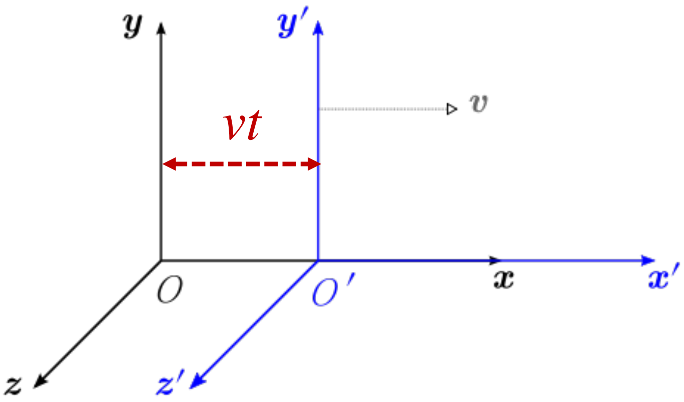
FI 008 – Eletrodinâmica I

1º Semestre de 2020
19/05/2020
Aula 19

Aula passada

Princípio da relatividade de Galileu: As equações da física (da mecânica, no contexto de Galileu) têm a mesma forma em todos os referenciais inerciais (covariância das equações).

Transformações de Galileu:



$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned}}$$

$$m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = -\boldsymbol{\nabla}_i \sum_{j=1, j\neq i}^{N} V_{ij}\left(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|\right) \ \ (i = 1, 2, \ldots, N)$$

Equações covariantes: não mudam a forma.

Aula passada

Equação de onda:

Em K:
$$\left(\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i'^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\right)\psi = 0$$

Em K':
$$\left[\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\right)^2\right]\psi = 0$$

Sob transformações de Galileu, a equação de onda e outras do eletromagnetismo não são covariantes.
Isso seria natural se a onda eletromagnética se propagasse em um meio ("éter"), que, no entanto, nunca foi detectado.

Aula passada

Einstein (1905): postulados da relatividade restrita:

1. As equações da física (mecânicas e eletromagnetícas) têm a mesma forma em todos os referenciais inerciais (princípio de relatividade de Einstein).
2. A velocidade da luz no vácuo é a mesma em todos os referenciais inerciais.
2. (alternativa) Em cada referencial inercial, existe uma velocidade limite para objetos físicos.

Aula passada

Tranformações de Lorentz:

$$\begin{aligned} t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \\ x' &= \gamma\left(x - vt\right) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{v}{c} \in (-1, 1) \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \in [1, +\infty) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x^{0\prime} \\ x^{1\prime} \\ x^{2\prime} \\ x^{3\prime} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

Aula passada

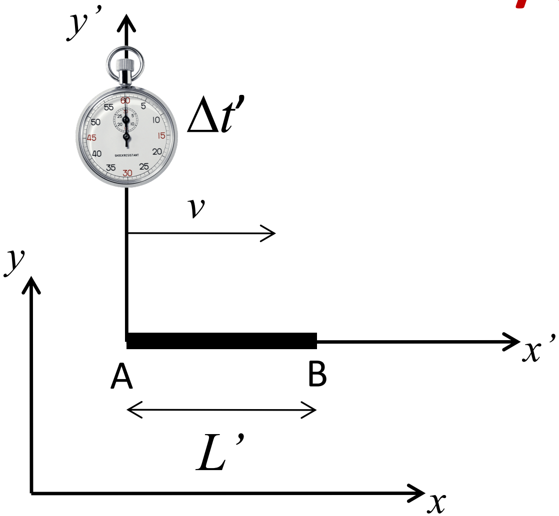
Tranformações de Lorentz inversa:

$$
\begin{aligned}
t &= \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) \\
x &= \gamma\left(x' + vt'\right) \\
y &= y' \\
z &= z'
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta &= \frac{v}{c} \in (-1, 1) \\
\gamma &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \in [1, +\infty)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{0\prime} \\ x^{1\prime} \\ x^{2\prime} \\ x^{3\prime} \end{pmatrix}
$$

Aula passada



$$L = \frac{L'}{\gamma}$$ Contração de Lorentz

$$\Delta t = \gamma \Delta t'$$ Dilatação temporal

Relatividade da simultaneidade: dois eventos simultâneos em K não serão simultâneos em K' se não ocorrerem no mesmo ponto no espaço ($\Delta x' \neq 0$).

Quadri-vetores

SÃO CONJUNTOS DE 4 QUANTIDADES: $A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3)$

QUE SE TRANSFORMAM SOB TRANSF. DE LORENTZ COMO

x^μ:

$$\begin{pmatrix} A^{0\prime} \\ A^{1\prime} \\ A^{2\prime} \\ A^{3\prime} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix}$$

ASSIM COMO: $(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 =$ INVARIANTE (OU ESCALAR) DE LORENTZ

$$(A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2 = \text{ESCALAR DE LORENTZ}$$

SE A^μ E B^α SÃO 4-VETORES $\Rightarrow (A^0 B^0) - (A^1 B^1) - (A^2 B^2) - (A^3 B^3)$ = INVARIANTE

$\Rightarrow$ PRODUTO ESCALAR DE LORENTZ

NOTAÇÃO: $(A^0, A^1, A^2, A^3) \equiv (A^0, \vec{A})$

PRODUTO ESCALAR: $A^0 B^0 - \vec{A} \cdot \vec{B}$

DIFERENÇAS DE COORDENADAS SÃO 4-VETORES:

$$\Delta x^\mu = (\Delta x^0, \Delta \vec{x})$$

$$d x^\mu = (d x^0, d \vec{x})$$

Intervalo invariante

INTERVALO INVARIANTE ENTRE 2 EVENTOS :

$$\Delta s^2 = (\Delta x^0)^2 - (\Delta \vec{x})^2 = \text{ESCALAR DE LORENTZ}$$

PODEMOS CLASSIFICAR OS INTERVALOS INVARIANTES SEGUNDO O SEU SINAL :

(a) $\Delta s^2 > 0$: INTERVALO TIPO-TEMPO

$$\Delta s^2 = (\Delta x^0)^2 - (\Delta \vec{x})^2 > 0 \Rightarrow |\Delta \vec{x}| < c|\Delta t|$$

SEMPRE EXISTE UM REFERENCIAL K' NO QUAL $\Delta \vec{x}' = 0$

SUPONHA $\Delta \vec{x} = \Delta x \, \hat{x}$

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) = 0 \Leftrightarrow \Delta x = v\Delta t \Rightarrow \left|\frac{\Delta x}{\Delta t}\right| = v < c$$

(b) $\Delta s^2 < 0$: INTERVALO TIPO-ESPAÇO

$$\Delta s^2 = (\Delta x^0)^2 - (\Delta \vec{x})^2 < 0$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}\right| > c$$

SEMPRE EXISTE K' ONDE $\Delta t' = 0$

$$\Delta t' = \gamma \left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right) = 0 \Leftrightarrow \left|\frac{\Delta x}{\Delta t}\right| = \frac{c^2}{v} > c$$

$$\Leftrightarrow \boxed{v < c}$$

NA VERDADE, O SINAL DE Δt É ARBITRÁRIO.

COMO A ORDEM TEMPORAL ENTRE OS EVENTOS É ARBITRÁRIA, ELES NÃO PODEM MANTER RELAÇÃO DE CAUSALIDADE.

(c) $\Delta s^2 = 0$: INTERVALO TIPO-LUZ

$$\Delta s^2 = (\Delta x^0)^2 - (\Delta \vec{x})^2 = 0 \Rightarrow \left|\frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}\right| = c$$

OS EVENTOS PODEM SER CONECTADOS POR UM RAIO DE LUZ

Diagrama de Minkowski

Linha de universo ("world-line")

Cone de luz

SE $m > 0$

$\frac{dx}{dt} < c$

$\Rightarrow c\frac{dt}{dx} > 1$

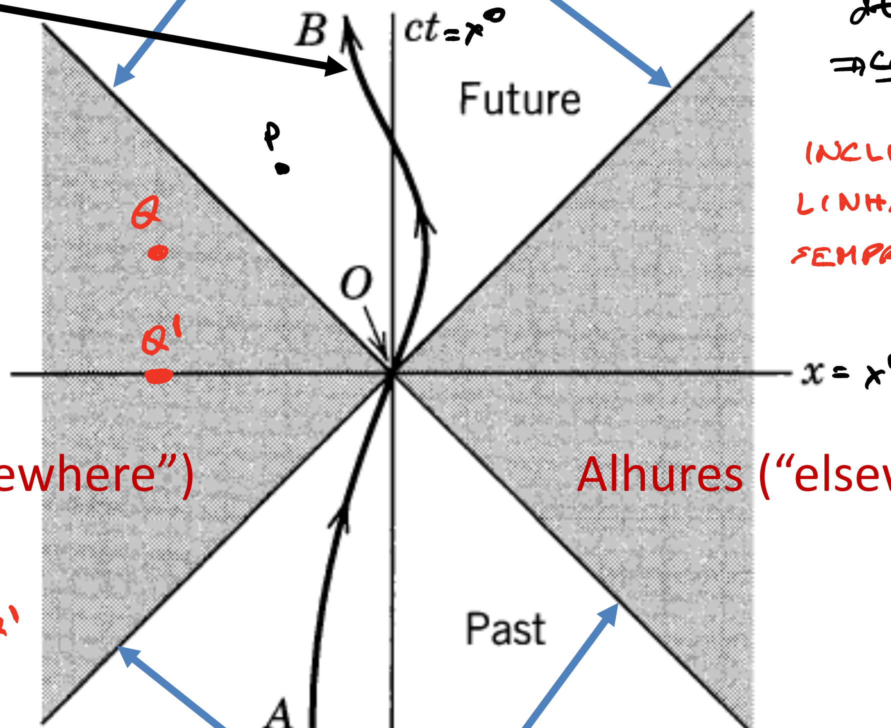
INCLINAÇÃO DA LINHA DE UNIVERSO SEMPRE > 1

SE $m = 0$

$\left| c\frac{dt}{dx} \right| = 1$

OP = INTERVALO TIPO-TEMPO

$c\Delta t > \Delta x$



Alhures ("elsewhere")

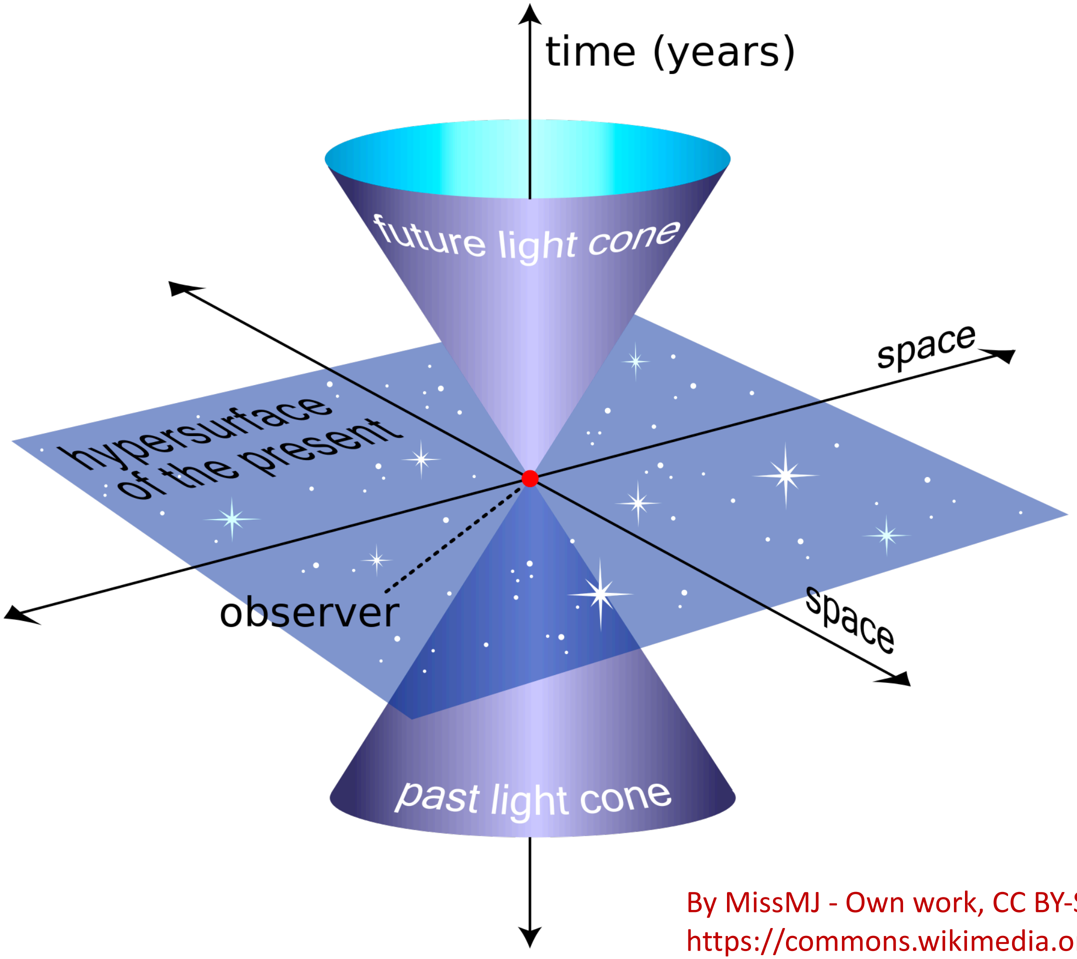
Alhures ("elsewhere")

OQ = INTERVALO TIPO-ESPAÇO = OQ'

$c\Delta t < \Delta x$

Cone de luz

Diagrama de Minkowski



Tempo próprio

SUPONHA UMA PARTÍCULA COM VELOCIDADE INSTANTÂNEA $\vec{u}$ EM K:

$$d\vec{x} = \vec{u}\,dt$$

$$\Rightarrow \Delta s^2 = c^2 dt^2 - |d\vec{x}|^2 = c^2 dt^2 - u^2 dt^2 = (c^2 - u^2)\,dt^2$$

$$= c^2\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)dt^2 = \frac{c^2 dt^2}{\gamma_u^2}$$

ONDE: $\gamma_u = \dfrac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$

NO REFERENCIAL PRÓPRIO K' DA PARTÍCULA: $\vec{u}' = 0$

$$\Delta s^2 = c^2 dt'^2 = c^2 \frac{dt^2}{\gamma_u^2} \Rightarrow \underset{\overset{\shortparallel}{d\tau}}{dt'} = \frac{dt}{\gamma_u}$$

τ = TEMPO PRÓPRIO: $d\tau = \dfrac{dt}{\gamma_u}$ (DILATAÇÃO TEMPORAL)

EM K'' $\Rightarrow \vec{u}''$ $\Rightarrow \Delta s^2 = c^2 \dfrac{dt''^2}{\gamma_{u''}^2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{d\tau = \dfrac{dt}{\gamma_u} = \dfrac{dt''}{\gamma_{u''}} = \text{INVARIANTE DE LORENTZ}}$

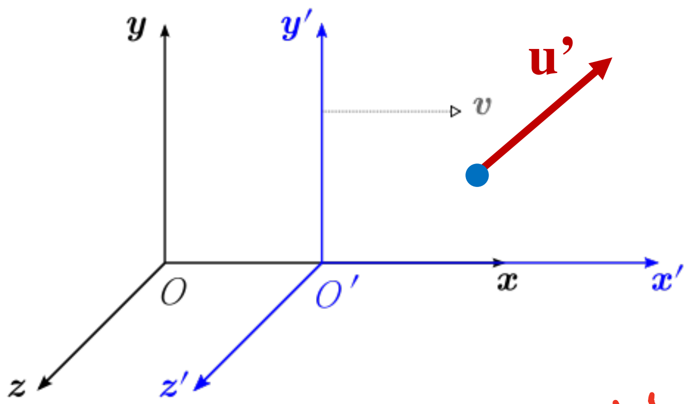
$$dt = \gamma_u \, d\tau$$

SE TIVERMOS $u(\tau)$

$$\Rightarrow \int dt = \int \gamma_{u(\tau)} \, d\tau \Rightarrow t_2 - t_1 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \underbrace{\gamma_{u(\tau)}}_{\geq 1} \, d\tau > (\tau_2 - \tau_1)$$

$\Rightarrow$ "PARADOXO" DOS GÊMEOS

Adição de velocidades



$\vec{u}'$ MEDIDA EM K'

$\Rightarrow \vec{u} = ?$ EM K

$$dx = \gamma(dx' + v\,dt')$$
$$dy = dy'$$
$$dz = dz'$$
$$dt = \gamma\left(dt' + \frac{v}{c^2}dx'\right)$$

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + v\,dt'}{dt' + \frac{v}{c^2}dx'} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}} = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x}$$

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\gamma\left(dt' + \frac{v}{c^2}dx'\right)} = \frac{u'_y}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c^2}u'_x\right)}$$

$$u_z = \frac{u'_z}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c^2}u'_x\right)}$$

SE $v \lll c$:

$$u_x = u'_x + v$$
$$u_y = u'_y$$
$$u_z = u'_z$$

AS COMPONENTES DE $\vec{u}$ SE TRANSFORMAM
DE UMA MANEIRA COMPLICADA.

EXISTE UMA COMBINAÇÃO ENVOLVENDO $\vec{u}$ QUE
SE TRANSFORME COMO UM 4-VETOR?

Quadri-velocidade

dx^μ É 4-VETOR

$\frac{dt}{\gamma_u} = d\tau$ É ESCALAR

$$\left.\begin{array}{l} \\ \end{array}\right\} \quad U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma_u \frac{dx^\mu}{dt} \text{ É 4-VETOR}$$

$$U^0 = \gamma_u \frac{d(ct)}{dt} = c\,\gamma_u$$

$$\gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$$U^i = \gamma_u \frac{dx^i}{dt} = \gamma_u\, u_i \Rightarrow \vec{U} = \gamma_u \vec{u}$$

$$U^\mu = (c\gamma_u, \gamma_u \vec{u}) = \gamma_u (c, \vec{u}) = \text{4-VELOCIDADE}$$

$$\begin{pmatrix} U^{0\prime} \\ U^{1\prime} \\ U^{2\prime} \\ U^{3\prime} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^0 \\ U^1 \\ U^2 \\ U^3 \end{pmatrix}$$

VER NOTAS SOBRE COMO RELACIONAR COM AS TRANSFORMAÇÕES DE $\vec{u}$

Efeito Doppler da luz

A fase da onda conta o número de vales/nós: não pode mudar com o referencial.

FASE DA ONDA : $e^{-i\phi} = e^{i(kx-\omega t)}$

$\Rightarrow$ FASE DA ONDA É UM INVARIANTE DE LORENTZ

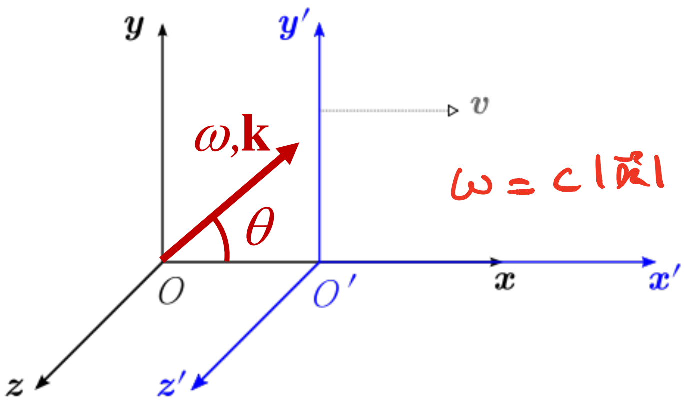
$$\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x} = \left(\frac{\omega}{c}\right)(ct) - \vec{k}\cdot\vec{x}$$

PRODUTO ESCALAR DE LORENTZ DE $(ct, \vec{x}) = x^{\mu}$ E

$$\left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right) = k^{\mu} = \text{4-VETOR}$$

$$= \text{4-VETOR DE ONDA}$$

Efeito Doppler da luz



$\omega = c|\vec{k}|$

$$(k^1)' = \gamma\left(k^1 - \frac{v}{c}k^0\right) = \gamma\left(k^1 - \frac{v}{c^2}\omega\right) \quad (1)$$

$$(k^2)' = k^2$$

$$(k^3)' = k^3$$

$$(k^0)' = \frac{\omega'}{c} = \gamma\left(k^0 - \frac{v}{c}k^1\right) =$$

$$= \gamma\left(\frac{\omega}{c} - \frac{v}{c}k^1\right) \quad (2)$$

$$\Rightarrow \omega' = \gamma(\omega - v\, k^1) \quad (2)$$

SEJA θ, θ' ÂNGULO ENTRE $\vec{k}$ E $\hat{x}$ OU $\vec{k}'$ E $\hat{x}'$

$$\left.\begin{aligned} k^1 &= k\cos\theta = \frac{\omega}{c}\cos\theta \\ (k^1)' &= k'\cos\theta' = \frac{\omega'}{c}\cos\theta' \end{aligned}\right\} \quad (2):\ \omega' = \gamma\left(\omega - \frac{v}{c}\omega\cos\theta\right)$$

$$\boxed{\omega' = \gamma\omega(1 - \beta\cos\theta)} \quad (3)$$

$$k'\cos\theta' = \gamma\left(k\cos\theta - \frac{v}{c^2}\omega\right)$$

$$\omega'\cos\theta' = \gamma\left(\omega\cos\theta - \frac{v}{c}\omega\right)$$

$$\omega'\cos\theta' = \gamma\omega(\cos\theta - \beta) \quad (4)$$

$$k'\sin\theta' = \sqrt{(k^{2'})^2 + (k^{3'})^2} = \sqrt{(k^2)^2 + (k^3)^2}$$

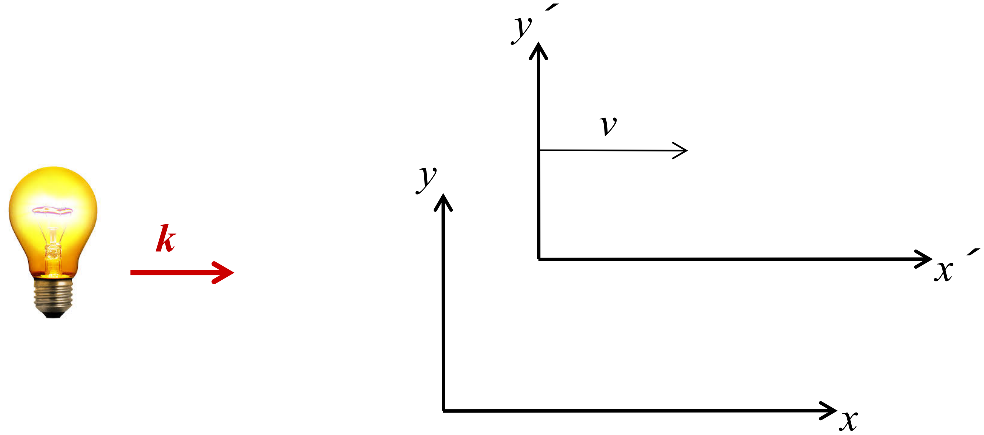
$$= k\sin\theta$$

$$\Rightarrow \omega'\sin\theta' = \omega\sin\theta \quad (5)$$

DIVIDINDO (5) POR (4):

$$\tan\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma(\cos\theta - \beta)} \quad (6)$$

Fonte se afastando do observador

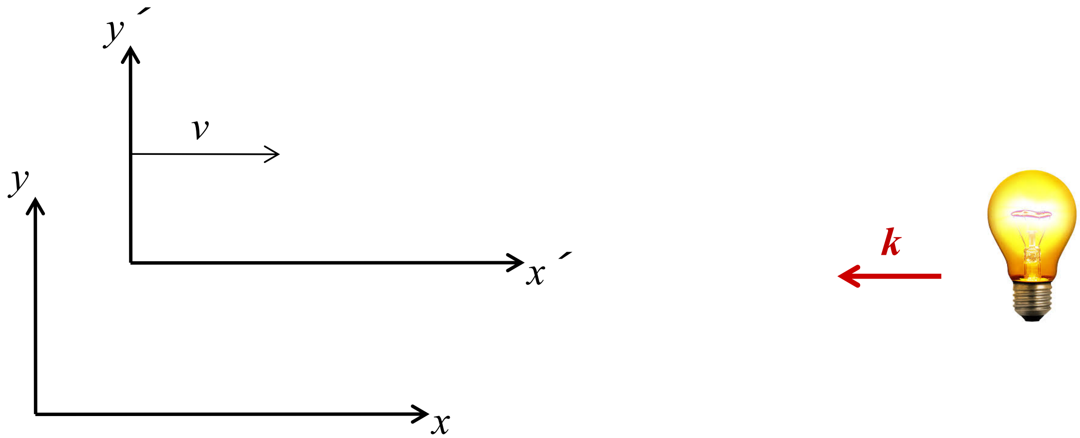


$$\omega' = \gamma\omega(1-\beta\cos\theta)$$

$$\theta = 0 \Rightarrow \omega' = \gamma\omega(1-\beta) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\omega(1-\beta) = \omega\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} < \omega$$

$\omega' < \omega \Rightarrow$ FREQUÊNCIA EM K FICA MENOR

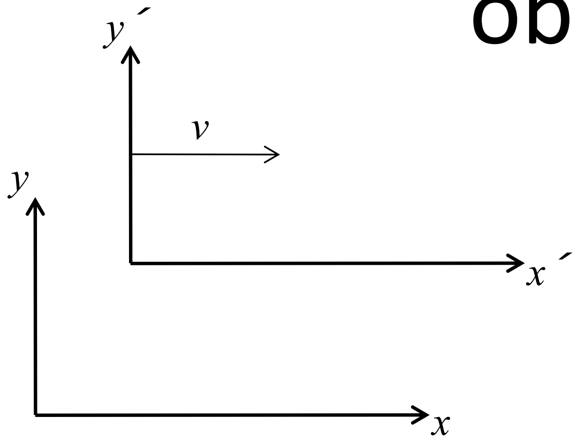
Fonte se aproximando do observador



$$\theta = \pi \Rightarrow \omega' = \gamma\omega(1+\beta) = \frac{\omega(1+\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}} = \omega\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} > \omega$$

FREQUÊNCIA EM K' É MAIOR

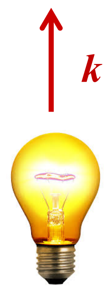
Fonte atravessando a frente do observador



$$\boxed{\theta' = \pi/2}$$

$$\tan\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma(\cos\theta - \beta)}$$

$$\theta' = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\cos\theta = \beta}$$



EFEITO DOPPLER TRANSVERSAL

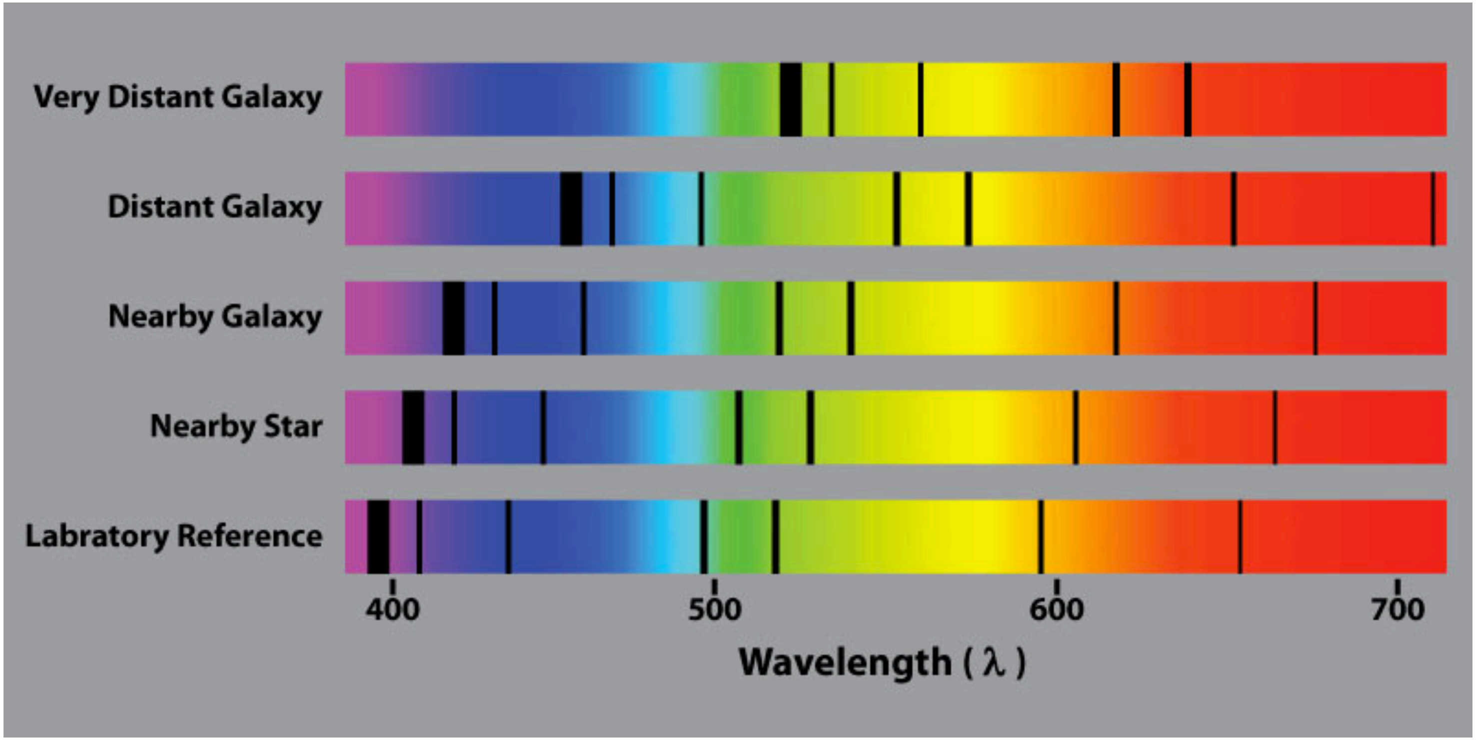
$$\omega' = \omega\gamma(1 - \beta\underbrace{\cos\theta}_{\beta})$$

$$\omega' = \omega\gamma(1-\beta^2) = \frac{\omega}{\sqrt{1-\beta^2}}(1-\beta^2) = \sqrt{1-\beta^2}\,\omega = \frac{\omega}{\gamma} < \omega$$

$\Rightarrow$ DILATAÇÃO TEMPORAL DO PERÍODO

“Red shift”

$R \propto v \Rightarrow$ EXPANSÃO DE HUBBLE



Quadri-momento

MULTIPLICANDO A MASSA m DE UMA PARTÍCULA POR SUA 4-VELOCIDADE U^μ, OBTEMOS UM NOVO 4-VETOR

$$p^\mu = m\,U^\mu = m\gamma_u (c, \vec{u})$$ QUADRI-MOMENTO

$$p^0 = mc\gamma_u = \frac{mc}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \equiv \frac{E}{c} \Rightarrow E = mc^2\gamma_u = \frac{mc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

"ENERGIA TOTAL RELATIVÍSTICA"

$$\vec{p} = m\gamma_u\vec{u} = \frac{m\vec{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

LIMITE NÃO-RELATIVÍSTICO:

$$\vec{p} \xrightarrow[u \ll c]{} m\vec{u}$$ = MOMENTO LINEAR NÃO RELATIVÍSTICO

$$E \xrightarrow[u \ll c]{} mc^2\left[1-\frac{u^2}{c^2}\right]^{-1/2} \cong \underbrace{mc^2}_{\text{ENERGIA DE REPOUSO}} + \underbrace{\frac{m}{2}u^2}_{\text{ENERGIA CINÉTICA NÃO RELATIVÍSTICA}}$$

EM PROCESSOS QUAISQUER, O 4-MOMENTO TOTAL É CONSERVADO:

$$\sum_i p_i^\mu (\text{ANTES}) = \sum_i p_i^\mu (\text{DEPOIS})$$

$\Rightarrow$ CONSERVAÇÃO DA ENERGIA TOTAL RELATIVÍSTICA : $\sum_i E_i$

$\Rightarrow$ CONSERVAÇÃO DO MOMENTO LINEAR RELATIVÍSTICO TOTAL: $\sum_i \vec{p}_i$

ENERGIA CINÉTICA RELATIVÍSTICA:

$$T = E - mc^2 = (\gamma_u - 1)mc^2 \xrightarrow[u \ll c]{} \frac{1}{2}mu^2$$

$$p^{\mu} \Rightarrow (p^0)^2 - (\vec{p})^2 = \text{ESCALAR DE LORENTZ}$$

$$\frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^{\,2} = \text{ESCALAR} = m^2 c^2$$

$$(p^0)^2 - (\vec{p})^2 = m^2\left[(U^0)^2 - (\vec{U})^2\right]$$

$$= m^2\left[c^2\gamma_u^2 - \gamma_u^2 u^2\right] = m^2\gamma_u^2\left[c^2 - u^2\right]$$

$$= \frac{m^2}{1 - u^2/c^2}\left(c^2 - u^2\right) = m^2 c^2$$

$$\Rightarrow E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \Rightarrow \boxed{E = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}}$$

$$\underline{m = 0}: \quad E = pc \quad \Rightarrow \frac{E}{\hbar} = \omega = c\frac{p}{\hbar} = ck$$

EINSTEIN: $E = \hbar\omega$

DE BROGLIE : $p = \hbar k$