iii) OPERADORES

COMO OS OPERADORES LEVAM ESTADOS A ESTADOS DE MANEIRA LINEAR:

$$[\psi'](\vec{r}) = [\![A]\!]\,[\psi](\vec{r})$$

ELES PODEM SER REPRESENTADOS, EM SUA PARTE DE SPIN, COMO MATRIZES 2x2. CLARO QUE A PARTE "ORBITAL" (OU SEJA, QUE ATUA EM $\vec{r}$), CONTINUA SUA AÇÃO COMO:

$$X \to x$$
$$P_x \to \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} \quad , \text{etc.}$$

a) OPERADORES DE SPIN

TOMEMOS A AÇÃO DE S_+ EM $|\psi\rangle$, CUJO SPINOR É:

$$[\psi](\vec{r}) = \begin{pmatrix} \psi_+(\vec{r}) \\ \psi_-(\vec{r}) \end{pmatrix}$$

SEGUE QUE:

$$|\psi'\rangle = S_+|\psi\rangle = \int d^3r \sum_{\varepsilon} S_+|\vec{r},\varepsilon\rangle\langle\vec{r},\varepsilon|\psi\rangle$$

$$= \int d^3r\, S_+|\vec{r},-\rangle\langle\vec{r},-|\psi\rangle = \int d^3r\,\hbar|\vec{r},+\rangle\psi_-(\vec{r})$$

PORTANTO:

$$\psi'_+(\vec{r}) = \langle \vec{r}, + | \psi' \rangle = \hbar \psi_-(\vec{r})$$
$$\psi'_-(\vec{r}) = \langle \vec{r}, - | \psi' \rangle = 0$$

OU:

$$\begin{pmatrix} \psi'_+(\vec{r}) \\ \psi'_-(\vec{r}) \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} \psi_-(\vec{r}) \\ 0 \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_+(\vec{r}) \\ \psi_-(\vec{r}) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [\psi'](\vec{r}) = \hbar \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{[S_+]} [\psi](\vec{r})$$

ASSIM, A AÇÃO DE S_+ NO SPINOR É A MESMA DO OPERADOR S_+ NO ESPAÇO DE SPIN.

O MESMO VALE PARA QUALQUER OUTRO OPERADOR QUE SÓ ATUE NA PARTE DE SPIN (S_-, S_x, S_y, S_z, S^2).

(b) OPERADORES ORBITAIS

COMO A AÇÃO DESSES NÃO AFETA O ÍNDICE DE SPIN, ELES SÃO PROPORCIONAIS À IDENTIDADE NO ESPAÇO DE SPIN, MAS ATUAM DE MANEIRA HABITUAL NA PARTE ORBITAL. POR EXEMPLO, PARA X E P_x:

$$\psi'_\varepsilon(\vec{r}) = \langle \vec{r}, \varepsilon | X | \psi \rangle = x \langle \vec{r}, \varepsilon | \psi \rangle = x\, \psi_\varepsilon(\vec{r})$$

$$\psi''_\varepsilon(\vec{r}) = \langle \vec{r}, \varepsilon | P_x | \psi \rangle = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \langle \vec{r}, \varepsilon | \psi \rangle = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \psi_\varepsilon(\vec{r})$$

PORTANTO,

$$[\psi'](\vec{r}) = \underbrace{\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}}_{[X]} [\psi](\vec{r})$$

$$[\psi''](\vec{r}) = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}}_{[P_x]} [\psi](\vec{r})$$

(c) OPERADORES MISTOS

TOMANDO COMO EXEMPLO $L_z S_z$:

$$|\psi'\rangle = L_z S_z |\psi\rangle = \sum_{\varepsilon'} \int d^3r' \, L_z S_z |\vec{r}', \varepsilon'\rangle\langle \vec{r}', \varepsilon'|\psi\rangle$$

$$= \sum_{\varepsilon'} \left(\frac{\hbar \varepsilon'}{2}\right) \int d^3r' \, L_z |\vec{r}' \varepsilon'\rangle\langle \vec{r}' \varepsilon'|\psi\rangle$$

$$\langle \vec{r}, \varepsilon|\psi'\rangle = \sum_{\varepsilon'} \left(\frac{\hbar \varepsilon'}{2}\right) \int d^3r' \, \underbrace{\langle \vec{r}\, \varepsilon| L_z |\vec{r}', \varepsilon'\rangle}_{\delta_{\varepsilon,\varepsilon'} \langle \vec{r}| L_z |\vec{r}'\rangle} \psi_{\varepsilon'}(\vec{r}')$$

$$= \left(\frac{\hbar \varepsilon}{2}\right) \int d^3r' \, \langle \vec{r}| L_z |\vec{r}'\rangle \underbrace{\langle \vec{r}'|\psi_\varepsilon\rangle}_{\equiv \psi_\varepsilon(\vec{r}')}$$

$$= \frac{\hbar \varepsilon}{2} \langle \vec{r}| L_z |\psi_\varepsilon\rangle$$

$$= \frac{\hbar \varepsilon}{2} \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \phi} \psi_\varepsilon(\vec{r})$$

$$[\psi'](\vec{r}) = \frac{\hbar}{2} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial \phi} & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial \phi} \end{pmatrix}}_{[\![L_z S_z]\!]} [\psi](\vec{r})$$

E ANALOGAMENTE PARA OUTROS OPERADORES

POR EXEMPLO,

$$[\![\vec{S}\cdot\vec{P}]\!] = \frac{\hbar}{2}(\sigma_x P_x + \sigma_y P_y + \sigma_z P_z)$$

$$= \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \partial/\partial z & \partial/\partial x - i\partial/\partial y \\ \partial/\partial x + i\partial/\partial y & -\partial/\partial z \end{pmatrix}$$

(iv) REPRESENTAÇÃO $|\vec{p},\varepsilon\rangle$

EM TOTAL ANALOGIA À REPRESENTAÇÃO $|\vec{r},\varepsilon\rangle$, PODEMOS DEFINIR SPINORES NO ESPAÇO DE MOMENTOS:

$$\langle\vec{p},\varepsilon|\psi\rangle = \bar{\psi}_\varepsilon(\vec{p}) \qquad \underbrace{[\bar{\psi}](\vec{p}) = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_+(\vec{p}) \\ \bar{\psi}_-(\vec{p}) \end{pmatrix}}_{\text{SPINOR NO ESPAÇO } \vec{p}}$$

USANDO:

$$\langle\vec{r},\varepsilon|\vec{p},\varepsilon'\rangle = \delta_{\varepsilon,\varepsilon'}\langle\vec{r}|\vec{p}\rangle = \delta_{\varepsilon,\varepsilon'}\frac{e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar}}{(2\pi\hbar)^{3/2}}$$

TEMOS:

$$\bar{\psi}_\varepsilon(\vec{p}) = \langle\vec{p},\varepsilon|\psi\rangle = \sum_{\varepsilon'}\int d^3r\,\langle\vec{p},\varepsilon|\vec{r},\varepsilon'\rangle\langle\vec{r},\varepsilon'|\psi\rangle$$

$$= \int d^3r\,\frac{e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar}}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\,\psi_\varepsilon(\vec{r})$$

PRODUTOS ESCALARES E OPERADORES SÃO DEFINIDOS DE MANEIRA ANÁLOGA

CÁLCULO DE PROBABILIDADES DE MEDIDAS

VAMOS CONSIDERAR, PRIMEIRAMENTE, MEDIDAS SIMULTÂNEAS DA POSIÇÃO (x, y, z) E DA COMPONENTE S_z DO SPIN. NESSE CASO:

$$dP_\varepsilon(\vec{r}) = |\langle \vec{r}, \varepsilon | \psi \rangle|^2 d^3r = |\psi_\varepsilon(\vec{r})|^2 d^3r$$

ASSIM:

$|\psi_\varepsilon(\vec{r})|^2 d^3r \equiv dP_\varepsilon(\vec{r})$ = PROBABILIDADE DE SE MEDIR A POSIÇÃO DO ELÉTRON NO VOLUME d^3r EM TORNO DE $\vec{r}$ E COM COMPONENTE DE SPIN $S_z = \varepsilon \frac{\hbar}{2}$

ANALOGAMENTE:

a) MEDIDAS DE POSIÇÃO E COMPONENTE S_x

AUTO-VETORES CORRESPONDENTES:

$$|\vec{r} +\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|\vec{r}+\rangle + |\vec{r}-\rangle \right]$$

$$|\vec{r} -\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|\vec{r}+\rangle - |\vec{r}-\rangle \right]$$

PORTANTO:

$$dP(\vec{r}, \pm x) = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} [\langle \vec{r}, +| \pm \langle \vec{r}, -|] |\psi\rangle \right|^2 d^3r$$

$$= \frac{1}{2} \left| \psi_+(\vec{r}) + \psi_-(\vec{r}) \right|^2 d^3r$$

b) MEDIDAS DE MOMENTO E COMPONENTE S_z

AUTO-VETORES: $|\vec{p}, \varepsilon\rangle$

$$dP(\vec{p}, \varepsilon) = |\langle \vec{p}, \varepsilon | \psi\rangle|^2 d^3p$$

$$= |\bar{\psi}_\varepsilon(\vec{p})|^2 d^3p$$

PARA MEDIDAS INCOMPLETAS, QUE CORRESPONDEM A VÁRIOS AUTO-ESTADOS, DEVE-SE SOMAR AS PROBABILIDADE, OU SEJA, OS MÓDULOS QUADRADOS DAS AMPLITUDES CORRESPONDENTES. VEJAMOS ALGUNS EXEMPLOS.

c) MEDIDA DE POSIÇÃO SEM MEDIDA DE COMPONENTE DE SPIN

NESSE CASO, OS AUTO-VETORES SÃO $|\vec{r},+\rangle$ E $|\vec{r},-\rangle$. PORTANTO:

$$dP(\vec{r}) = \left[|\psi_+(\vec{r})|^2 + |\psi_-(\vec{r})|^2\right] d^3r$$

COMPARE COM AS MEDIDAS SIMULTÂNEAS DE POSIÇÃO E S_z OU S_x.

d) MEDIDA DA COMPONENTE S_z

NESSE CASO, OS AUTO-VETORES SÃO $|\vec{r},\varepsilon\rangle$ PARA TODOS OS VALORES DE $\vec{r}$. LOGO:

$$P(\varepsilon) = \int d^3r\, |\langle \vec{r},\varepsilon|\psi\rangle|^2 = \int d^3r\, |\psi_\varepsilon(\vec{r})|^2$$

e) MEDIDA DA COMPONENTE S_x:

AUTO-VETORES: $\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|\vec{r},+\rangle + \varepsilon|\vec{r},-\rangle\right]$, $\vec{r}$ QUALQUER

$$P(\varepsilon_x) = \int \frac{d^3r}{2} |\psi_+(\vec{r}) + \varepsilon\, \psi_-(\vec{r})|^2$$