Problemas sugeridos do Cap. 10

1. Problema 1 do cap. X do Cohen-Tannoudji.

2. Problema 3 do cap. X do Cohen-Tannoudji.

3. Problema 4a. do cap. X do Cohen-Tannoudji. Dica: antes da desintegração, o momento angular total é o spin da partícula a, $\mathbf{J} = \mathbf{S}_a$, pois ela não tem momento angular orbital no seu referencial de repouso. Depois da desintegração, o momento angular total é $\mathbf{J} = \mathbf{S}_b + \mathbf{S}_c + \mathbf{L}$, onde $\mathbf{S}_{b,c}$ são os spins das partículas b e c e $\mathbf{L}$ é o momento angular relativo das duas partículas, o mesmo tratado no capítulo sobre o átomo de hidrogênio (números quânticos l e m_l). Note que o momento angular orbital total de duas partículas é

$$\mathbf{L}_T = \mathbf{L}_G + \mathbf{L},$$

onde $\mathbf{L}_G$ é o momento angular do centro de massa e $\mathbf{L}$ é o momento angular relativo (veja o comentário ao final da seção B.2.b do Capítulo VII do Cohen-Tannoudji). No referencial do centro de massa, $\mathbf{L}_G = 0$ e só há $\mathbf{L}$.

4. Problema 4b. do cap. X do Cohen-Tannoudji. Esse problema é bem desafiador. Você vai precisar dos coeficientes de Clebsch-Gordan para soma de um l qualquer com $s = 1/2$, dados no complemento $\mathrm{A_X}$, §2.

5. Considere 3 partículas diferentes de spin-1/2 e sem graus de liberdade orbitais. A base de autovetores comuns de $\left\{S_1^2, S_2^2, S_3^2, S_{1z}, S_{2z}, S_{3z}\right\}$, em notação habitual pode ser escrita como

$$|\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\rangle\,,$$

onde $\varepsilon_i = \pm,\ (i = 1, 2, 3)$, também em notação usual. Se

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{12} &= \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2, \\ \mathbf{S} &= \mathbf{S}_{12} + \mathbf{S}_3 = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_3, \end{aligned}$$

o conjunto $\left\{S_1^2, S_2^2, S_3^2, S_{12}^2, S^2, S_z\right\}$ forma uma C.C.O.C. Ou seja, podemos primeiro somar os dois primeiros spins-1/2 e depois somar os multipletos obtidos dessa forma com o terceiro spin-1/2. Como cada soma intermediária gera um C.C.O.C (não há a necessidade de um rótulo adicional), o conjunto final é um C.C.O.C.

(a) Usando os resultados do capítulo 10, considere o C.C.O.C. $\left\{S_1^2, S_2^2, S_3^2, S_{12}^2, S^2, S_z\right\}$ e encontre os valores possíveis dos números quânticos relevantes: s_{12}, s, m.

(b) Prove que, se $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$, onde $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \mathbf{J}$ são operadores de momentos angulares quaisquer e $[\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2] = 0$, então

$$\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{J}_2 = \frac{1}{2}\left(\mathbf{J}^2 - \mathbf{J}_1^2 - \mathbf{J}_2^2\right)$$

(c) Considere agora o seguinte Hamiltoniano para esse sistema

$$H = A\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 + B\left(\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2\right) \cdot \mathbf{S}_3.$$

Quais são seus auto-valores?