FI 008 – Eletrodinâmica I

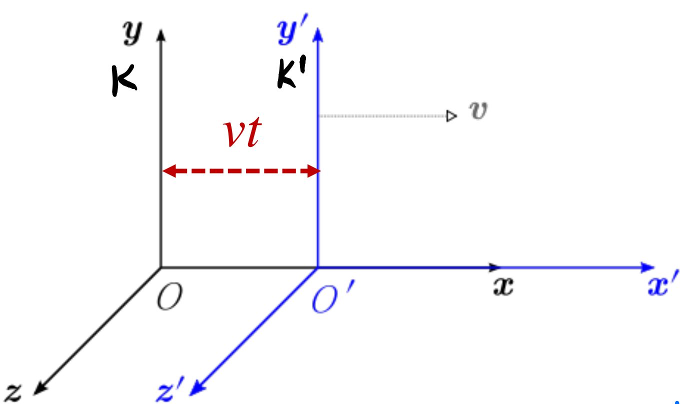
1º Semestre de 2020
14/05/2020
Aula 18

Relatividade restrita

Princípio da relatividade de Galileu

Princípio da relatividade de Galileu: As equações da física (da mecânica, no contexto de Galileu) têm a mesma forma em todos os referenciais inerciais (covariância das equações).

Transformações de Galileu:



$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x' + vt' \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases}$$

DE MANEIRA GERAL, SE K' SE MOVE COM $\vec{v}$ EM RELAÇÃO A K.:

$$\vec{x} = \vec{x}' + \vec{v}t' \Longleftarrow \vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}t \; ; \; t' = t$$

Sistema newtoniano de N partículas

$$m_i \frac{d\mathbf{v}_i'}{dt'} = -\boldsymbol{\nabla}_i' \sum_{j=1, j\neq i}^{N} V_{ij}\left(\left|\mathbf{x}_i' - \mathbf{x}_j'\right|\right) \quad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

EM K'

$$\frac{d\vec{x}_i{}'}{dt'} = \frac{d\vec{x}_i{}'}{dt} = \frac{d\vec{x}_i}{dt} - \vec{v} \quad ; \quad \frac{d^2\vec{x}_i{}'}{dt'^2} = \frac{d^2\vec{x}_i{}'}{dt^2} = \frac{d^2\vec{x}_i}{dt^2}$$

$$|\bar{x}_i' - x_j'| = |\bar{x}_i - \bar{x}_j|$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i'} = \sum_j \underbrace{\frac{\partial x_j}{\partial x_i'}}_{\delta_{ij}} \frac{\partial}{\partial x_j} + \cancel{\frac{\partial t}{\partial x_i'}}^{\,0} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \Rightarrow \vec{\nabla}' = \vec{\nabla}$$

$$\Rightarrow m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = -\vec{\nabla}_i \sum_{j=1, j\neq i}^{N} V_{ij}\left(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|\right) \Rightarrow \text{COVARIANTE.}$$

Eletromagnetismo

Equação de onda: $$\left(\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i'^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\right)\psi = 0$$

COMO A EQ. DE ONDA SE TRANSFORMA SOB TR. GALILEU?

$$\vec{\nabla} = \vec{\nabla}'$$

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \sum_i \underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial t'}}_{v_i} \frac{\partial}{\partial x_i} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial t}{\partial t'}}}_{1} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t'^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)^2$$

PORTANTO, EM K:

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)^2\right]\psi = 0$$

NÃO É COVARIANTE

ISSO NÃO É SURPREENDENTE

POIS c = VELOCIDADE DA ONDA EM RELAÇÃO AO MEIO (NEWTONIANA)

$$\vec{v} = v\hat{x} \qquad \psi = e^{i(kx-\omega t)}$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\right]\psi = 0$$

$$\Rightarrow \left[-k^2 - \frac{1}{c^2}\left(-i\omega + ivk\right)^2\right]\psi = 0$$

$$\left[-k^2 + \frac{1}{c^2}\left(\omega - vk\right)^2\right]\psi = 0$$

$$\Rightarrow (\omega - vk)^2 = c^2 k^2$$

$$\omega - vk = \pm ck$$

$$\omega = \underbrace{(\pm c + v)}k$$

VELOCIDADE DA ONDA É ACRESCIDA DE v, COMO JÁ EXPLICADO.

Postulados da relatividade restrita

1. As equações da física (mecânicas e eletromagnetícas) têm a mesma forma em todos os referenciais inerciais (princípio de relatividade de Einstein).
2. A velocidade da luz no vácuo é a mesma em todos os referenciais inerciais.

2'. (alternativa) Em cada referencial inercial, existe uma velocidade limite para objetos físicos.

2' NÃO FAZ REFERÊNCIA À LUZ OU AO ELETROMAGNETISMO

As transformações de Lorentz

UMA FRENTE DE ONDA ESFÉRICA QUE PARTE (COMEÇA) EM O, O' EM $t = t' = 0$. UMA CASCA ESFÉRICA CENTRADA EM O, O' E CUJO RAIO CRESCE COM VELOCIDADE $\underline{c}$.

EM K: $x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \Rightarrow c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \quad (1)$

EM K': $x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \Rightarrow c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0 \quad (2)$

QUEREMOS AS LEIS DE TRANSFORMAÇÃO COMPATÍVEIS COM (1) E (2)

$$\left.\begin{aligned} x' &= f_x(x, y, z, t) \\ y' &= f_y(x, y, z, t) \\ z' &= f_z(x, y, z, t) \\ t' &= f_t(x, y, z, t) \end{aligned}\right\}$$

ARGUMENTOS BASEADOS EM HOMOGENEIDADE DO ESPAÇO E DO TEMPO E ISOTROPIA, PODE-SE MOSTRAR QUE AS TRANSFORMAÇÕES TEM QUE SER LINEARES

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = \lambda(\vec{v})[c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2]$$

$\lambda(\vec{v})$ É UMA CONSTANTE DE ESCALA

$$K \to K' \quad (\vec{v}) \qquad K' \to K \quad (-\vec{v})$$

DEVIDO À SIMETRIA ENTRE K E $K' \Rightarrow \lambda(\vec{v}) = 1$

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 \Rightarrow (x^{0'})^2 - (x^{1'})^2 - (x^{2'})^2 - (x^{3'})^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$$

SE K' SE MOVE COM $\vec{v} = v\hat{x}$ EM RELAÇÃO A K, NÃO ESPERO (POR SIMETRIA) QUE y E z SE MODIFIQUEM:

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2 \Rightarrow \boxed{(x^{0'})^2 - (x^{1'})^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2} \quad (3)$$

SISTEMA DE COORDENADAS: $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$

(x^μ)

VAMOS USAR $\mu, \nu, \rho, = 0, 1, 2, 3 \to$ COORDENADAS NO ESPAÇO-TEMPO

VAMOS USAR LETRAS LATINAS (i, j, k) PARA O ESPAÇO

A INVARIÂNCIA DA NORMA NO ESPAÇO-TEMPO PODE SER ANALISADA USANDO QUE UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR GENÉRICA PODE SER PARAMETRIZADA POR UM ÚNICO PARÂMETRO ξ:

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\xi & -\sinh\xi \\ -\sinh\xi & \cosh\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} c = \cosh\xi \\ s = \sinh\xi \end{array}$$

(3) É AUTOMATICAMENTE OBEDECIDA:

$$(x^{0'})^2 - (x^{1'})^2 = (c\,x^0 - s\,x^1)^2 - (-s\,x^0 + c\,x^1)^2$$

$$= c^2 (x^0)^2 + s^2 (x^1)^2 - 2\,\cancel{sc\,x^0\,x^1}$$

$$- s^2 (x^0)^2 - c^2 (x^1)^2 + \cancel{2sc\,x^0\,x^1} = (x^0)^2 - (x^1)^2$$

A ORIGEM O' DE K' SE MOVE EM RELAÇÃO A K COMO:

$$x = v t \quad \Rightarrow (x^1)' = 0$$

$$(x^1)' = -s\,x^0 + c\,x^1 = 0 \Rightarrow x^1 = (\tanh\xi)\,x^0 = \overbrace{c(\tanh\xi)}^{v}\,t$$

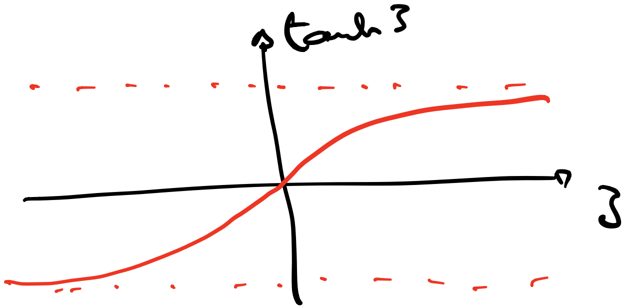
$$\Rightarrow \tanh\zeta = \frac{v}{c} \equiv \beta$$

$$\cosh\zeta = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2\zeta}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \equiv \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\sinh\zeta = \cosh\zeta\,\tanh\zeta = \beta\gamma = \frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{0} \\ x^{1} \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{0} \\ x^{1} \end{pmatrix}$$

$$\tanh\zeta \in [-1,1] \Rightarrow \beta \in [-1,1]$$



$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \geqslant 1$$

$$\gamma \in [1, +\infty)$$

TRANSFORMAÇÃO INVERSA:

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (x^0)' \\ (x^1)' \end{pmatrix}$$

Transformações de Lorentz

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x^{0\prime} \\ x^{1\prime} \\ x^{2\prime} \\ x^{3\prime} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}}$$

$$\beta = \frac{v}{c}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\begin{aligned} t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \\ x' &= \gamma\,(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

NO LIMITE NÃO RELATIVÍSTICO: $v \ll c$

$\beta \ll 1 \quad \gamma \cong 1$

$$\left\{ \begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned} \right.$$

GALILEU!

Transformações de Lorentz inversas

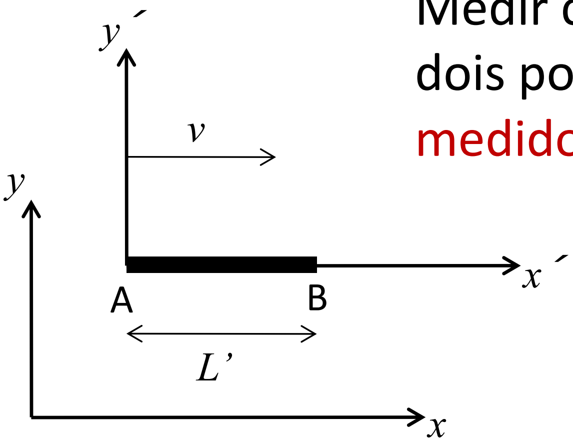
$$\boxed{\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{0\prime} \\ x^{1\prime} \\ x^{2\prime} \\ x^{3\prime} \end{pmatrix}}$$

$$\beta = \frac{v}{c}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\begin{aligned} t &= \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) \\ x &= \gamma\left(x' + vt'\right) \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned}$$

Contração de Fitzgerald-Lorentz



Medir comprimentos é determinar a distância entre dois pontos num mesmo instante de tempo, todos medidos no mesmo referencial.

$\Delta x' = L' \quad (\Delta t' = 0)$

$x' = \gamma(x - vt)$

$\Rightarrow \Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t)$

O COMPRIMENTO EM K É Δx COM $\Delta t = 0$

$\Delta x' = L' = \gamma \Delta x = \gamma L$

$\Rightarrow \boxed{L = \frac{L'}{\gamma} < L'}$

Relatividade da simultaneidade (Poincaré)

EVENTO $\underline{a}$: $\begin{pmatrix} x_a = 0 \\ t_a = 0 \end{pmatrix}$ EVENTO $\underline{b}$: $\begin{pmatrix} x_b = L \\ t_b = 0 \end{pmatrix}$

EM K, $\underline{a}$ E $\underline{b}$ SÃO SIMULTÂNEOS. $t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$

EM K': $t'_a = 0$

$t'_b = -\frac{\gamma v}{c^2} L \neq 0$

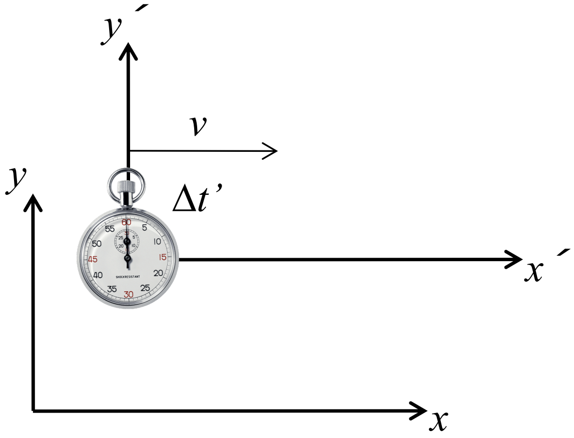
$\underline{a}$ E $\underline{b}$ NÃO SÃO SIMULTÂNEOS EM K', A NÃO SER QUE $L = 0$

DEPENDENDO DO SINAL DE $\underline{v}$: $t'_a > t'_b \quad (v > 0)$

$t'_a < t'_b \quad (v < 0)$

$\Rightarrow$ NÃO PODE HAVER CONEXÃO CAUSAL ENTRE $\underline{a}$ E $\underline{b}$ SE $L \neq 0$

Dilatação temporal



$$t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)$$

$$\Rightarrow \Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x'\right)$$

COMO O RELÓGIO ESTÁ EM REPOUSO EM K' $\Rightarrow \Delta x' = 0$

$$\Rightarrow \Delta t = \gamma \Delta t' > \Delta t'$$

$\Delta t'$ = TEMPO PRÓPRIO

Dilatação temporal

- Consequências importantes:
  - Decaimento de partículas geradas por raios cósmicos ou em aceleradores.
  - GPS
  - Medidas recentes com relógios atômicos.

Dilatação temporal devido à relatividade especial

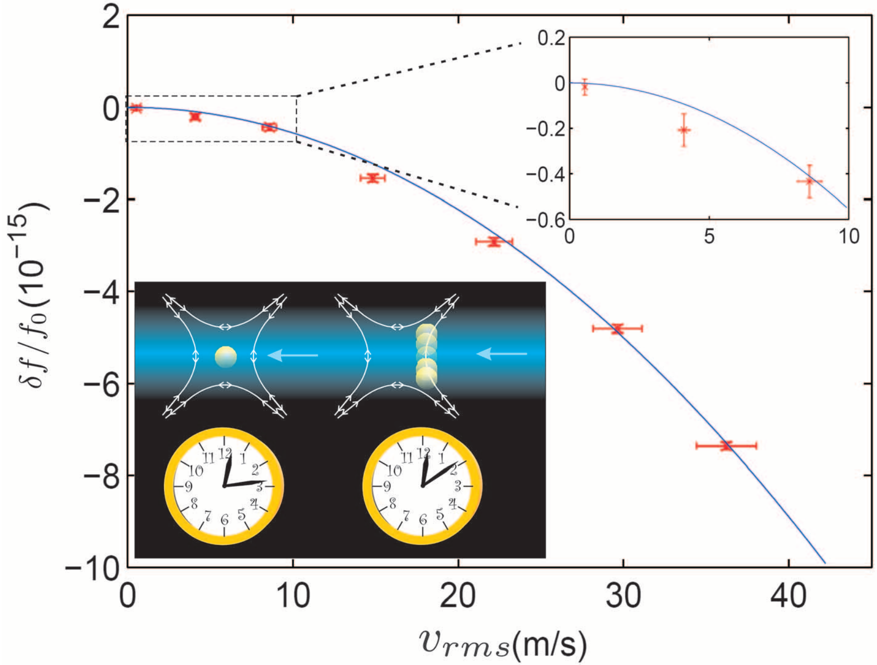
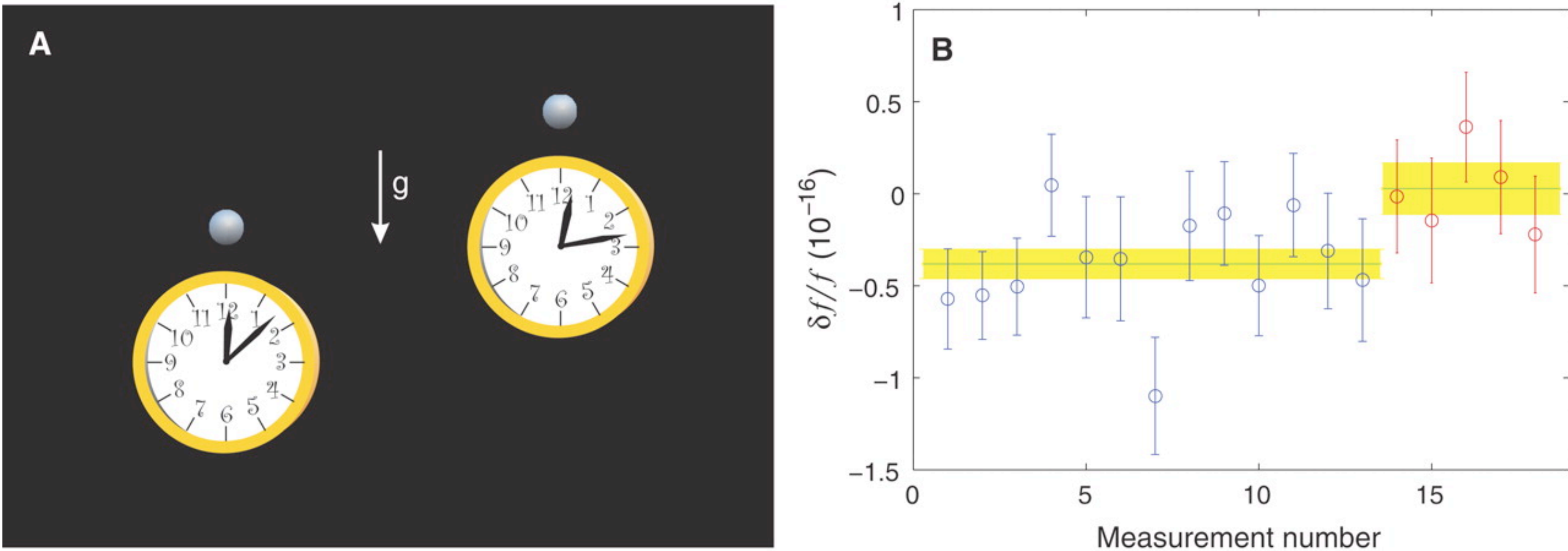


Fig. 2. Relativistic time dilation at familiar speeds (10 m/s = 36 km/hour ≈ 22.4 miles/hour). (Lower left inset) As the Al^+ ion in one of the twin clocks is displaced from the null of the confining RF quadrupole field (white field lines), it undergoes harmonic motion and experiences relativistic time dilation. In the experiments, the motion is approximately perpendicular to the probe laser beam (indicated by the blue shading). The Al^+ ion clock in motion advances at a rate that is slower than its rate at rest. In the figure, the fractional frequency difference between the moving clock and the stationary clock is plotted versus the velocity ($v_{rms} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$) (rms, root mean square) of the moving clock. The solid curve represents the theoretical prediction. (Upper right inset) A close-up of the results for $v_{rms} < 10$ m/s in the dashed box. The vertical error bars represent statistical uncertainties, and the horizontal ones cover the spread of measured velocities at the applied electric fields.

C. W. Chou *et al.*,
Science **329**, 1630 (2010)

Dilatação temporal devido à relatividade geral

altura= 33 cm



C. W. Chou *et al.*, Science **329**, 1630 (2010)