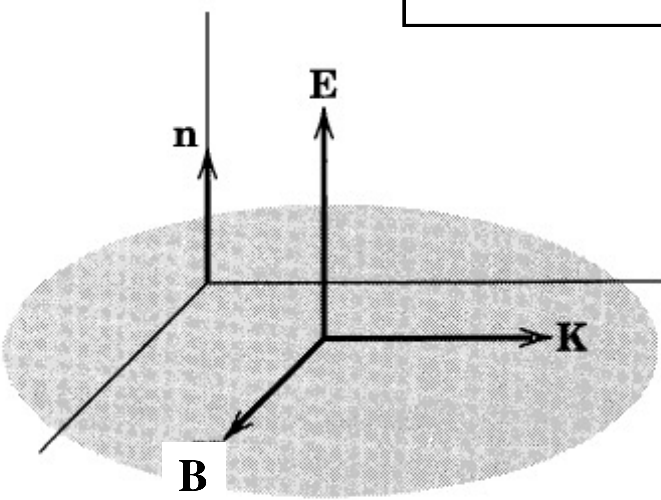
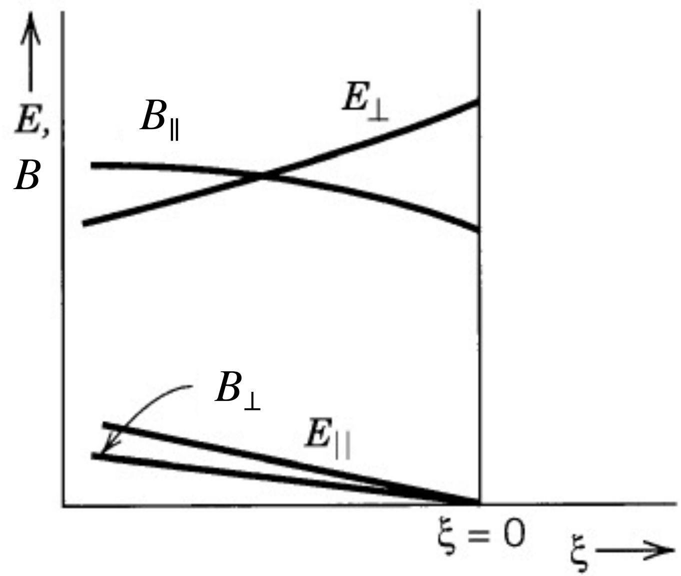
FI 008 – Eletrodinâmica I

1º Semestre de 2021
29/04/2021
Aula 12

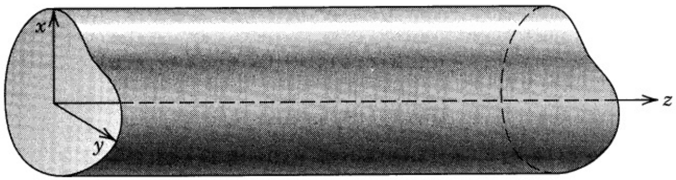
Condições de contorno

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B}_V &= 0 \\ \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_V &= 0 \\ \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}_V &= \frac{\Sigma}{\epsilon_0} \\ \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{B}_V &= \mu_0 \mathbf{K} \end{aligned}}$$





Guias de ondas



$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = \mathbf{E}(x,y)\, e^{i(\pm kz - \omega t)}$$
$$\mathbf{B}(\mathbf{x},t) = \mathbf{B}(x,y)\, e^{i(\pm kz - \omega t)}$$

$$\boldsymbol{\nabla}_t = \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y}$$

Das equações de Maxwell:

$$\boxed{\begin{aligned} \left(\nabla_t^2 + \gamma^2\right)\mathbf{E}(x,y) &= 0 \\ \left(\nabla_t^2 + \gamma^2\right)\mathbf{B}(x,y) &= 0 \end{aligned}}$$

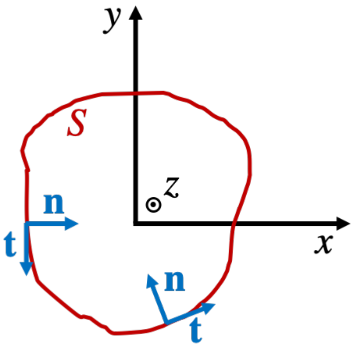
$$\boxed{\gamma^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_t + E_z\hat{\mathbf{z}}$$
$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_t + B_z\hat{\mathbf{z}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \gamma^2\mathbf{B}_t &= i\left[\pm k\boldsymbol{\nabla}_t B_z + \frac{\omega}{c^2}\hat{\mathbf{z}} \times \boldsymbol{\nabla}_t E_z\right] \\ \gamma^2\mathbf{E}_t &= i\left[\pm k\boldsymbol{\nabla}_t E_z - \omega\hat{\mathbf{z}} \times \boldsymbol{\nabla}_t B_z\right] \end{aligned}}$$

As componentes transversais são completamente determinadas pelas componentes z: basta achar E_z e B_z

Seção transversal



Guias de ondas

Os modos TM (B_z=0) e TE (E_z=0) são independentes e devem ser resolvidos separadamente: são problemas de auto-valores.

Modo TM

$$\left(\nabla_t^2 + \gamma^2\right) E_z \;=\; 0$$

$$E_z\big|_S \;=\; 0$$

$$\gamma^2 \mathbf{E}_t \;=\; \pm ik \boldsymbol{\nabla}_t E_z$$

$$\mathbf{B}_t \;=\; \pm\frac{\omega}{c^2 k}\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_t$$

Modo TE

$$\left(\nabla_t^2 + \gamma^2\right) B_z \;=\; 0$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\nabla}_t B_z\big|_S \;=\; 0$$

$$\gamma^2 \mathbf{B}_t \;=\; \pm ik \boldsymbol{\nabla}_t B_z$$

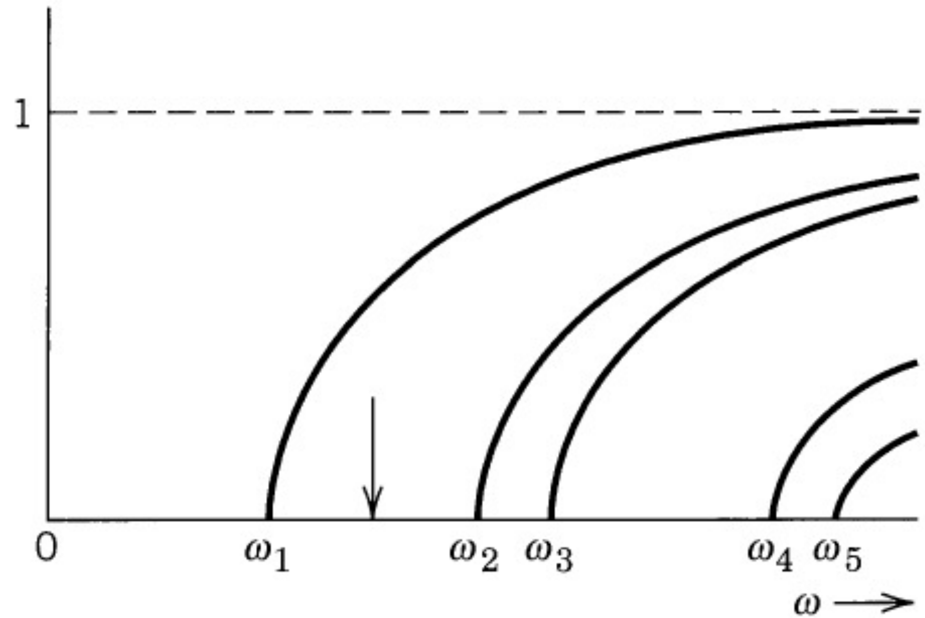
$$\mathbf{E}_t \;=\; \mp\frac{\omega}{k}\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B}_t$$

Relação de dispersão e freq. de corte

$$\gamma \rightarrow \gamma_\lambda \Rightarrow ck_\lambda = \sqrt{\omega^2 - c^2\gamma_\lambda^2} = \sqrt{\omega^2 - \omega_\lambda^2}$$

$$\boxed{\omega_\lambda = c\gamma_\lambda}$$

$$\frac{ck_\lambda}{\omega} = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_\lambda^2}}{\omega}$$



Não há propagação para $\omega < \omega_\lambda$

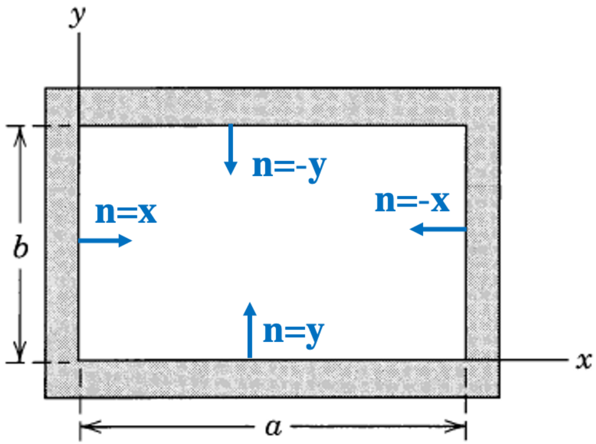
Velocidades de fase e de grupo:

$$v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_\lambda^2}}{\omega} c < c$$

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_\lambda^2}} c > c$$

$$v_g v_p = c^2$$

Um guia de ondas retangular



Modos TM:

$$\left(\nabla_t^2 + \gamma^2\right) E_z = 0$$

$$E_z\big|_S = 0$$

$$E_z = E_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{\pm i(k_{m,n} z - \omega t)}$$

$$E_x = \pm i \frac{k_{m,n}}{\gamma_{m,n}} \left(\frac{m\pi}{a}\right) E_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{\pm i(k_{m,n} z - \omega t)}$$

$$E_y = \pm i \frac{k_{m,n}}{\gamma_{m,n}} \left(\frac{n\pi}{b}\right) E_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{\pm i(k_{m,n} z - \omega t)}$$

$$\mathbf{B}_t = \pm \frac{\omega}{c^2 k_{m,n}} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_t$$

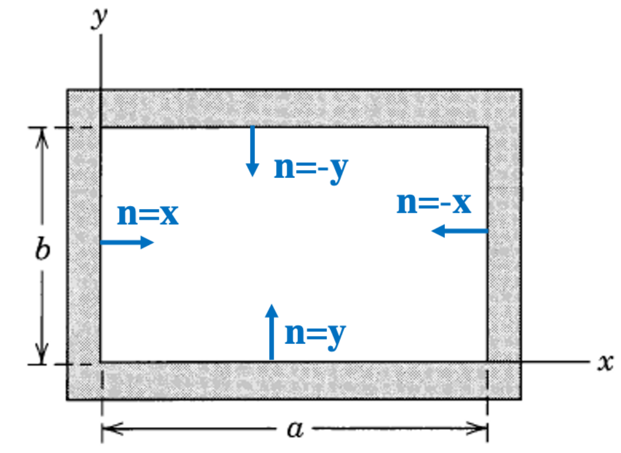
$$\gamma_{m,n} = \pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}, \quad m, n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\omega_{m,n} = \pi c \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}, \quad m, n = 1, 2, 3, \ldots$$

Menor freq. de corte TM:

$$\omega_{1,1} = \pi c \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$$

Um guia de ondas retangular



Modos TE:

$$\left(\nabla_t^2 + \gamma^2\right) B_z = 0$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\nabla}_t B_z\big|_S = 0$$

$$B_z = B_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{\pm i(k_{m,n} z - \omega t)}$$

$$\gamma_{m,n} = \pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}, \quad m,n = 0,1,2,3,\ldots$$

$$\omega_{m,n} = \pi c\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}, \quad m,n = 0,1,2,3,\ldots$$

$$\boxed{(m + n \neq 0)}$$

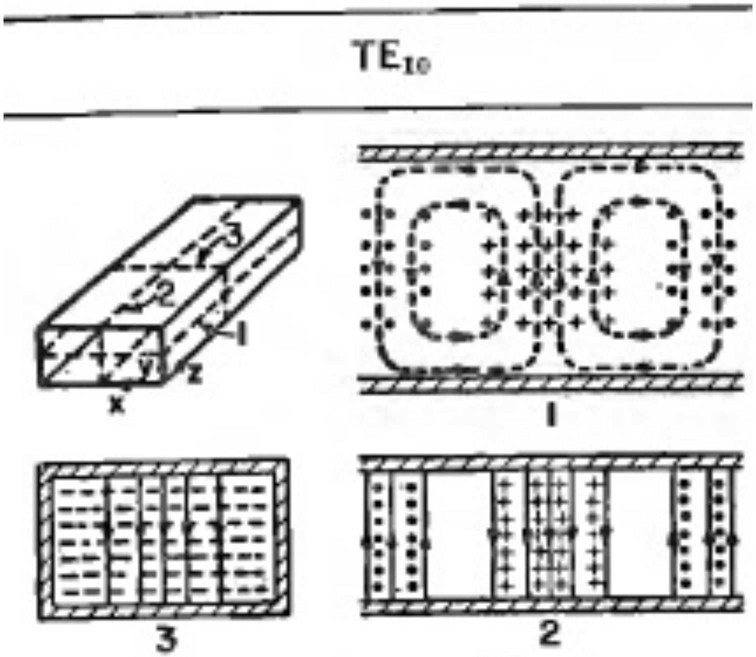
Menor freq. de corte TE:

$$\omega_{1,0} = \frac{\pi c}{a}, \quad (a > b)$$

$$B_z = B_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{i(k_{1,0} z - \omega t)}$$

$$B_x = -i\left(\frac{k_{1,0} a}{\pi}\right) B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{i(k_{1,0} z - \omega t)}$$

$$E_y = icB_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{i(k_{1,0} z - \omega t)}$$

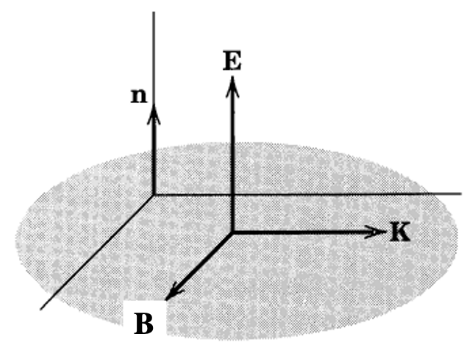


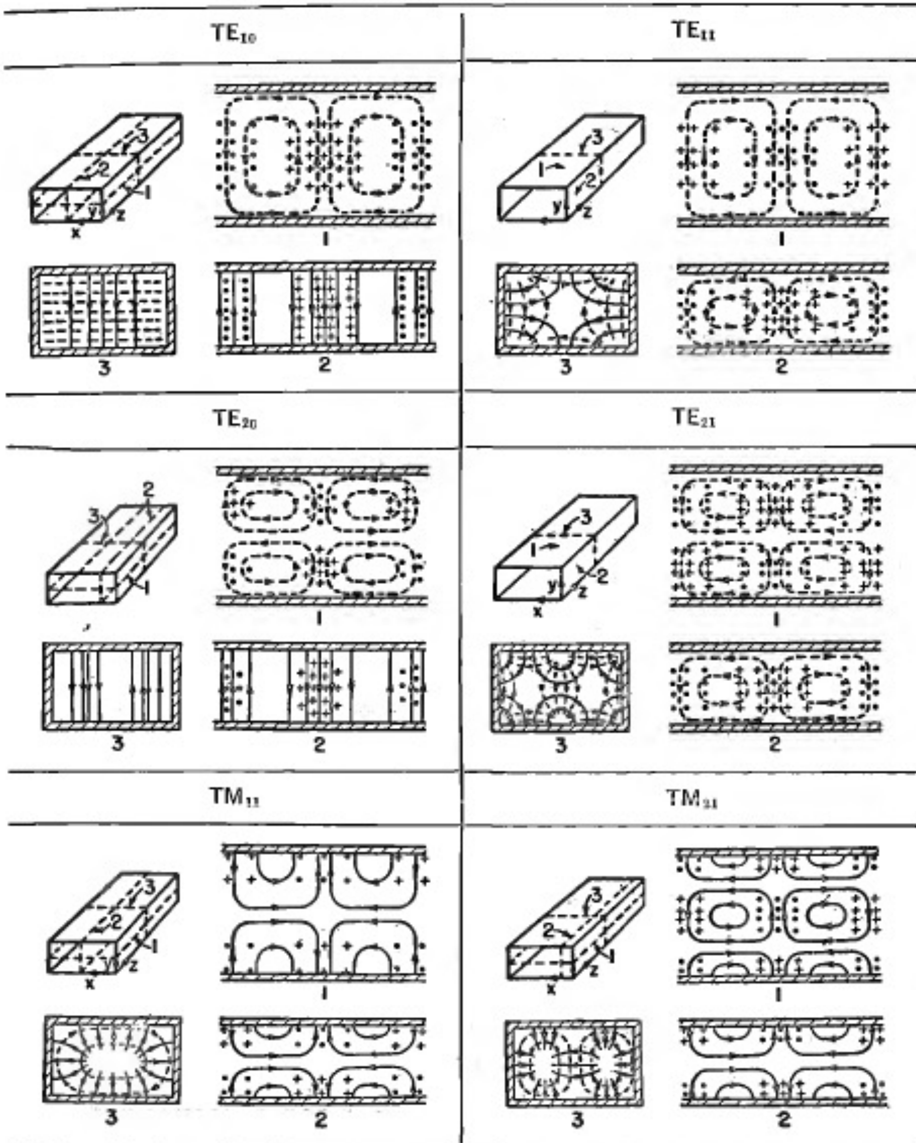
Campo elétrico **E**: linhas contínuas
Campo magnético **B**: linhas tracejadas

Modo $TE_{1,0}$

$$
\begin{aligned}
B_z &= B_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{i(k_{1,0} z - \omega t)} \\
B_x &= -i\left(\frac{k_{1,0} a}{\pi}\right) B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{i(k_{1,0} z - \omega t)} \\
E_y &= i c B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{i(k_{1,0} z - \omega t)}
\end{aligned}
$$

Observe as condições de contorno

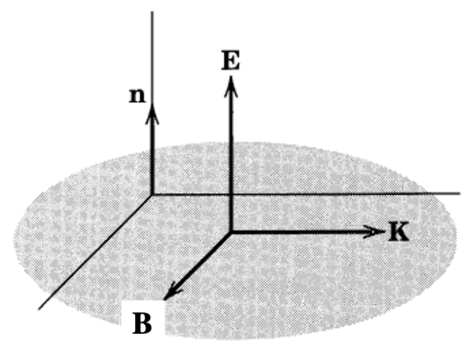




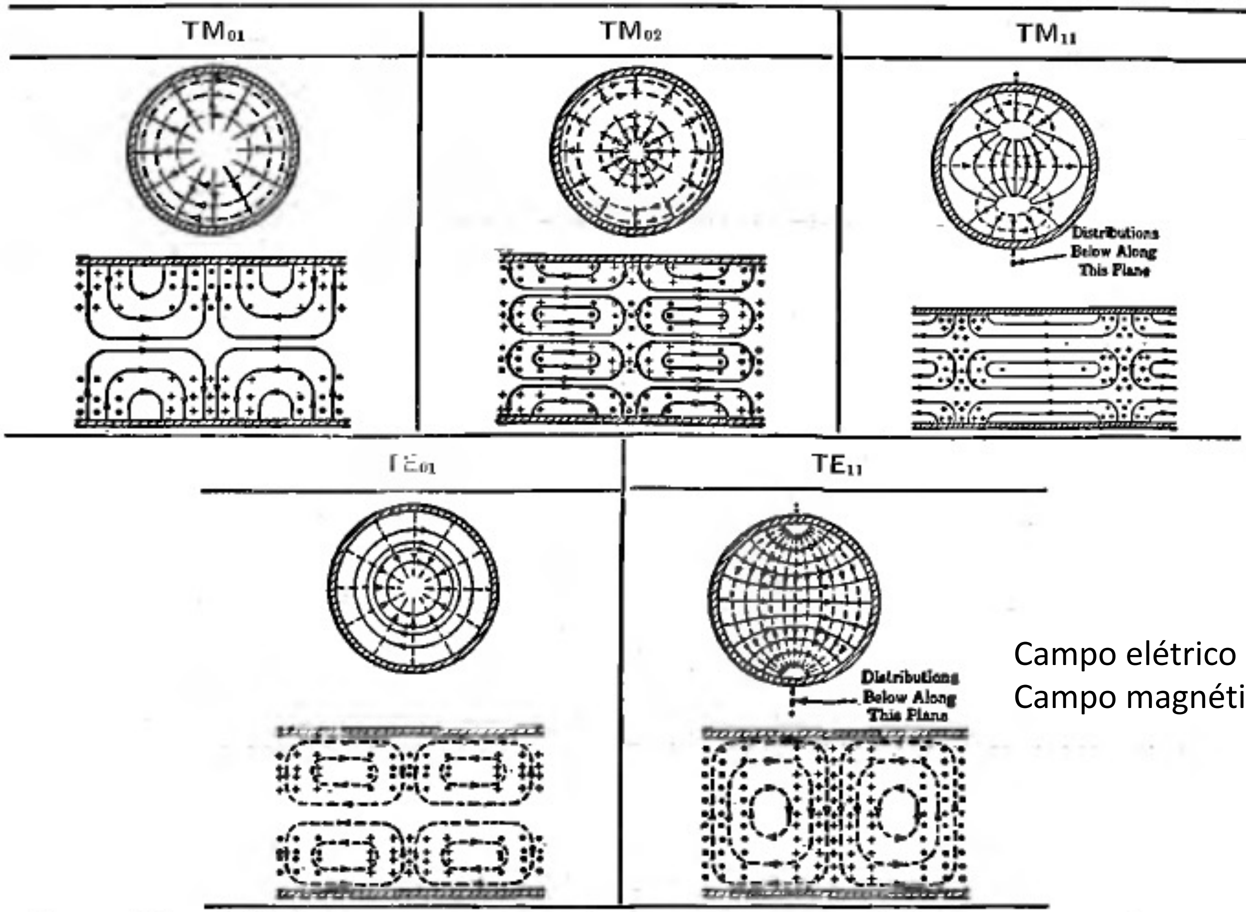
Campo elétrico **E**: linhas contínuas

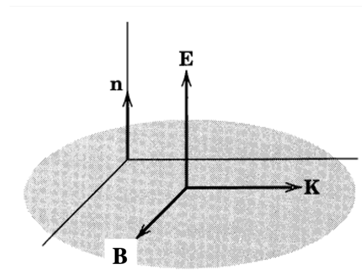
Campo magnético **B**: linhas tracejadas

Observe as condições de contorno



Guia com seção reta circular





Campo elétrico **E**: linhas contínuas
Campo magnético **B**: linhas tracejadas

Potência e energia em guias de ondas

P = potência propagada através da seção reta do guia.

dU/dz = energia dos campos por unidade de comprimento do guia.

$$P_{TM} = \pm\frac{\omega\sqrt{\omega^2-\omega_\lambda^2}}{2\mu_0 c\omega_\lambda^2}\int_{S.R.}|E_z|^2\,da,$$

$$P_{TE} = \pm\frac{c\omega\sqrt{\omega^2-\omega_\lambda^2}}{2\mu_0\omega_\lambda^2}\int_{S.R.}|B_z|^2\,da.$$

$$\frac{dU_{TM}}{dz} = \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\omega^2}{\omega_\lambda^2}\int_{S.R.}|E_z|^2\,da,$$

$$\frac{dU_{TE}}{dz} = \frac{1}{2\mu_0}\frac{\omega^2}{\omega_\lambda^2}\int_{S.R.}|B_z|^2\,da.$$

$$\boxed{\frac{P}{dU/dz} = \pm\frac{\sqrt{\omega^2-\omega_\lambda^2}}{\omega}c = v_g}$$

1. O elétron tem carga e e um momento magnético intrínseco (oriundo do spin) cujo módulo chamaremos de M.

(a) Escreva os campos elétrico $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ e magnético $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ criados por um elétron em repouso na origem, supondo que ele é uma partícula pontual. Suponha que o momento magnético aponte na direção $\hat{\mathbf{z}}$.

(b) Considere um modelo simples para o elétron em que ele tenha um raio muito pequeno R, tal que os campos do item (a) valem para $r > R$ mas se anulam para $r < R$ ($r = |\mathbf{x}|$). Obtenha o momento angular total dos campos criados pelo elétron.

(c) O momento magnético intrínseco do elétron é $M = e\hbar/2m$, onde m é a sua massa e $\hbar$ é a constante de Planck dividida por 2π. Suponha que R seja igual ao chamado raio clássico do elétron

$$R = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{mc^2}.$$

Nesse caso, qual é o módulo do momento angular dos campos? Compare com o momento angular de spin do elétron, que é $S = \hbar/2$.

Caso necessário, use

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{r}} &= \sin\theta\cos\phi\hat{\mathbf{x}} + \sin\theta\sin\phi\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\hat{\mathbf{z}} \\
\hat{\boldsymbol{\theta}} &= \cos\theta\cos\phi\hat{\mathbf{x}} + \cos\theta\sin\phi\hat{\mathbf{y}} - \sin\theta\hat{\mathbf{z}} \\
\hat{\boldsymbol{\phi}} &= -\sin\phi\hat{\mathbf{x}} + \cos\phi\hat{\mathbf{y}} \\
\int_0^\pi \sin^3\theta d\theta &= \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

(a) $\vec{E}(\vec{x}) = \dfrac{e}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{\vec{x}}{r^3} = \dfrac{e}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{\hat{r}}{r^2}$

$\vec{B}(\vec{x}) = \dfrac{\mu_0 M}{4\pi r^3}(2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta})$ $(\vec{m} = m\hat{z})$

(b) $\vec{l} = \vec{x}\times\vec{p} = \epsilon_0\vec{x}\times(\vec{E}\times\vec{B}) \Rightarrow \vec{L} = \int_{r>R}\vec{l}\,d^3x$

$$\vec{\ell} = \cancel{\epsilon_0}\, \vec{x} \times \left[\frac{e}{4\pi \cancel{\epsilon_0}} \frac{\hat{r}}{r^2} \times \left(\frac{\mu_0 M}{4\pi r^3} \right) (2\cos\theta\, \hat{r} + \sin\theta\, \hat{\theta}) \right]$$

$$= \frac{\mu_0 e M}{(4\pi)^2 r^5} \underbrace{\vec{x}}_{r\hat{r}} \times \left[\hat{r} \times (\sin\theta\, \hat{\theta}) \right]$$

$$= \frac{\mu_0 e M}{(4\pi)^2 r^4} \hat{r} \times \left[\sin\theta\, \hat{\phi} \right] = -\frac{\mu_0 e M}{(4\pi)^2 r^4} \sin\theta\, \underline{\hat{\theta}}$$

$$\vec{L} = \frac{\mu_0 e M}{(4\pi)^2} \int \left(-\frac{\sin\theta}{r^4} \right) \left[\cos\theta \overset{0}{\cancel{\cos\phi}}\, \hat{x} + \cos\theta \overset{0}{\cancel{\sin\phi}}\, \hat{y} - \sin\theta\, \hat{z} \right] d^3x$$

$$\int d^3x \Rightarrow \int_R^\infty r^2\, dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta$$

$$\vec{L} = \frac{\mu_0 e M}{(4\pi)^2} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} \int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta\, (2\pi)\hat{z} = \frac{\mu_0 e M}{6\pi R} \hat{z}$$

(c) $L = \frac{\mu_0 \cancel{e}}{6\cancel{\pi}}\left(\frac{\cancel{e}\hbar}{2m}\right)\frac{4\cancel{\pi}\epsilon_0 mc^2}{\cancel{e^2}} = \frac{\hbar}{3}$

COMPARE COM $\mu_e = \frac{\hbar}{2}$

2. Um cabo coaxial pode sustentar uma onda eletromagnética transversal na região entre seu raio interno a e seu raio externo b, onde há vácuo. Em coordenadas cilíndricas, com eixo z coincidente com o eixo do cabo e para $a \leq \rho \leq b$, a onda pode ser escrita como

$$\mathbf{E}(\rho, \phi, z, t) = E(\rho)\, e^{i(kz-\omega t)}\hat{\boldsymbol{\rho}},$$
$$\mathbf{B}(\rho, \phi, z, t) = B(\rho)\, e^{i(kz-\omega t)}\hat{\boldsymbol{\phi}},$$

onde $\omega = ck$.

(a) Mostre que a solução acima é possível, isto é os campos obedecem **a todas as equações de Maxwell no vácuo**, e, assim, encontre as funções $E(\rho)$ e $B(\rho)$ a menos de **uma (e apenas uma)** constante indeterminada.

(b) Encontre a potência eletromagnética média que atravessa a seção reta transversal $a \leq \rho \leq b$.

(c) Encontre potenciais $\Phi(\mathbf{x}, t)$ e $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ para a onda e mostre que eles de fato correspondem aos campos elétrico e magnético da mesma. Qual é o calibre dos seus potenciais?

(a) $\bar{\nabla}\cdot\bar{B} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\rho}\frac{\partial B(\rho)}{\partial \phi} e^{(ikz-\omega t)} = 0$

$\bar{\nabla}\cdot\bar{E} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\rho}\underbrace{\frac{\partial[\rho E(\rho)]}{\partial \rho}}_{0} e^{i(kz-\omega t)} = 0$

$\rho E(\rho) = K = \text{CONST.} \Rightarrow \boxed{E(\rho) = \frac{K}{\rho}}$ $K \in \mathbb{C}$

$\bar{\nabla}\times\bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = -(-i\omega)\bar{B} = i\omega\bar{B}$

$\bar{\nabla}\times\bar{E} = E(\rho)\frac{\partial}{\partial z}\left(e^{i(kz-\omega t)}\right)\hat{\phi} = \cancel{i}k\, E(\rho)\cancel{e^{i(kz-\omega t)}}\hat{\phi} = \cancel{i}\omega\, B(\rho)\cancel{e^{i()}}\hat{\phi}$

$\Rightarrow B(\rho) = \frac{k}{\omega}E(\rho) = \frac{1}{c}E(\rho) = \frac{K}{c\rho}$

$$\bar{\nabla}\times\bar{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = -i\frac{\omega}{c^2}\bar{E} = -i\frac{k}{c}\bar{E}$$

$$\bar{\nabla}\times\bar{B} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\left[\rho B(\rho)\right]}{\partial \rho} e^{i(\;)}\hat{z} - B(\rho)\frac{\partial}{\partial z}\left[e^{i(kz-\omega t)}\right]\hat{\rho}$$

$$= -ik\,B(\rho)\,e^{i(\;)}\hat{\rho} = -ik\left(\frac{K}{c\rho}\right)e^{i(\;)}\hat{\rho}$$

$$-i\frac{k}{c}\bar{E} = -ik\left(\frac{K}{c\rho}\right)e^{i(\;)}\hat{\rho} \checkmark$$

(b) $\langle \bar{S}\rangle = \frac{1}{2\mu_0}\mathrm{Re}\left[\vec{E}\times\vec{B}^*\right] = \frac{1}{2\mu_0}\left[E(\rho)\hat{\rho}\times B^*(\rho)\hat{\phi}\right] =$

$$= \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{K}{\rho}\right)\left(\frac{K^*}{c\rho}\right)\hat{z} = \frac{|K|^2}{2\mu_0 c}\frac{\hat{z}}{\rho^2}$$

$$P = \int_{S.R.}\langle\vec{S}\rangle\cdot\hat{z} = \int_a^b \cancel{\rho}\,d\rho\int_0^{2\pi}d\phi\,\frac{|K|^2}{2\mu_0 c}\frac{1}{\rho^{\cancel{2}}} = \frac{|K|^2(2\pi)}{2\mu_0 c}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\boxed{P = \frac{\pi|K|^2}{\mu_0 c}\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

(c) $\boxed{\Phi = 0}$:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = i\omega \vec{A} = E(s)\, e^{i(kz-\omega t)}\, \hat{s}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{A} = \frac{K}{i\omega s}\, e^{i(kz-\omega t)}\, \hat{s}}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{K}{i\omega s} \frac{\partial}{\partial z}\left[e^{i(kz-\omega t)}\right] \hat{\phi} = \frac{K k}{\omega s} e^{i(kz-\omega t)}\, \hat{\phi}$$

$$\frac{1}{c}$$

$$= \frac{K}{c s} e^{i(kz-\omega t)}\, \hat{\phi} = \vec{B} \checkmark$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{i\omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0}$$