FI 008 – Eletrodinâmica I

1º Semestre de 2020

14/04/2020

Aula 10

Ondas eletromagnéticas

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (4)$$

$\bar{\nabla} \times (3)$:

$$\bar{\nabla} \times (\bar{\nabla} \times \bar{E}) = \bar{\nabla}(\cancel{\bar{\nabla} \cdot \bar{E}}^{\,0}) - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial (\bar{\nabla} \times \bar{B})}{\partial t}$$

USANDO (4) E (1):

$$\nabla^2 \bar{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \nabla^2 \bar{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (5)$$

$\bar{\nabla} \times (4)$, USANDO (3) E (2):

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (6)$$

CADA COMPONENTE CARTESIANA DE $\bar{E}$ E $\bar{B}$ SATISFAZ UMA EQ. DE ONDA.

SOLUÇÕES MONOCROMÁTICAS: $\vec{E}(\bar{x},t) = \bar{E}_0 \, e^{i(\vec{k}\cdot\bar{x} - \omega t)}$

$\bar{B}(\bar{x},t) = \bar{B}_0 \, e^{i(\bar{k}\cdot\bar{x} - \omega t)}$

ONDE $\vec{E}_0$ E $\bar{B}_0$ SÃO VETORES CONSTANTES COMPLEXOS.

USAREMOS NOTAÇÃO COMPLEXA, PORQUE AS EQS. SÃO LINEARES

A SOLUÇÃO FÍSICA É OBTIDA TOMANDO-SE A PARTE REAL AO FINAL

$$\vec{\nabla}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} = (i\vec{k})\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} \qquad \vec{\nabla} \longleftrightarrow i\vec{k}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{i(\ )} = -i\omega\, e^{i(\ )} \qquad \frac{\partial}{\partial t} \longleftrightarrow -i\omega$$

$$\nabla^2 = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} = (i\vec{k})\cdot(i\vec{k}) = -|\vec{k}|^2 = -k^2$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = (-i\omega)(-i\omega) = -\omega^2$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{E}_0\, e^{i(\ )} = \underbrace{\left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)}_{=\,0}\vec{E}_0\, e^{i(\ )} = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 = c^2 k^2 \Rightarrow \boxed{\omega = ck = c|\vec{k}|}$$ RELAÇÃO DE DISPERSÃO

E ANALOGAMENTE PARA $\vec{B}$.

GARANTINDO QUE SÃO SOLUÇÕES DAS EQS. (1-4):

$$\vec{\nabla}\cdot(E_0 e^{i()}) = i\vec{k}\cdot\vec{E}_0 e^{i()} = 0 \Rightarrow \vec{k}\cdot\vec{E}_0 = 0$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{B}_0 e^{i()}) = i\vec{k}\cdot\vec{B}_0 e^{i()} = 0 \Rightarrow \vec{k}\cdot\vec{B}_0 = 0$$

VAMOS ESCREVER : $\vec{k} = k\hat{n} = \frac{\omega}{c}\hat{n}$

$$e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} = e^{i(k\hat{n}\cdot\vec{x}-\omega t)} = e^{i(\frac{\omega}{c}\hat{n}\cdot\vec{x}-\omega t)}$$

$$= e^{i\frac{\omega}{c}(\hat{n}\cdot\vec{x}-ct)}$$

SE $\hat{n} = \hat{x} \Rightarrow e^{i\frac{\omega}{c}(x-ct)}$

$$\Rightarrow \hat{n}\cdot\vec{E}_0 = 0 \quad (7)$$

$$\hat{n}\cdot\vec{B}_0 = 0 \quad (8)$$

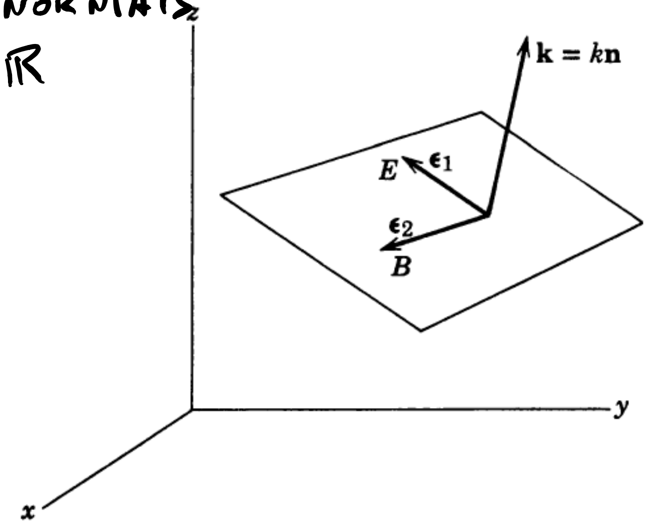
DE (3): $i\vec{k}\times\left(\vec{E}_0 e^{i\frac{\omega}{c}(\hat{n}\cdot\vec{x}-\omega t)}\right) = i\omega\vec{B}_0 e^{i\frac{\omega}{c}(\hat{n}\cdot\vec{x}-\omega t)}$

$\Rightarrow \vec{k}$ E ω SÃO OS MESMOS PARA $\vec{E}(\vec{x},t)$ E $\vec{B}(\vec{x},t)$

$$\Rightarrow \vec{k}\times\vec{E}_0 = \omega\vec{B}_0 \Rightarrow \hat{n}\times\vec{E}_0 = c\vec{B}_0 \quad (9)$$

DE (4) $\Rightarrow \hat{n}\times\vec{B}_0 = -\frac{1}{c}\vec{E}_0$ QUE É EQUIVALENTE (9)

TRÍADE : $\hat{n}, \hat{\epsilon}_1, \hat{\epsilon}_2$ MUTUAMENTE ORTONORMAIS $\in \mathbb{R}$



$$\boxed{\hat{\epsilon}_1 \times \hat{\epsilon}_2 = \hat{\mathbf{n}}} \; *$$

$$\mathbf{E}_0 = E_0 \hat{\epsilon}_1; \; *$$

$$\mathbf{B}_0 = \frac{E_0}{c} \hat{\epsilon}_2. \; *$$

$E_0 \in \mathbb{C}$

Outra solução linearmente independente é:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_0 = E_0' \hat{\epsilon}_2; \\ \mathbf{B}_0 = -\dfrac{E_0'}{c} \hat{\epsilon}_1. \end{cases}$$

$E_0' \in \mathbb{C}$

O vetor de Poynting e a densidade de energia

$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$ $\quad u = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$

LEMA: SE $A = A_0 e^{i\omega t}$ e $B = B_0 e^{i\omega t}$ $\quad A_0, B_0 \in \mathbb{C}$

$\langle O \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T O(t)\,dt \Rightarrow \langle (AB)_F \rangle = \frac{1}{2} Re[A_0 B_0^*] = \frac{1}{2} Re[A_0^* B_0]$

$*$ → CONJUGAÇÃO COMPLEXA

PROVA: $(AB)_F = Re[A]\, Re[B] = \frac{1}{2}(A + A^*)\, \frac{1}{2}(B + B^*)$

CAMPOS FÍSICOS

$= \frac{1}{4}(AB + A^* B^* + A B^* + A^* B)$

$= \frac{1}{4}\left[A_0 B_0 e^{2i\omega t} + A_0^* B_0^* e^{-2i\omega t} + A_0 B_0^* + A_0^* B_0\right]$

$\langle (AB)_F \rangle = \frac{1}{4}(A_0 B_0^* + A_0^* B_0) = \frac{1}{2} Re[A_0 B_0^*] = \frac{1}{2} Re[A_0^* B_0]$

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \mathrm{Re}\left[\vec{E}_0 \times \vec{B}_0^* \right] \qquad \text{uso} \quad \vec{B}_0 = \frac{1}{c}\, \hat{n} \times \vec{E}_0 \quad (9)$$

$$= \frac{1}{2\mu_0 c} \mathrm{Re}\left[\vec{E}_0 \times (\hat{n} \times \vec{E}_0^*) \right] = \frac{1}{2\mu_0 c} \mathrm{Re}\left[|\vec{E}_0|^2 \hat{n} - \cancel{(\vec{E}_0 \cdot \hat{n})}^{\,0} \vec{E}_0^* \right]$$

$$\boxed{\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2\mu_0 c} |\vec{E}_0|^2 \hat{n}}$$

$$\langle u \rangle = \frac{\epsilon_0}{4} \mathrm{Re}\left[\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0^* \right] + \frac{1}{4\mu_0} \mathrm{Re}\left[\underbrace{\vec{B}_0 \cdot \vec{B}_0^*}_{\frac{\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0^*}{c^2}} \right]$$

$$\boxed{\langle u \rangle = \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}_0|^2 = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0^*}$$

NOTE QUE: $\langle \vec{S} \rangle = \langle u \rangle c\, \hat{n}$

Polarização linear

COMO VIMOS, TEMOS 2 SOLUÇÕES LINEARMENTE INDEPENDENTES:

$$\vec{E}_0 = E_0 \hat{\epsilon}_1 \qquad \text{OU} \qquad \vec{E}_0 = E_0 \hat{\epsilon}_2$$

$$\vec{B}_0 = \frac{E_0}{c} \hat{\epsilon}_2 \qquad\qquad \vec{B}_0 = -\frac{E_0}{c} \hat{\epsilon}_1$$

NO CASO MAIS GERAL, SUPERPOSIÇÃO GENÉRICA DAS DUAS:

$$\vec{E}_0 = E_1 \hat{\epsilon}_1 + E_2 \hat{\epsilon}_2 \quad \text{E} \quad \vec{B}_0 = \frac{1}{c} \hat{n} \times \vec{E}_0$$

ONDE E_1 E $E_2 \in \mathbb{C}$

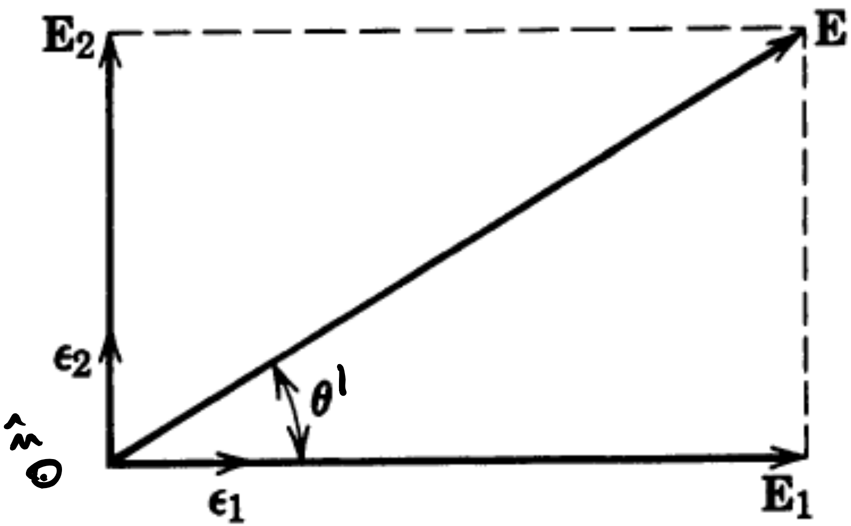
(i) POL. LINEAR: E_1 E E_2 TÊM A MESMA FASE

$$E_1 = |E_1| e^{i\theta} \quad \text{E} \quad E_2 = |E_2| e^{i\theta}$$

$$\vec{E}(\vec{x},t) = |E_1| e^{i\theta} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)} \hat{\epsilon}_1 + |E_2| e^{i\theta} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)} \hat{\epsilon}_2$$

$$\vec{E}_F(\vec{x},t) = \left(|E_1| \hat{\epsilon}_1 + |E_2| \hat{\epsilon}_2\right) \cos(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t + \theta)$$

O CAMPO ELÉTRICO TEM SEMPRE A MESMA DIREÇÃO



$$|\vec{E}|_{max} = \left[|E_1|^2 + |E_2|^2 \right]^{1/2}$$

$$\tan\theta' = \frac{|E_2|}{|E_1|}$$ (NÃO É O MESMO θ DA FASE)

LUZ LINEARMENTE POLARIZADA OU

PLANO POLARIZADA

Polarização circular

(ii) E_1 E E_2 TÊM O MESMO MÓDULO MAS $\frac{\pi}{2}$ DE DIFERENÇA DE FASE:

$$E_1 = |E_1|$$

$$E_2 = |E_1| e^{\pm i \frac{\pi}{2}} = \pm i |E_1|$$

$$\bar{E}_F(\bar{x},t) = Re\left[|E_1| (\hat{\epsilon}_1 \pm i \hat{\epsilon}_2) e^{i(\bar{k}\cdot\bar{x} - \omega t)} \right]$$

$$= |E_1| \left[\cos(\vec{k}\cdot\bar{x} - \omega t)\hat{\epsilon}_1 \mp \sin(\bar{k}\cdot\bar{x} - \omega t)\hat{\epsilon}_2 \right]$$

SE FIXARMOS UM PONTO NO ESPAÇO (DIGAMOS $\bar{x} = 0$):

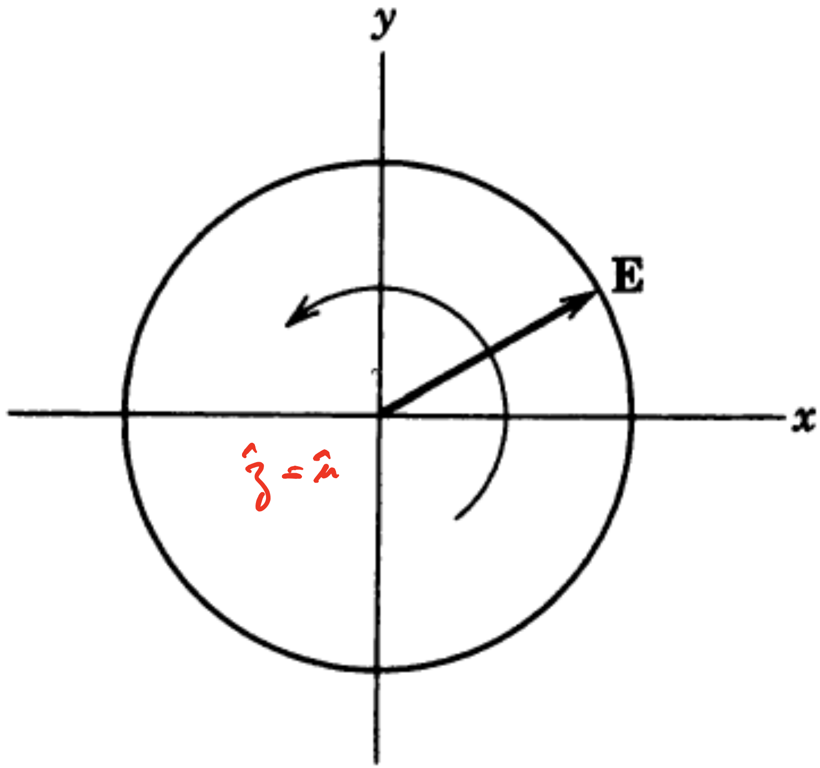
$$\bar{E}_F(0,t) = |E_1| \left[\cos \omega t \, \hat{\epsilon}_1 \pm \sin \omega t \, \hat{\epsilon}_2 \right]$$

$\bar{E}_F$ DESCREVE UM CÍRCULO DE RAIO $|E_1|$

$+ \rightarrow$ SENTIDO ANTI-HORÁRIO (POL. À DIREITA)

$- \rightarrow$ " HORÁRIO (POL. À ESQUERDA)

Luz circularmente polarizada à esquerda (helicidade positiva)



$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = E_0(\boldsymbol{\epsilon}_1 + i\boldsymbol{\epsilon}_2)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega t}$$

O caso mais geral: polarização elíptica

DEFINIMOS: $\hat{\epsilon}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\epsilon}_1 \pm i\hat{\epsilon}_2)$

FORMAM UMA BASE ONDE CADA ELEMENTO TEM POL. CIRCULAR

$\hat{\epsilon}_{\pm}^{*} \cdot \hat{n} = 0 \qquad \hat{\epsilon}_{\pm}^{*} \cdot \hat{\epsilon}_{\pm} = 1$

$\hat{\epsilon}_{\pm}^{*} \cdot \hat{\epsilon}_{\mp} = 0$

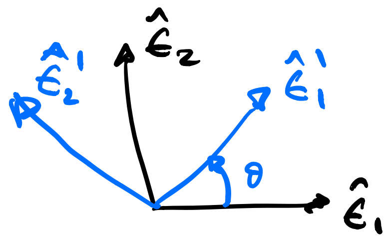
CASO MAIS GERAL: $\bar{E}_0 = E_1\hat{\epsilon}_1 + E_2\hat{\epsilon}_2 = E_+\hat{\epsilon}_+ + E_-\hat{\epsilon}_-$

$E_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_+ + E_-)$, $E_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}(E_+ - E_-)$, $E_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_1 \mp iE_2)$

SEJA A RAZÃO $\frac{E_-}{E_+} \equiv r e^{i\alpha}$

$\Rightarrow \bar{E}_0 = E_+\hat{\epsilon}_+ + r e^{i\alpha} E_+ \hat{\epsilon}_- = E_+(\hat{\epsilon}_+ + r e^{i\alpha}\hat{\epsilon}_-)$

$\bar{E}_0 = |E_+| e^{i\phi}(\hat{\epsilon}_+ + r e^{i\alpha}\hat{\epsilon}_-)$



NAS NOTAS, PROVA-SE QUE A ROTAÇÃO DE θ ACIMA $R_3(\theta)$:

$$R_3(\theta)\,\hat{\epsilon}_\pm = e^{\pm i\theta}\,\hat{\epsilon}_\pm$$

AGORA: $R_3\left(\frac{\alpha}{2}\right)\bar{E}_0 = |E_+|\,e^{i\phi}\left(e^{i\frac{\alpha}{2}}\hat{\epsilon}_+ + r\,e^{i\frac{\alpha}{2}}\hat{\epsilon}_-\right)$

$$= |E_+|\,e^{i\left(\phi+\frac{\alpha}{2}\right)}\left(\hat{\epsilon}_+ + r\,\hat{\epsilon}_-\right)$$

NO NOVO SISTEMA DE EIXOS RODADOS (NÃO VAMOS PÔR LINHA NOS $\hat{\epsilon}_\pm$ DO SISTEMA RODADO)

NA BASE $\hat{\epsilon}'_1, \hat{\epsilon}'_2$: $\bar{E}_0 = \frac{|E_+|}{\sqrt{2}}\,e^{i\left(\phi+\frac{\alpha}{2}\right)}\left[(1+r)\hat{\epsilon}'_1 + i(1-r)\hat{\epsilon}'_2\right]$

$$\vec{E}_F(\bar{x},t) = \mathrm{Re}\left\{\frac{|E_+|}{\sqrt{2}}e^{i\left(\phi+\frac{\alpha}{2}\right)}\left[(1+r)\hat{\epsilon}'_1 + i(1-r)\hat{\epsilon}'_2\right]e^{i(\bar{k}\cdot\bar{x}-\omega t)}\right\}$$

$$= \frac{|E_+|}{\sqrt{2}}\left\{(1+r)\cos\left(\vec{k}\cdot\bar{x}-\omega t+\phi+\frac{\alpha}{2}\right)\hat{\epsilon}'_1 - (1-r)\sin\left(\bar{k}\cdot\bar{x}-\omega t+\phi+\frac{\alpha}{2}\right)\hat{\epsilon}'_2\right\}$$

ESSE VETOR DESCREVE UMA ELIPSE!

$$\frac{|E_1'(\vec{x},t)|^2}{(1+r)^2} + \frac{|E_2'(\vec{x},t)|^2}{(1-r)^2} = \frac{|E_+|^2}{2} \qquad \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

EQUAÇÃO DE UMA ELIPSE, CUJA RAZÃO ENTRE SEMI-EIXO MAIOR / SEMI-EIXO MENOR:

$$\left|\frac{1+r}{1-r}\right|$$

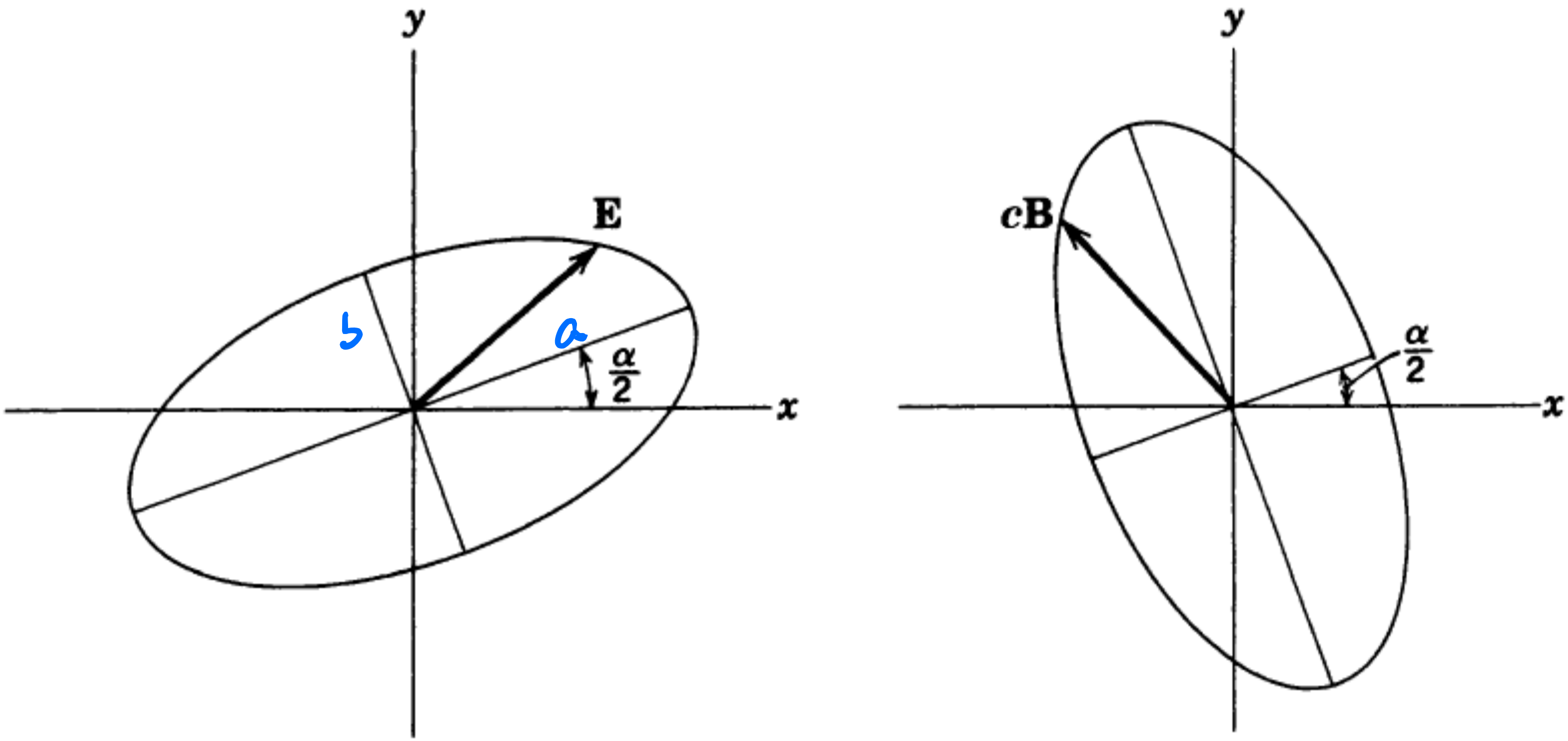
A ELIPSE ESTÁ RODADA DE $\frac{\alpha}{2}$ EM RELAÇÃO AO SISTEMA $\hat{e}_1, \hat{e}_2$

POLARIZAÇÃO LINEAR: $r = +1 \Rightarrow E_2 = 0$

$r = -1 \Rightarrow E_1 = 0$

POLARIZAÇÃO CIRCULAR: $r = 0 \Rightarrow E_1 = -i E_2$ (POL. ESQ.)

$r = \infty \Rightarrow E_1 = i E_2$ (POL. DIREITA)



$$\frac{a}{b} = \left| \frac{1+n}{1-n} \right|$$

Os parâmetros de Stokes

SÃO PARÂMETROS QUE PODEM SER OBTIDOS EXPERIMENTALMENTE ATRAVÉS DE MEDIDAS DE INTENSIDADE ($\langle \vec{S} \rangle$) USANDO ELEMENTOS ÓPTICOS COMO POLARIZADORES E PLACAS DE $\frac{1}{4}$ OU $\frac{1}{2}$ ONDA.

SEJA: $E_1 = a_1 e^{i\delta_1}$ OU $E_+ = a_+ e^{i\delta_+}$

$E_2 = a_2 e^{i\delta_2}$ $\quad$ $E_- = a_- e^{i\delta_-}$

OS PARÂMETROS DE STOKES (DEFINIÇÃO DO JACKSON):

$$S_0 = a_1^2 + a_2^2 = a_+^2 + a_-^2 \rightarrow \text{INTENSIDADE TOTAL DA ONDA}$$

$$S_1 = a_1^2 - a_2^2 = 2a_+ a_- \cos(\delta_+ - \delta_-)$$

$$S_2 = 2a_1 a_2 \cos(\delta_2 - \delta_1) = 2a_+ a_- \sin(\delta_- - \delta_+)$$

$$S_3 = 2a_1 a_2 \sin(\delta_2 - \delta_1) = a_+^2 - a_-^2$$

NOTE QUE:

$$\boxed{S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}$$

LUZ MONOCROMÁTICA

i) POL. LINEAR $\quad \bar{E}_0 = |E_0| e^{i\phi} [\cos\theta\, \hat{\epsilon}_1 + \sin\theta\, \hat{\epsilon}_2]$

$$S_0 = |E_0|^2$$

$$S_1 = |E_0|^2 \cos 2\theta$$

$$S_2 = |E_0|^2 \sin 2\theta$$

$$S_3 = 0$$

ii) CIRC. POL. : $\quad \bar{E}_0^{\pm} = \frac{|E_0|}{\sqrt{2}} (\hat{\epsilon}_1 \pm i\, \hat{\epsilon}_2)$

$$S_0 = |E_0|^2$$

$$S_1 = 0$$

$$S_2 = 0$$

$$S_3 = \pm |E_0|^2$$

(iii) POL. ELÍPTICA:

$$\frac{E_-}{E_+} = r\, e^{i\alpha} \qquad \frac{E_1}{E_2} = i\left(\frac{r e^{i\alpha}+1}{r e^{i\alpha}-1}\right)$$

$$S_0 = |E_1|^2 + |E_2|^2 = I$$

$$S_1 = I\, s \cos\alpha$$

$$S_2 = I\, s \sin\alpha$$

$$S_3 = I\, t$$

ONDE:

$$\left.\begin{aligned} s &= \frac{2r}{1+r^2} \\ t &= \frac{1-r^2}{1+r^2} \end{aligned}\right\} \; s^2 + t^2 = 1$$