FI 008 – Eletrodinâmica I

1º Semestre de 2021
25/05/2021
Aula 19

Aula passada

Einstein (1905): postulados da relatividade restrita

1. As equações da física (mecânicas e eletromagnetícas) têm a mesma forma em todos os referenciais inerciais (princípio de relatividade de Einstein).
2. A velocidade da luz no vácuo é a mesma em todos os referenciais inerciais.
2. (alternativa) Em cada referencial inercial, existe uma velocidade limite para objetos físicos.

Aula passada

Tranformações de Lorentz:

$$\boxed{\begin{aligned} t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \\ x' &= \gamma\,(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}}$$

$$\beta = \frac{v}{c} \in (-1, 1)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \in [1, +\infty)$$

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x^{0\prime} \\ x^{1\prime} \\ x^{2\prime} \\ x^{3\prime} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}}$$

Quadrivetores

Quadrivetores: 4 quantidades que se transformam como as coordenadas x^μ

$$\left(A^0, A^1, A^2, A^3\right) \equiv \left(A^0, \mathbf{A}\right)$$

$$\begin{aligned} A^{0\prime} &= \gamma\left(A^0 - \beta A^1\right) \\ A^{1\prime} &= \gamma\left(-\beta A^0 + A^1\right) \\ A^{2\prime} &= A^2 \\ A^{3\prime} &= A^3 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} A^{0\prime} \\ A^{1\prime} \\ A^{2\prime} \\ A^{3\prime} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix}$$

Produto escalar (invariante) de Lorentz:

$$A^0B^0 - A^1B^1 - A^2B^2 - A^3B^3 = A^0B^0 - \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \text{invariante de Lorentz}$$

Intervalo invariante

Quadrivetor separação no espaço-tempo: Δx^{μ}

Intervalo invariante: $\Delta s^2 = \underbrace{\left(\Delta x^0\right)^2}_{c^2 \Delta t^2} - |\Delta \mathbf{x}|^2$

$$\Delta s^2 > 0 \;\rightarrow\; \text{intervalo tipo tempo}$$

$$\Delta s^2 < 0 \;\rightarrow\; \text{intervalo tipo espaço}$$

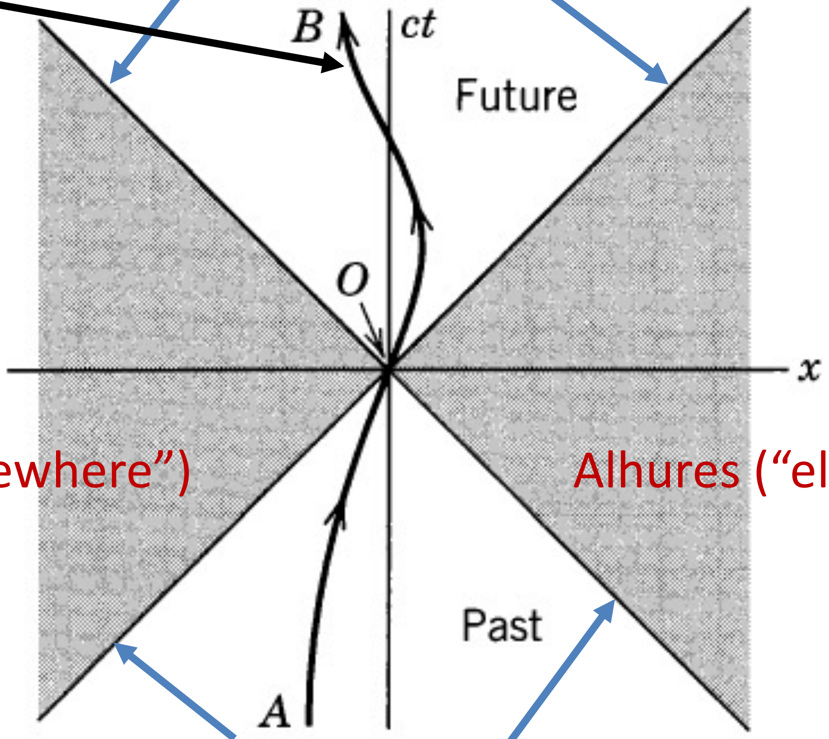
$$\Delta s^2 = 0 \;\rightarrow\; \text{intervalo tipo luz}$$

Eventos separados por um intervalo tipo-espaço não podem ter conexão causal: um não pode causar o outro.

Diagrama de Minkowski

Linha de universo
("world-line")

Cone de luz



Alhures ("elsewhere")

Alhures ("elsewhere")

Cone de luz

Tempo próprio, quadri-velocidade

Tempo próprio (invariante): $d\tau = \frac{dt}{\gamma_u} = \frac{dt'}{\gamma_{u'}}\,;\ \gamma_u = 1/\sqrt{1-u^2/c^2}$

Transformação de velocidades:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{u'_x + v}{1 + vu'_x/c^2} \\ u_y &= \frac{u'_y}{\gamma\left(1 + vu'_x/c^2\right)} \\ u_z &= \frac{u'_z}{\gamma\left(1 + vu'_x/c^2\right)} \end{aligned}$$

Quadri-velocidade (quadri-vetor):

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma_u \frac{dx^\mu}{dt} = \gamma_u\left(c, \mathbf{u}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\left(c, \mathbf{u}\right)$$

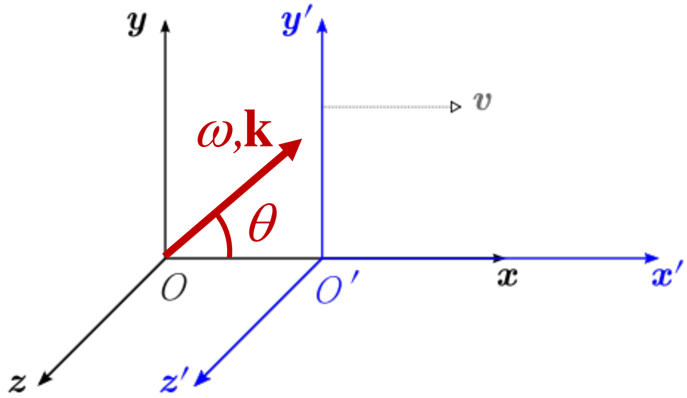
$$\boxed{\begin{aligned} U^{0\prime} &= \gamma\left(U^0 - \beta U^1\right) \\ U^{1\prime} &= \gamma\left(U^1 - \beta U^0\right) \\ U^{2\prime} &= U^2 \\ U^{3\prime} &= U^3 \end{aligned}}$$

Quadri-vetor de onda

Quadri-vetor de onda da luz:

$$k^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k}\right) \rightarrow \mathrm{quadri} - \mathrm{vetor}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\omega'}{c} &= \gamma\left(\frac{\omega}{c} - \beta k_1\right) \\ k'_1 &= \gamma\left(k_1 - \beta\frac{\omega}{c}\right) \\ k'_2 &= k_2 \\ k'_3 &= k_3 \end{aligned}}$$



$$\omega' = \gamma\omega\left(1 - \beta\cos\theta\right)$$

$$\tan\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma\left(\cos\theta - \beta\right)}$$

Quadri-momento

$$\begin{pmatrix} P_0' \\ P_1' \\ P_2' \\ P_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix}$$

Quadri-momento: $P^\mu = mU^\mu = m\gamma_u (c, \mathbf{u}) = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}\right)$

Momento linear relativístico: $\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma_u m\mathbf{u}$

Energia total relativística: $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma_u mc^2$

Energia cinética relativística: $T = (\gamma_u - 1)\, mc^2$

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2 = m^2c^2 = \text{const.} \Rightarrow E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

$$m = 0 \Rightarrow E = pc$$

Conservação do quadri-momento

O quadri-momento total de um sistema isolado é conservado.

$$A^\mu = \frac{dU^\mu}{d\tau} = \gamma_u \frac{dU^\mu}{dt} = \gamma_u \frac{d}{dt}\Big[\underbrace{\gamma_u (c, \vec{u})}_{U^\mu}\Big]$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt}$$