# Problemas sugeridos do Cap. 13

**1.** Considere um sistema cujo espaço de estados é bi-dimensional, com base $\{|1\rangle, |2\rangle\}$. O sistema é preparado no estado inicial $|1\rangle$ e uma perturbação é ligada em $t = -\infty$, dada por

$$W(t) = V\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}\tau}e^{-(t/\tau)^2}\right],$$

tal que

$$\begin{aligned}\langle 1|V|1\rangle &= \langle 2|V|2\rangle = 0,\\ \langle 1|V|2\rangle &= \langle 2|V|1\rangle = \alpha,\end{aligned}$$

onde $\alpha, \tau \in \mathbb{R}$.

(a) Use teoria de perturbação dependente do tempo em primeira ordem e encontre a probabilidade do sistema ser encontrado no estado $|2\rangle$ quando $t \to \infty$. Note que, nesse caso, a perturbação já começa em $t = -\infty$, então as fórmulas deduzidas em sala precisam ser ligeiramente modificadas para levar isso em conta.

(b) Escreva os resultados no limite $\tau \to 0$, quando $W(t) \to V\delta(t)$.

**2.** Problema 1, itens (a) e (b) do capítulo XIII do Cohen-Tannoudji.

**3.** Problema 2, itens (a) e (b) do capítulo XIII do Cohen-Tannoudji.

**4.** A taxa de emissão espontânea de fótons por um sistema (um átomo, por exemplo) carregado com carga $q$ na aproximação de dipolo elétrico a partir de um estado excitado $|\varphi_n\rangle$ para o estado fundamental $|\varphi_0\rangle$ é dada por

$$\Gamma = \frac{q^2\omega_{n0}^3}{3\pi\epsilon_0\hbar c^3}|\mathbf{R}_{n0}|^2 = \frac{4c}{3}\frac{e^2}{\hbar c}\frac{\omega_{n0}^3}{c^3}|\mathbf{R}_{n0}|^2 = \frac{4c}{3}\alpha\frac{\omega_{n0}^3}{c^3}|\mathbf{R}_{n0}|^2,$$

onde

$$\begin{aligned}|\mathbf{R}_{n0}|^2 &\equiv |\langle\varphi_n|\mathbf{R}|\varphi_0\rangle|^2 = |\langle\varphi_n|X|\varphi_0\rangle|^2 + |\langle\varphi_n|Y|\varphi_0\rangle|^2 + |\langle\varphi_n|Z|\varphi_0\rangle|^2,\\ \omega_{n0} &= \frac{E_n - E_0}{\hbar},\\ \alpha &= \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}.\end{aligned}$$

A meia-vida do estado é

$$\tau = \frac{1}{\Gamma}.$$

Calcule a meia-vida em segundos de cada estado do nível 2 do átomo de hidrogênio: $|\varphi_{2,0,0}\rangle, |\varphi_{2,1,1}\rangle, |\varphi_{2,1,0}\rangle$ e $|\varphi_{2,1,-1}\rangle$. Ignore o spin do elétron.

**5.** Considere o efeito fotoelétrico de um átomo de hidrogênio que se encontra inicialmente no seu estado fundamental $|\varphi_{1,0,0}\rangle$. Uma onda eletromagnética de frequência angular $\omega$, amplitude de campo elétrico $E_0$ e linearmente polarizada na direção $\hat{\mathbf{z}}$ incide no átomo e ejeta o elétron para um estado de contínuo de onda plana $|\mathbf{p}\rangle$ (ignore o spin do elétron) onde

$$\langle\mathbf{r}|\mathbf{p}\rangle = \frac{e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar}}{(2\pi\hbar)^{3/2}}.$$

Evidentemente, $\hbar\omega = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + E_I = E_f + E_I$, onde $E_f$ é a energia final do fotoelétron e $E_I = 13.6$ eV é a energia de ionização do átomo.

(a) Usando a regra de ouro de Fermi, encontre a taxa de transição

$$w = \frac{\delta W}{\delta\Omega_f} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\delta P(\varphi_{1,0,0}; E_f, \Omega_f, t)}{\delta\Omega_f}\right]$$

por unidade de ângulo sólido na direção de ejeção do fotoelétron. Você precisará calcular uma integral que ficará facilitada pelo uso de

$$ze^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = -i\frac{\partial}{\partial k_z}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}.$$

(b) Integre $w$ obtido em (a) em todos os ângulos sólidos para obter a taxa de transição total $w_T$. A seção de choque de fotoionização é obtida multiplicando-se $w_T$ pela energia de cada fóton, $\hbar\omega$, e dividindo pela intensidade incidente $I = \frac{\epsilon_0 c}{2}E_0^2$

$$\sigma(\omega) = \frac{\hbar\omega}{\frac{\epsilon_0 c}{2}E_0^2}w_T.$$

Obtenha a expressão para a seção de choque. Obtenha um valor numérico para luz com comprimento de onda $\lambda = 200$ Å e expresse seu resultado em unidades de $\text{Å}^2$.

**6.** Vamos analisar transições de dipolo magnético. A perturbação $W_{II}(t)$ para a onda monocromática considerada na sala, de frequência $\omega$, vetor de onda $\mathbf{k} = \frac{\omega}{c}\hat{\mathbf{y}}$, linearmente polarizada na direção $\hat{\mathbf{z}}$ (direção do campo elétrico) tem a forma

$$W_{II}(t) = -\frac{q}{m}\mathbf{S}\cdot\mathbf{B}(\mathbf{R},t) = -\frac{qE_0}{mc}S_x\cos(kY-\omega t) \approx -\frac{qE_0}{mc}S_x\cos\omega t,$$

onde fizemos a aproximação usual $ky \sim a_0/\lambda \ll 1$. Obtemos assim a perturbação de dipolo magnético, como discutido em sala. Seguindo passos análogos ao já feito para o dipolo elétrico ou, equivalentemente, fazendo

$$|\mathbf{R}_{n0}|^2 = \frac{|\mathbf{P}_{n0}|^2}{m^2\omega^2} \to \frac{|\mathbf{S}_{n0}|^2}{m^2c^2},$$

(compare $W_{DE}(t)$ e $W_{DM}(t)$), onde

$$|\mathbf{S}_{n0}|^2 \equiv |\langle\varphi_n|\,\mathbf{S}\,|\varphi_0\rangle|^2 = |\langle\varphi_n|\,S_x\,|\varphi_0\rangle|^2 + |\langle\varphi_n|\,S_y\,|\varphi_0\rangle|^2 + |\langle\varphi_n|\,S_z\,|\varphi_0\rangle|^2,$$

encontramos a taxa de transição para emissão espontânea para dipolo magnético

$$\Gamma = \frac{q^2\omega_{n0}^3}{3\pi\epsilon_0\hbar m^2c^5}|\mathbf{S}_{n0}|^2 = \frac{4}{3}\frac{e^2}{\hbar c}\frac{\omega_{n0}^3}{(mc^2)^2}|\mathbf{S}_{n0}|^2 = \frac{4}{3}\alpha\frac{\omega_{n0}^3}{(mc^2)^2}|\mathbf{S}_{n0}|^2.$$

A linha de 21 cm do hidrogênio corresponde a uma transição hiperfina de dipolo magnético $F=1 \to F=0$. Utilize a expressão acima para calcular a meia-vida do estado excitado tripleto $F=1$. Na expressão acima, desprezamos o acoplamento do campo magnético com o momento magnético do próton

$$W_{II}^p(t) = -g_p\frac{q}{M_p}\mathbf{I}\cdot\mathbf{B}(\mathbf{R},t) = -g_p\frac{qE_0}{M_pc}I_x\cos(kY-\omega t) \approx -g_p\frac{qE_0}{M_pc}I_x\cos\omega t,$$

porque esse termo é muito menor, já que $M_p \approx 1800m$.