

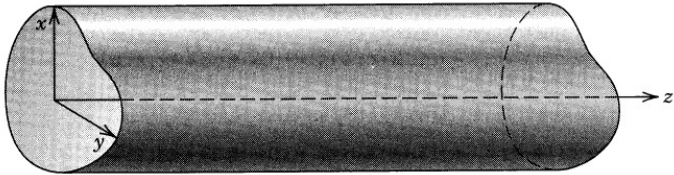
FI 008 – Eletrodinâmica I

1º Semestre de 2021

04/05/2021

Aula 13

Guias de ondas



$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}(x, y) e^{i(\pm kz - \omega t)}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}(x, y) e^{i(\pm kz - \omega t)}$$

$$\nabla_t = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_t + E_z \hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_t + B_z \hat{\mathbf{z}}$$

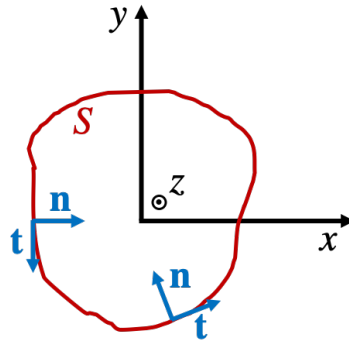
Modo TM ($B_z=0$)

$$(\nabla_t^2 + \gamma^2) E_z = 0$$

$$E_z|_S = 0$$

$$\gamma^2 \mathbf{E}_t = \pm ik \nabla_t E_z$$

$$\mathbf{B}_t = \pm \frac{\omega}{c^2 k} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_t$$



Modo TE ($E_z=0$)

$$(\nabla_t^2 + \gamma^2) B_z = 0$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla_t B_z|_S = 0$$

$$\gamma^2 \mathbf{B}_t = \pm ik \nabla_t B_z$$

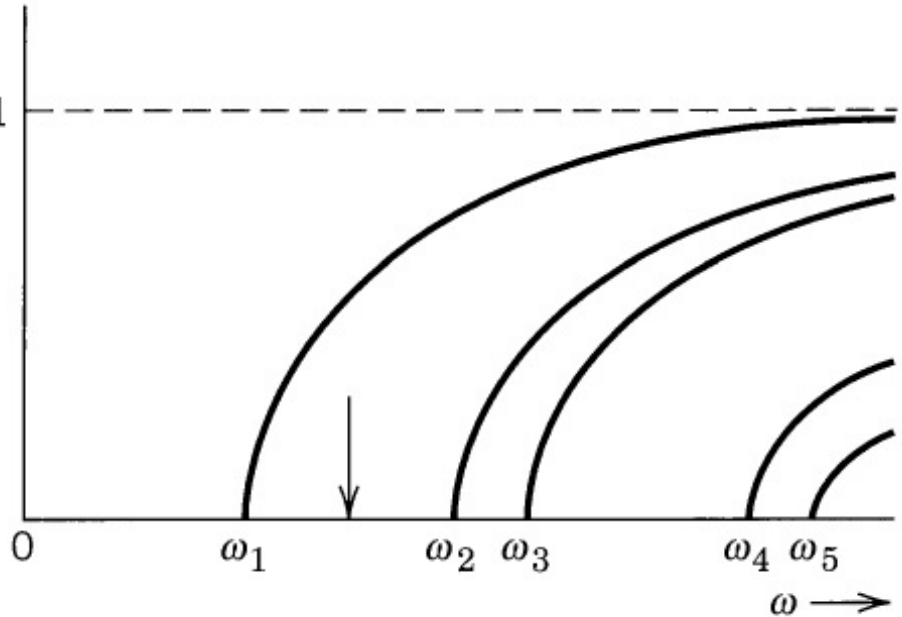
$$\mathbf{E}_t = \mp \frac{\omega}{k} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B}_t$$

$$\gamma^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2$$

Só há propagação se a frequência for maior que a **frequência de corte**.

$$\frac{ck_\lambda}{\omega} = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_\lambda^2}}{\omega}$$

$$\omega_\lambda = c\gamma_\lambda$$



Velocidades de fase
e de grupo:

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_\lambda^2}} c > c$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_\lambda^2}}{\omega} c < c$$

Potência e energia em guias de ondas

P = potência propagada
através da seção reta do guia.

dU/dz = energia dos campos
por unidade de comprimento
do guia.

$$P_{TM} = \pm \frac{\omega \sqrt{\omega^2 - \omega_\lambda^2}}{2\mu_0 c \omega_\lambda^2} \int_{S.R.} |E_z|^2 da,$$

$$P_{TE} = \pm \frac{c \omega \sqrt{\omega^2 - \omega_\lambda^2}}{2\mu_0 \omega_\lambda^2} \int_{S.R.} |B_z|^2 da.$$

$$\frac{dU_{TM}}{dz} = \frac{\epsilon_0 \omega^2}{2 \omega_\lambda^2} \int_{S.R.} |E_z|^2 da,$$

$$\frac{dU_{TE}}{dz} = \frac{1}{2\mu_0} \frac{\omega^2}{\omega_\lambda^2} \int_{S.R.} |B_z|^2 da.$$

$$\frac{P}{dU/dz} = \pm \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_\lambda^2}}{\omega} c = v_g$$

Atenuação em guias de ondas

Atenuação da potência propagada

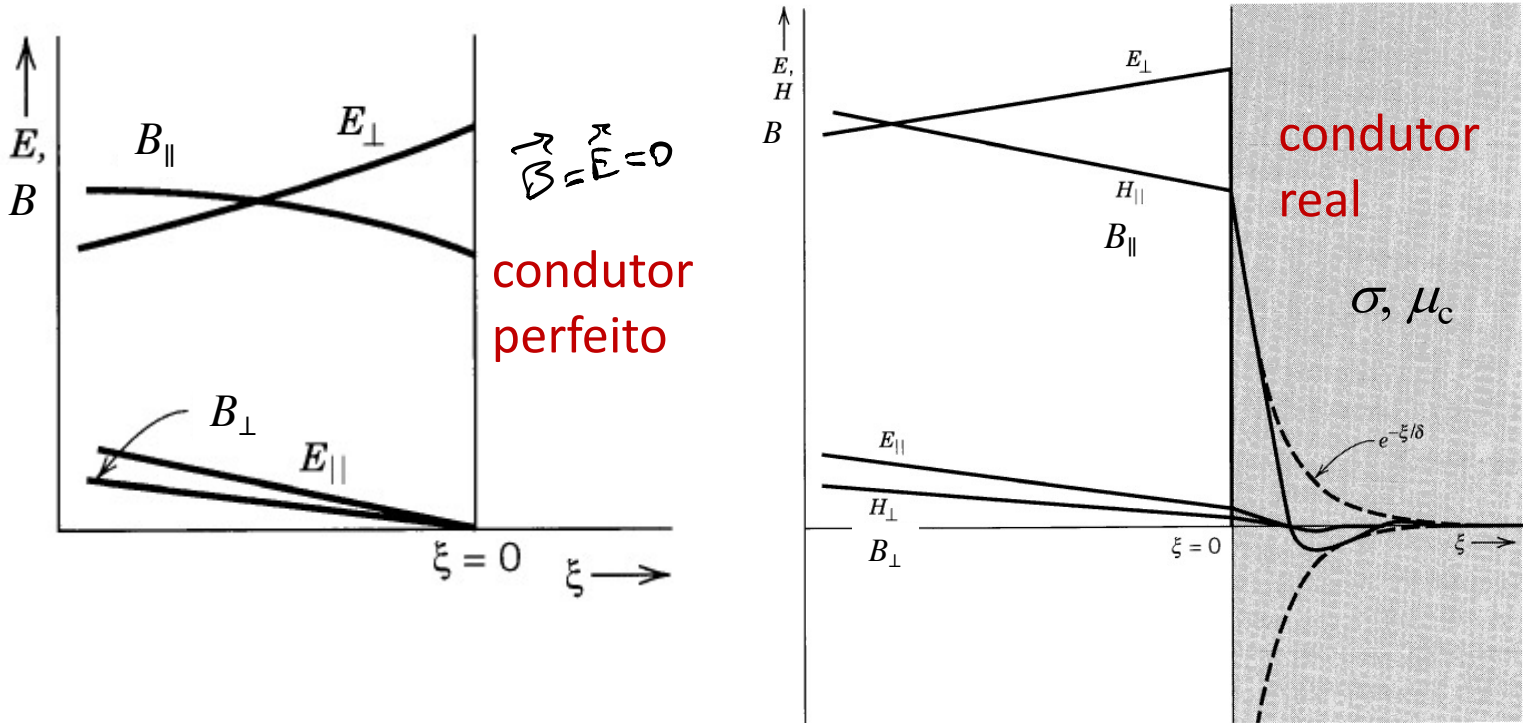
Atenuação dos campos:

$$k_\lambda \rightarrow (k_\lambda + \Delta k_\lambda) + i\beta_\lambda$$
$$e^{ik_\lambda z} \rightarrow e^{i(k_\lambda + \Delta k_\lambda)z} e^{-\beta_\lambda z}$$

Atenuação da potência propagada:

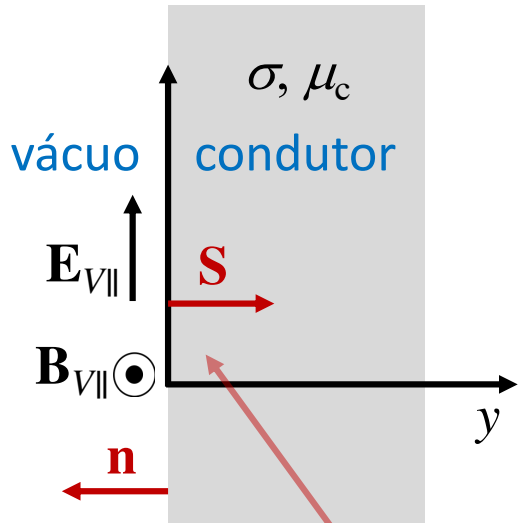
$$P(z) = P_0 e^{-2\beta_\lambda z} \Rightarrow \boxed{\beta_\lambda = -\frac{1}{2P} \frac{dP}{dz}}$$

Condutor perfeito x Condutor real



Aparecem componentes \mathbf{B}_{\parallel} e \mathbf{E}_{\parallel} dentro do condutor e, com isso, uma componente finita de $\mathbf{E}_{V\parallel}$ imediatamente fora do condutor. Junto com $\mathbf{B}_{V\parallel}$, há um vetor de Poynting apontando para dentro do condutor.

Campos no condutor



$$\mathbf{H}_c(y) = \mathbf{H}_{c\parallel} e^{iy/\delta} e^{-y/\delta}$$

$$\mathbf{E}_c(y) = \frac{1-i}{\sigma\delta} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_{c\parallel} e^{iy/\delta} e^{-y/\delta}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_c \sigma \omega}} \sim 10^{-4} \text{ cm (Cu, } f \sim 1 \text{ GHz)}$$

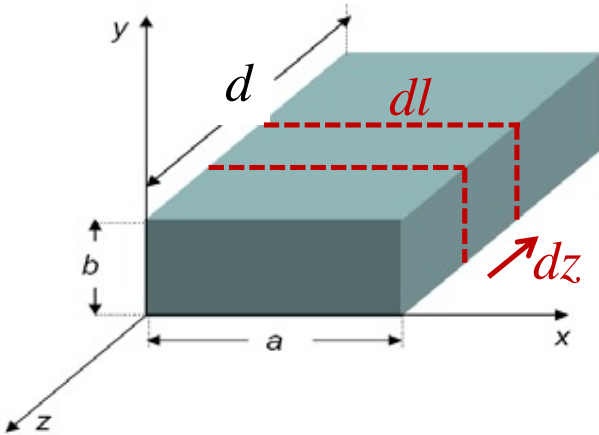
$$\mathbf{H}_{c\parallel} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_{V\parallel}$$

$$\mathbf{E}_c(y) = \frac{1-i}{\mu_0 \sigma \delta} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{B}_{V\parallel} e^{iy/\delta} e^{-y/\delta}$$

$$\mathbf{E}_{V\parallel} = \mathbf{E}_{c\parallel} = \frac{1-i}{\mu_0 \sigma \delta} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{B}_{V\parallel}$$

$$\langle \mathbf{S}_{\text{loss}} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re} (\mathbf{E}_{V\parallel} \times \mathbf{B}_{V\parallel}) = -\frac{\hat{\mathbf{n}}}{2\mu_0^2 \sigma \delta} |\mathbf{B}_{V\parallel}|^2$$

Perdas ôhmicas



$$\frac{dP_{\text{loss}}}{da} = -\hat{\mathbf{n}} \cdot \langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2\mu_0^2\sigma\delta} |\mathbf{B}_{V\parallel}|^2$$

$$-\frac{dP}{dz} = \frac{1}{2\mu_0^2\sigma\delta} \oint_{\text{S.R.}} |\mathbf{B}_{V\parallel}|^2 dl$$

$$\beta_\lambda = -\frac{1}{2P_0} \frac{dP}{dz}$$

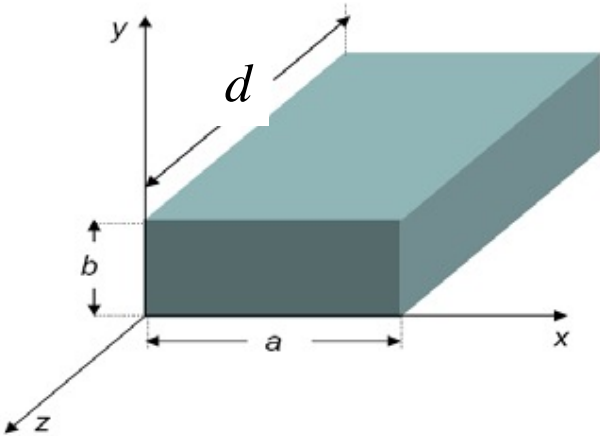
Atenuação em guias de ondas

$$\beta_\lambda = \frac{c}{2\mu_0\sigma\delta_\lambda} \frac{\omega \left(\frac{\omega}{\omega_\lambda}\right)^{1/2}}{\omega_\lambda^2 \sqrt{\omega^2 - \omega_\lambda^2}} \frac{\oint \left|\frac{\partial E_z}{\partial n}\right|^2 dl}{\int_{S.R.} |E_z|^2 da} \quad (\text{modos TM})$$

$$\beta_\lambda = \frac{1}{2\mu_0 c \sigma \delta_\lambda} \left[\left(\frac{\omega}{\omega_\lambda}\right) \left(\frac{\omega^2}{\omega_\lambda^2} - 1\right) \right]^{-1/2} \frac{\oint \left[\frac{c^2}{\omega_\lambda^4} (\omega^2 - \omega_\lambda^2) |\hat{\mathbf{n}} \times \nabla_t B_z|^2 + |B_z|^2 \right] dl}{\int_{S.R.} |B_z|^2 da} \quad (\text{modos TE})$$

$$\delta_\lambda = \sqrt{\frac{2}{\mu_c \sigma \omega_\lambda}}$$

Cavidades ressonantes



Uma maneira de criar uma cavidade ressonante é “tampar” um guia de ondas.

Com isso, ondas propagantes viram ondas **estacionárias**:

$$e^{\pm ikz} \rightarrow A \cos(kz) + B \sin(kz)$$

Feito isso, basta impor as **condições de contorno nas tampas**.

Só há soluções para valores **discretos de frequências**: modos de oscilação da cavidade. Como estados estacionários em Mecânica Quântica.

Modos em cavidades retangulares

$$E_z(\mathbf{x}, t) = E_z(x, y) \cos\left(\frac{p\pi z}{d}\right) e^{-i\omega t} \quad (p = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

Modos TM: $\mathbf{E}_t(\mathbf{x}, t) = -\frac{p\pi}{d\gamma^2} \sin\left(\frac{p\pi z}{d}\right) \nabla_t E_z(x, y) e^{-i\omega t}$

$$\mathbf{B}_t(\mathbf{x}, t) = \frac{i\omega}{\gamma^2 c^2} \cos\left(\frac{p\pi z}{d}\right) \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t E_z(x, y) e^{-i\omega t}$$

$$B_z(\mathbf{x}, t) = B_z(x, y) \sin\left(\frac{p\pi z}{d}\right) e^{-i\omega t} \quad (p = 1, 2, 3, \dots)$$

Modos TE:

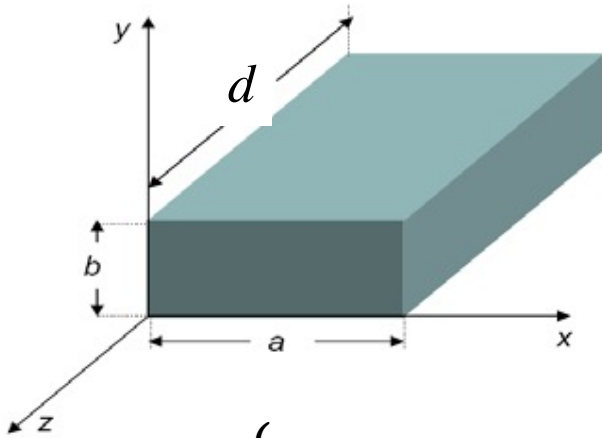
$$\mathbf{B}_t(\mathbf{x}, t) = \frac{p\pi}{d\gamma^2} \cos\left(\frac{p\pi z}{d}\right) \nabla_t B_z(x, y) e^{-i\omega t}$$

$$\mathbf{E}_t(\mathbf{x}, t) = -\frac{i\omega}{\gamma^2} \sin\left(\frac{p\pi z}{d}\right) \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t B_z(x, y) e^{-i\omega t}$$

$$\omega_{\lambda, p} = c \left[\gamma_\lambda^2 + \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2 \right]^{1/2}$$

\uparrow
 k_z

Cavidades retangulares



$$\omega_{m,n,p} = \pi c \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 + \left(\frac{p}{d} \right)^2 \right]^{1/2}$$

Menor frequência de corte TM:

$$\text{TM : } \begin{cases} m = 1, 2, 3, \dots \\ n = 1, 2, 3, \dots \\ p = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$\omega_{1,1,0}^{\text{TM}} = \pi c \left[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right]^{1/2}$$

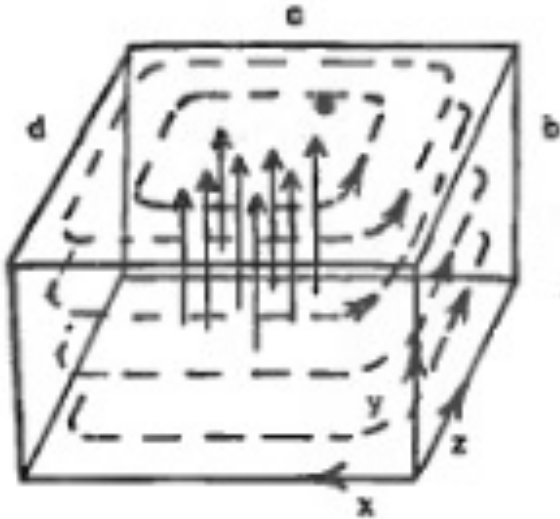
Menor frequência de corte TE:

$$\text{TE : } \begin{cases} m = 0, 1, 2, \dots \\ n = 0, 1, 2, \dots \\ m + n \neq 0 \\ p = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

$$\omega_{1,0,1}^{\text{TE}} = \pi c \left[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{d^2} \right]^{1/2} \quad (a > b)$$

Cavidades retangulares

TE_{101} RECTANGULAR RESONATOR



Campo elétrico **E**: linhas contínuas

Campo magnético **B**: linhas tracejadas

