U(\vec{r}\,') e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}\,'} \right| \ll 4\pi$$

COMO A EXPRESSÃO DENTRO DO MÓDULO DEVE DECAIR $\sim 1/r$, PODEMOS ASSUMIR QUE SEU VALOR MÁXIMO OCORRE EM $\vec{r}=0$. ASSIM:

$$\left| \int_0^\infty r'^2 dr' \frac{e^{ikr'}}{r'} U(r') \int_0^\pi 2\pi \sin\theta' d\theta' e^{ikr'\cos\theta'} \right|$$

ONDE ASSUMIMOS, POR SIMPLICIDADE, UM POTENCIAL CENTRAL. FAZENDO A INTEGRAL ANGULAR, CHEGAMOS À EXPRESSÃO:

$$\frac{\mu}{\hbar^2 k}\left|\int_0^\infty dr'\, V(r')\left(e^{2ikr'}-1\right)\right| << 1$$

JÁ ESCREVENDO EM TERMOS DO POTENCIAL $V(r)$.
A INTEGRAL PODE SER UTILIZADA CASO A CASO, MAS, DE MANEIRA GERAL, A CONDIÇÃO PODE SER ESCRITA, GROSSO MODO, PARA UM POTENCIAL DE INTENSIDADE V_0 E ALCANCE L

$$\frac{\mu V_0 L}{\hbar^2 k} = \frac{V_0}{E}(kL) << 1$$

ONDE E É A ENERGIA DA PARTÍCULA INCIDENTE. FICA CLARO QUE A APROXIMAÇÃO DE BORN É ADEQUADA PARA <u>ALTAS ENERGIAS</u> (EM RELAÇÃO AO VALOR TÍPICO DO POTENCIAL) E <u>CURTOS ALCANCES</u> DO POTENCIAL (EM RELAÇÃO AO COMPRIMENTO DE ONDA INCIDENTE).