O SPIN DO ELÉTRON

O ELÉTRON POSSUI UM ATRIBUTO FÍSICO INTRÍNSECO, UM MOMENTO ANGULAR, NÃO RELACIONADO AO SEU MOVIMENTO, QUE DÁ ORIGEM AO SEU MOMENTO ANGULAR ORBITAL $\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P}$. ESSE MOMENTO ANGULAR INTRÍNSECO É CHAMADO DE SPIN. OUTRAS PARTÍCULAS TAMBÉM TÊM SPIN, COMO O PRÓTON, O NÊUTRON, O NEUTRINO, O MÚON, ETC. FALAREMOS MAIS ADIANTE SOBRE ESSAS OUTRAS PARTÍCULAS. POR ENQUANTO, FOCAREMOS NO ELÉTRON

EVIDÊNCIAS EXPERIMENTAIS

VAMOS CITAR ALGUMAS:

1) O EXPERIMENTO DE STERN-GERLACH

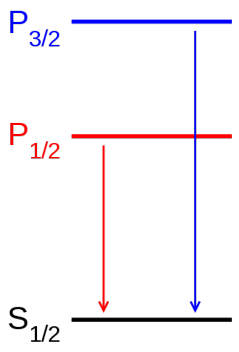
COMO VIMOS, PARA O ÁTOMO DE PRATA, O EXPERIMENTO S-G DÁ EVIDÊNCIA DE QUE O ESTADO FUNDAMENTAL DO ÁTOMO DE PRATA TEM MOMENTO ANGULAR TOTAL COM $j = 1/2$.

VALORES SEMI-INTEIROS DE MOMENTO ANGULAR, EMBORA PERMITIDOS PELA MATEMÁTICA DOS OPERADORES DE MOMENTO ANGULAR, NÃO PODEM RESULTAR DO MOMENTO ANGULAR ORBITAL, PARA O QUAL $l=0,1,2,\dots$

APENAS O SPIN $s=1/2$ DO ELÉTRON PODE EXPLICAR O EXPERIMENTO.

2) A ESTRUTURA FINA DAS LINHAS ESPECTRAIS

AS TRANSIÇÕES ENTRE OS NÍVEIS DOS ÁTOMOS GERAM LUZ EM FREQUÊNCIAS BEM DEFINIDAS. QUANDO EXAMINADAS EM MAIOR RESOLUÇÃO, PERCEBE-SE QUE AS LINHAS SÃO COMPOSTAS POR LINHAS FINAMENTE ESPAÇADAS, CHAMADAS DE ESTRUTURA FINA DAS LINHAS ESPECTRAIS. PARA O ÁTOMO DE HIDROGÊNIO, POR EXEMPLO, A TRANSIÇÃO ENTRE O ESTADO $1s\ (n=1, l=0)$ E $2p\ (n=2, l=1)$ SE DIVIDE EM 2:



ESSA ESTRUTURA SE DEVE AO SPIN DO ELÉTRON

3) O EFEITO ZEEMAN ANÔMALO

NA PRESENÇA DE CAMPO MAGNÉTICO, O ELÉTRON "SENTE" UMA INTERAÇÃO DA FORMA:

$$H_Z = -\vec{M}\cdot\vec{B}$$

ONDE $\vec{B}$ É O CAMPO MAGNÉTICO E $\vec{M}$ É O MOMENTO MAGNÉTICO DO ELÉTRON, QUE PODE SER RELACIONADO AO SEU MOMENTO ANGULAR ORBITAL $\vec{L}$:

$$\vec{M} = \frac{\mu_B}{\hbar}\vec{L} \quad ; \quad \mu_B = \frac{\hbar e}{2m_e}$$

ONDE μ_B É O MAGNETON DE BOHR. SE $\vec{B} = B\hat{z}$

$$H = -\frac{B\mu_B}{\hbar} L_z$$

COMO $\ell = 0, 1, 2, \ldots$ E OS AUTO-VALORES CORRESPONDENTES DE L_z SÃO $m\hbar$ COM:

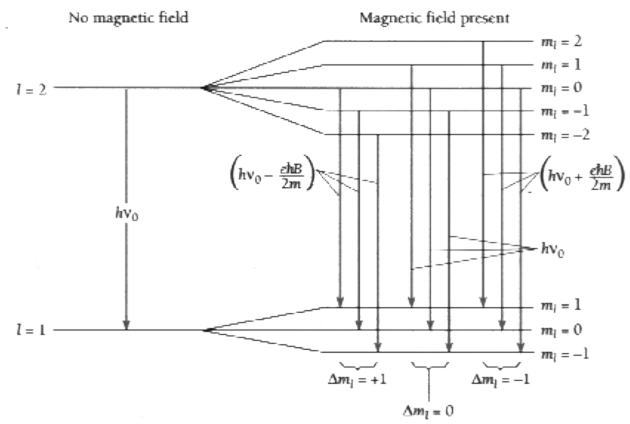
$\ell = 0 \Rightarrow m = 0$

$\ell = 1 \Rightarrow m = -1, 0, 1$

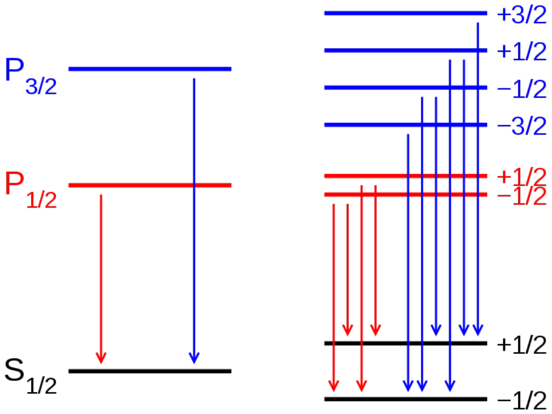
$\ell = 2 \Rightarrow m = -2, -1, 0, 1, 2$ ETC.

ESPERA-SE QUE O EFEITO DO CAMPO MAGNÉTICO CORRESPONDA, PELO MENOS PARA CAMPOS FRACOS, A UMA "QUEBRA" DOS NÍVEIS DE ℓ FIXO EM SUB-NÍVEIS DE m BEM DEFINIDO. COMO $\ell = 0, 1, 2, \ldots$ VÊ-SE QUE DEVE-SE ESPERAR SEMPRE UM NÚMERO ÍMPAR DE SUB-NÍVEIS. ISSO, DE FATO, É OBSERVADO E É CHAMADO DE EFEITO ZEEMAN NORMAL.

EFEITO ZEEMAN NORMAL



ALGUNS ÁTOMOS, NO ENTANTO, APRESENTAM UMA "QUEBRA" EM UM NÚMERO PAR DE SUB-NÍVEIS, COMO O ÁTOMO DE HIDROGÊNIO. ESSE É O CHAMADO EFEITO ZEEMAN ANÔMALO. CLARAMENTE, APENAS MOMENTOS ANGULARES SEMI-INTEIROS PODEM EXPLICAR ESSE FENÔMENO.



EFEITO ZEEMAN
ANÔMALO

POSTULADOS DE TEORIA DE PAULI

A DESCRIÇÃO QUÂNTICA DO ELÉTRON, PORTANTO, DEVE SER MODIFICADA, DA SEGUINTE MANEIRA, DEVIDA A PAULI.

i) O ELÉTRON DEVE SER CARACTERIZADO POR, ALÉM DOS OPERADORES ADVINDOS DAS REGRAS DE QUANTIZAÇÃO:

VARIÁVEIS $(x, y, z) \longrightarrow$ OPERADORES (X, Y, Z)

VARIÁVEIS $(p_x, p_y, p_z) \longrightarrow$ OPERADORES (P_x, P_y, P_z)

TAMBÉM POR OPERADORES DE SPIN (SEM ANÁLOGO CLÁSSICO): S_x, S_y, S_z TAIS QUE:

a) $[S_x, S_y] = i\hbar S_z$ ....

b) ESSES OPERADORES ATUAM NUM ESPAÇO "INTERNO" $|s, m\rangle$ TAL QUE:

$$\vec{S}^2 |s, m\rangle = s(s+1)\hbar^2 |s, m\rangle$$

$$S_z |s, m\rangle = m\hbar |s, m\rangle$$

$$m = -s, -s+1, \dots, s-1, s$$

NO CASO DO ELÉTRON:

$$S = 1/2 \qquad m = -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$$

$$S(S+1) = \frac{3}{4}$$

ii) O ESPAÇO TOTAL DE ESTADOS PRECISA INCORPORAR O ESPAÇO "INTERNO" DO SPIN $\mathcal{E}_S$. ASSIM, POR EXEMPLO,: X, Y, Z, S^2, S_z FORMAM UM C.C.O.C. CUJA BASE COMUM ÚNICA É:

$$|x, y, z, s, m\rangle$$

ASSIM COMO P_x, P_y, P_z, S^2, S_z TAMBÉM FORMAM UM C.C.O.C. CUJA BASE COMUM ÚNICA É:

$$|p_x, p_y, p_z, s, m\rangle$$

iii) ASSOCIADO AO SPIN, O ELÉTRON TEM UM MOMENTO MAGNÉTICO INTRÍNSECO

$$\vec{M} = 2 \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{S}$$ NOTE O FATOR DE 2!

OUTRAS PARTÍCULAS TÊM TAMBÉM SPIN:

a) PRÓTON, NÊUTRON, MÚON, NEUTRINOS, QUARKS TODOS TÊM $S=1/2$

b) O FÓTON, $W^{\pm}$, Z, GLÚONS TÊM $S=1$

c) O GRÁVITON TEM $S=2$

d) O HIGGS TEM $S=0$

NOTEM QUE DA LISTA ACIMA CONTÉM PARTÍCULAS QUE NÃO SÃO ELEMENTARES, COMO O PRÓTON E O NÊUTRON. ENTRE AS ELEMENTARES CONHECIDAS:

$S=0 \rightarrow$ HIGGS

$S=1/2 \rightarrow$ LEPTONS (ELÉTRON, MÚON, TÁON E SEUS NEUTRINOS) E QUARKS

$S=1 \rightarrow$ FÓTON, $W^{\pm}$, Z, GLÚON

$S=2 \rightarrow$ GRÁVITON (NUNCA DETECTADO EM REGIME QUÂNTICO).

A MATEMÁTICA DO SPIN 1/2 (REVISÃO)

USAREMOS A SEGUINTE NOTAÇÃO:

$$|s=1/2, m=1/2\rangle \longrightarrow |+\rangle$$
$$|s=1/2, m=-1/2\rangle \longrightarrow |-\rangle$$

ASSIM: $\vec{S}^2|\pm\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2|\pm\rangle$

$$S_z|\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}|\pm\rangle$$

$\langle\pm|\pm\rangle = 1$ E $\langle\mp|\pm\rangle = 0$ (ORTONORMALIDADE)

$|+\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-| = \mathbb{1}$ (FECHAMENTO)

ESTADO GENÉRICO DE $\mathcal{E}_s$

$$|\chi\rangle = c_+|+\rangle + c_-|-\rangle \qquad |c_+|^2 + |c_-|^2 = 1$$

ATUAÇÃO DE S_x, S_y:

$S_\pm = S_x \pm i S_y$ E

$$S_\pm|s,m\rangle = \hbar\sqrt{s(s+1) - m(m\pm1)}\,|s,m\pm1\rangle$$

DE TAL FORMA QUE:

$$S_+|+\rangle = 0$$
$$S_+|-\rangle = \hbar\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}\,|+\rangle = \hbar|+\rangle$$

$$S_-|-\rangle = 0$$
$$S_-|+\rangle = \hbar\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}\,|-\rangle = \hbar|-\rangle$$

MATRICIALMENTE, NA BASE $\{|+\rangle, |-\rangle\}$

$$S_+ = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_- = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

[NOTE QUE $(S_+)^\dagger = S_-$]. PORTANTO,

$$S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-) = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \frac{\hbar}{2}\sigma_x$$

$$S_y = \frac{1}{2i}(S_+ - S_-) = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \equiv \frac{\hbar}{2}\sigma_y$$

$$S_z = \hbar\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv \hbar\,\sigma_z$$

$$S^2 = \frac{3}{4}\hbar^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{4}\hbar^2\,\mathbb{1}$$

NOTE AS MATRIZES DE PAULI

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} ; \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

QUE, JUNTAMENTE COM $\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

SERVEM COMO BASE GERAL DE OPERADORES HERMITIANO EM $\mathcal{E}_s$ (COM COEFICIENTES REAIS).

$$O^\dagger = O \Rightarrow O = a_x \sigma_x + a_y \sigma_y + a_z \sigma_z + a_0 \mathbb{1}$$

$$(a_x, a_y, a_z, a_0) \in \mathbb{R}$$

E QUALQUER MATRIZ COMPLEXA, HERMITIANA OU NÃO, PODE SER EXPANDIDA NAS 4 MATRIZES $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \mathbb{1})$ COM COEFICIENTES COMPLEXOS.

OUTRAS PROPRIEDADES DAS MATRIZES DE PAULI:

$$\left.\begin{array}{ll}
(i) & \sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = \mathbb{1} \\
(ii) & \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 0 \quad \text{SE } i \neq j \\
(iii) & [\sigma_i, \sigma_j] = 2i \epsilon^{ijk} \sigma_k \\
(iv) & \sigma_i \sigma_j = i \epsilon^{ijk} \sigma_k \quad \text{SE } i \neq j
\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} i, j = (1, 2, 3) \\ \quad = (x, y, z) \end{array}$$

$(iv)\quad Tr(\sigma_i) = 0$

$(v)\quad Det(\sigma_i) = -1$

$(vi)\quad (\vec{\sigma}\cdot\vec{A})(\vec{\sigma}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + i\,\vec{\sigma}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$

NESSA ÚLTIMA EXPRESSÃO:

(a) $\vec{A}$, $\vec{B}$ SÃO VETORES COMUNS

OU

(b) $\vec{A}$ E $\vec{B}$ SÃO OPERADORES QUE COMUTAM COM AS σ_i

(c) SE $\vec{A}$ E $\vec{B}$ SÃO OPERADORES QUE NÃO COMUTAM ENTRE SI, DEVE-SE MANTER A ORDEM DOS DOIS LADOS DA EXPRESSÃO (vi).

DECORRE DE (i), (ii) E (iv) ACIMA QUE, PARA SPIN 1/2 (MAS NÃO PARA OUTROS VALORES DE SPIN), QUE:

$$S_x^2 = S_y^2 = S_z^2 = \frac{\hbar^2}{4}$$

$$S_i S_j + S_j S_i = 0 \quad (i \neq j)$$

$$S_i S_j = \frac{i\hbar}{2}\epsilon^{ijk} S_k \quad (i \neq j)$$

$$S_+^2 = (S_x + iS_y)(S_x + iS_y) = S_x^2 - S_y^2 = 0$$

$$S_-^2 = 0$$

DESCRIÇÃO QUÂNTICA DE UMA PARTÍCULA DE SPIN 1/2

i) ESPAÇO DE ESTADOS.

COMO VIMOS, $\{X, Y, Z, S^2, S_z\}$ OU $\{P_x, P_y, P_z, S^2, S_z\}$ SÃO POSSÍVEIS C.C.O.C. PARA UMA PARTÍCULA DE SPIN 1/2. TOMEMOS O PRIMEIRO. A BASE ÚNICA DE AUTO-VETORES COMUNS É:

$$|x, y, z, \varepsilon\rangle \quad \text{OU} \quad |\vec{r}, \varepsilon\rangle$$

ONDE $\varepsilon = \pm$, E $(x, y, z) \in (-\infty, +\infty)$. ASSIM:

$$X|\vec{r}, \varepsilon\rangle = x|\vec{r}, \varepsilon\rangle$$
$$Y|\vec{r}, \varepsilon\rangle = y|\vec{r}, \varepsilon\rangle$$
$$Z|\vec{r}, \varepsilon\rangle = z|\vec{r}, \varepsilon\rangle$$
$$S^2|\vec{r}, \varepsilon\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2|\vec{r}, \varepsilon\rangle$$

$$S_z|\vec{r}, \varepsilon\rangle = \varepsilon\frac{\hbar}{2}|\vec{r}, \varepsilon\rangle$$

ORTOGONALIDADE:

$$\langle\vec{r}\,', \varepsilon'|\vec{r}, \varepsilon\rangle = \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}\,')\,\delta_{\varepsilon\varepsilon'}$$

NOTE QUE A PRIMEIRA É UMA DELTA DE DIRAC E A SEGUNDA É DE KRONECKER (DISCRETA)

FECHAMENTO

$$\sum_{\varepsilon=\pm}\int d^3r\, |\vec{r},\varepsilon\rangle\langle\vec{r},\varepsilon| = \int d^3r\, |\vec{r},+\rangle\langle\vec{r},+| + \int d^3r\, |\vec{r},-\rangle\langle\vec{r},-| = \mathbb{1}$$

ii) A REPRESENTAÇÃO $|\vec{r},\varepsilon\rangle$

QUALQUER ESTADO $|\psi\rangle$ PODE SER EXPANDIDO NA BASE $|\vec{r},\varepsilon\rangle$ USANDO O FECHAMENTO:

$$|\psi\rangle = \sum_{\varepsilon}\int d^3r\, \langle\vec{r},\varepsilon|\psi\rangle\, |\vec{r},\varepsilon\rangle$$

OS COEFICIENTES DA EXPANSÃO SÃO:

$$\langle\vec{r},\varepsilon|\psi\rangle \equiv \psi_\varepsilon(\vec{r})$$

QUE SÃO FUNÇÕES DE ONDA QUE AGORA TÊM UM ÍNDICE DISCRETO $\underline{\varepsilon}$, ALÉM DE SEREM FUNÇÕES DE $\vec{r}$. TEMOS, PORTANTO, DUAS FUNÇÕES:

$$\psi_+(\vec{r}) = \langle\vec{r},+|\psi\rangle,$$
$$\psi_-(\vec{r}) = \langle\vec{r},-|\psi\rangle,$$

NECESSÁRIAS PARA REPRESENTAR UM ESTADO QUALQUER

É USUAL ESCREVÊ-LAS NA FORMA DE UM VETOR-COLUNA, CHAMADO UM SPINOR:

$$[\psi](\vec{r}) = \begin{pmatrix} \psi_+(\vec{r}) \\ \psi_-(\vec{r}) \end{pmatrix}$$

DEVE-SE NOTAR QUE, ENQUANTO A NOTAÇÃO EM VETOR-COLUNA SEJA MUITO COMUM, O USO DE COLCHETES ($[\psi]$) DO LIVRO NÃO É.

ALGO TOTALMENTE ANÁLOGO OCORRE COM OS BRAS:

$$\langle\psi| = \sum_{\varepsilon} \int d^3r \, \langle\vec{r},\varepsilon| \, \langle\psi|\vec{r},\varepsilon\rangle$$

$$= \sum_{\varepsilon} \int d^3r \, \langle\vec{r},\varepsilon| \, \psi^*_{\varepsilon}(\vec{r})$$

$$[\psi]^\dagger(\vec{r}) = \left(\psi^*_+(\vec{r}), \, \psi^*_-(\vec{r})\right)$$

NOTE QUE O SPINOR AGORA É O ADJUNTO DO SPINOR DO KET E, PORTANTO, É UM VETOR-LINHA.

COM ISSO, O PRODUTO ESCALAR ENTRE 2 ESTADOS É:

$$\langle\psi|\varphi\rangle = \sum_{\varepsilon}\int d^3r \, \langle\psi|\vec{r},\varepsilon\rangle\langle\vec{r},\varepsilon|\varphi\rangle$$

$$= \int d^3r \left[\psi_+^*(\vec{r})\varphi_+(\vec{r}) + \psi_-^*(\vec{r})\varphi_-(\vec{r})\right]$$

$$= \int d^3r \, [\psi]^\dagger(\vec{r})\,[\varphi](\vec{r})$$

A NORMALIZAÇÃO DO ESTADO FICA:

$$\langle\psi|\psi\rangle = \int d^3r \left[|\psi_+(\vec{r})|^2 + |\psi_-(\vec{r})|^2\right] = 1$$

EM TERMOS DOS SPINORES, TAMBÉM PODE-SE ESCREVER

$$\langle\psi|\varphi\rangle = \int d^3r \begin{pmatrix}\psi_+^*(\vec{r}) & \psi_-^*(\vec{r})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_+(\vec{r})\\ \varphi_-(\vec{r})\end{pmatrix}$$