FI 008 – Eletrodinâmica I

1º Semestre de 2021
18/03/2020
Aula 2

Aula passada

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0};\\ \nabla\times\mathbf{E} &= -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t};\\ \nabla\cdot\mathbf{B} &= 0;\\ \nabla\times\mathbf{B} &= \mu_0\mathbf{J}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}.\end{aligned}$$

Estática

$$\boxed{\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0};\\ \nabla\times\mathbf{E} &= 0;\end{aligned}}$$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{B} &= 0;\\ \nabla\times\mathbf{B} &= \mu_0\mathbf{J}.\end{aligned}$$

Eletrostática:

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0},\\ \nabla\times\mathbf{E} &= 0 \Leftrightarrow \mathbf{E}=-\nabla\Phi,\quad \Phi=-\int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}\end{aligned}$$

$$-\nabla\cdot\mathbf{E}=\nabla\cdot\nabla\Phi=\boxed{\nabla^2\Phi=-\frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

Equação de Poisson

Solução geral da Eq. de Poisson

Potencial de uma carga pontual em **x**':

$$\Phi_{\text{pontual}}(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$$

Para uma distribuição contínua de cargas: $\rho(\vec{x})$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{T.E.}\frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d^3x'$$

$$\vec{\nabla}\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\vec{\nabla}\left[\int_{T.E.}\frac{\rho(\vec{x}')d^3x'}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{T.E.}\vec{\nabla}\left[\frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right]d^3x'$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{T.E.}\rho(\vec{x}')\,\vec{\nabla}\left[\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right]d^3x' \quad ; \quad \vec{\nabla}\left[\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right] = ?$$

$$\vec{\nabla}\left[\frac{1}{|\vec{x}|}\right] = \vec{\nabla}\left[\frac{1}{r}\right] = \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right)\hat{r} = -\frac{1}{r^2}\hat{r} = -\frac{\vec{x}}{r^3} = -\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}$$

$$\vec{x} = r\,\hat{r}$$

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{x}|}\right) = -\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} \xrightarrow[\vec{x} \to \vec{x}-\vec{x}']{} \vec{\nabla}\left[\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right] = -\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}$$

$$f(x-x') \ ; \quad \frac{d f(x-x')}{dx} = f'(x-x')$$

$$\vec{\nabla}\Phi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{T.E.} \rho(\vec{x}')\,\frac{(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}\,d^3x' = -\vec{E}(\vec{x})$$

$$\nabla^2\Phi = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\Phi) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{T.E.} \vec{\nabla}\cdot\left[\frac{\rho(\vec{x}')(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}\right]d^3x'$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{T.E.} \rho(\vec{x}')\,\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\left[\frac{(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}\right]}_{?}\,d^3x'$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[\int_a^b f(x,y)\,dy\right] = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,dy}$$

COMEÇO POR:

$$\vec{\nabla}\cdot\left[\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}\right] = \vec{\nabla}\cdot\left[\frac{\hat{r}}{r^2}\right]$$

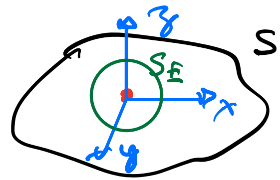
$$\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[\cancel{r^2}\times\left(\frac{1}{\cancel{r^2}}\right)\right] = 0\ !!!$$

O QUE ESTÁ ACONTECENDO? A FUNÇÃO $\frac{\hat{r}}{r^2}$ É SINGULAR NA ORIGEM, E O RESULTADO É DUVIDOSO EM $r=0$.

$$I = \int_S \left(\frac{\vec{x}}{r^3}\right)\cdot\hat{n}\, dS$$

ONDE S É UMA SUPERFÍCIE FECHADA QUE TEM A ORIGEM NO SEU INTERIOR

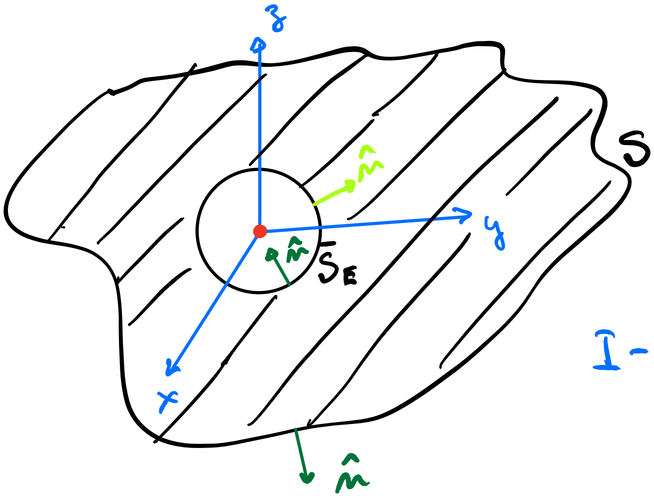
$$I' = \int_{S_E} \left(\frac{\vec{x}}{r^3}\right)\cdot\hat{n}\, dS$$



S_E É UMA SUP. ESFÉRICA COM CENTRO NA ORIGEM

VOU PROVAR QUE $I = I'$. CONSIDERE $I - I'$

$$I - I' = \left[\int_S - \int_{S_E}\right]\left[\frac{\vec{x}}{r^3}\cdot\hat{n}\right] dS = \left[\int_S + \int_{\overline{S_E}}\right]\left[\frac{\vec{x}}{r^3}\cdot\hat{n}\right] dS$$



$\bar{S}_E$ É A MESMA SUPERFÍCIE ESFÉRICA S_E, MAS COM NORMAL INVERTIDA ($\hat{n}$)

$$I - I' = \int_{S \cup \bar{S}_E} \left(\frac{\vec{x}}{r^3} \cdot \hat{n} \right) dS$$

$S \cup \bar{S}_E$ É A BORDA DA REGIÃO HACHURADA DA FIGURA (REGIÃO MULTIPLAMENTE CONEXA)

APLICANDO O TEOREMA DE GAUSS:

$$\int_{S \cup \bar{S}_E} \left(\frac{\vec{x}}{r^3} \cdot \hat{n} \right) dS = \int_V \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \left[\frac{\vec{x}}{r^3} \right]}_{=0 \text{ SEM DÚVIDA}} d^3x = 0 \Rightarrow I = I'$$

PORQUE A REGIÃO NÃO CONTÉM A ORIGEM

Teorema de Gauss

REGIÃO R(V) CUJA BORDA É A SUPERFÍCIE S(V) E $\hat{n}$ É NORMAL À SUPERFÍCIE APONTANDO PARA FORA DA REGIÃO, ENTÃO:

$$\int_{S(V)} \vec{A} \cdot \hat{n} \, dS = \int_{V} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \, d^3x$$

$$I' = \int_{S_E} \frac{\vec{x}}{r^3} \cdot \hat{n} \, dS$$

S_E : ESFERA DE RAIO R

$$\begin{cases} \vec{x} = R\,\hat{r} \\ r = R \\ \hat{n} = \hat{r} \\ dS = R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \end{cases}$$

$$I' = \int_{S_E} \frac{1}{\cancel{R^2}} \cancel{R^2} \sin\theta \, d\theta \, d\phi = \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi$$

$$I = \int_S \frac{\vec{x}}{r^3} \cdot \hat{n} \, dS = 4\pi \underset{\text{T. GAUSS}}{=} \int_V \vec{\nabla} \cdot \left[\frac{\vec{x}}{r^3} \right] d^3x$$

$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{x}}{r^3} \right) = 0$ SE $\vec{x} \neq 0$ E $\int_V \vec{\nabla} \cdot \left[\frac{\vec{x}}{r^3} \right] d^3x = 4\pi$

ISSO SUGERE A PRESENÇA DE UMA DELTA DE DIRAC!

Propriedades da função delta de Dirac

(i) $\delta(x - x_0) = 0$ SE $x \neq x_0$

(ii) $\int_a^b \delta(x-x_0)\,dx = 1$ SE $x_0 \in (a,b)$

$= 0$ SE $x_0 \notin (a,b)$

(iii) (FILTRAGEM) $\int_a^b f(x)\,\delta(x-x_0)\,dx = f(x_0)$ SE $x_0 \in (a,b)$

$= 0$ SE $x_0 \notin (a,b)$

ONDE $f(x)$ É UMA FUNÇÃO ORDINÁRIA

DAQUI EM DIANTE, VOU SEMPRE SUPOR QUE O ZERO DO ARGUMENTO DA DELTA PERTENCE AO INTERVAO DE INTEGRAÇÃO

(iv) $\int_a^b f(x)\,\delta'(x-x_0)\,dx = -f'(x_0)$

$\delta'(x)$ É A DERIVADA DE $\delta(x)$

HEURISTICAMENTE: INTEGRANDO POR PARTES

$$\int_a^b f(x)\,\delta'(x-x_0)\,dx = \underbrace{f(x)\,\cancel{\delta(x-x_0)}}_{0}\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f'(x)\,\delta(x-x_0)\,dx$$

$$= -f'(x_0)$$

PODE SER GENERALIZADO PARA DERIVADAS SUPERIORES

$$\int_a^b f(x)\,\frac{d^n}{dx^n}\left[\delta(x-x_0)\right]dx = (-1)^n \left.\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right|_{x=x_0}$$

(N) $$\int_a^b f(x)\,\delta\left[g(x)\right]dx = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)}{|g'(x_i)|}$$

ONDE x_i É A i-ÉSIMA RAIZ SIMPLES DE $g(x)$, OU SEJA,

$g(x_i) = 0$

$g'(x_i) \neq 0$

DERIVAÇÃO HEURÍSTICA: PERTO DE x_i, $g(x) = g'(x_i)(x-x_i)$

$$\int_{x_i-\epsilon}^{x_i+\epsilon} f(x)\,\delta[g(x)]\,dx = \int_{x_i-\epsilon}^{x_i+\epsilon} f(x)\,\delta[g'(x_i)(x-x_i)]\,dx$$

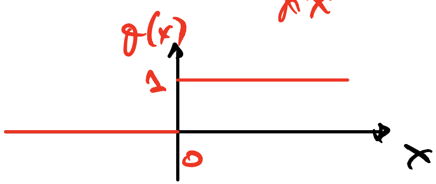
$$= \frac{1}{|g'(x_i)|} f(x_i)$$

ONDE USEI A SEGUINTE PROPRIEDADE

(vi) $$\int_a^b f(x)\,\delta[k(x-x_0)]\,dx \qquad (k \neq 0)$$

$$= \frac{f(x_0)}{|k|} \Rightarrow \quad \delta[-(x-x_0)] = \delta(x-x_0)$$

(vii) $$\frac{d\theta(x)}{dx} = \delta(x)$$ ONDE $\theta(x)$ É A FUNÇÃO DEGRAU DE HEAVISIDE



$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{SE } x > 0 \\ 0 & \text{SE } x < 0 \end{cases}$$

PROS NOSSOS PROPÓSITOS, EM $\underline{D}$ DIMENSÕES

$$\delta^{(D)}(\vec{x}) = \delta(x_1)\,\delta(x_2)\cdots\delta(x_D)$$

EM 3D: $\delta^{(3)}(\vec{x}) = \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)$

$$\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}') = \delta(x-x')\,\delta(y-y')\,\delta(z-z')$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{x}}{r^3}\right) = \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) = 4\pi\,\delta^{(3)}(\vec{x})}$$

$$\int_V \delta^{(3)}(\vec{x})\,d^3x = \int \delta(x)\delta(y)\delta(z)\,dx\,dy\,dz = 1$$

PORTANTO: $\vec{\nabla}\cdot\left[\frac{(\bar{x}-\bar{x}')}{|\bar{x}-\bar{x}'|^3}\right] = 4\pi\,\delta^{(3)}(\bar{x}-\vec{x}')$ (*)

FINALMENTE:

$$\nabla^2\Phi = -\frac{1}{\cancel{4\pi}\epsilon_0}\int_{T.E.} \rho(\vec{x}')\,\cancel{4\pi}\,\delta^{(3)}(\bar{x}-\vec{x}')\,d^3x' = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{x})$$

QUE PROVA A SOLUÇÃO GERAL DA EQ. DE POISSON.

(*) $\nabla^2\left[-\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|}\right] = 4\pi\,\delta^{(3)}(\bar{x}-\bar{x}')$

$$\boxed{\nabla^2\left[\left(-\frac{1}{4\pi}\right)\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|}\right] = \delta^{(3)}(\bar{x}-\bar{x}')}$$

O método das funções de Green

Equação não-homogêna: $\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$

Equação auxiliar: $\nabla^2 G\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right) = \delta^{(3)}\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right)$

Solução da equação auxiliar: $G\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right|}$

Solução da equação não-homogênea:

$$\Phi\left(\mathbf{x}\right) = \int G\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right)\left[-\frac{\rho\left(\mathbf{x}'\right)}{\epsilon_0}\right] d^3x' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho\left(\mathbf{x}'\right)}{\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right|} d^3x'$$

Revisão de funções de Green em 1D

APLICAÇÃO AO OSCILADOR HARMÔNICO AMORTECIDO FORÇADO. (MASSA m, CONSTANTE DE MOLA k, CONSTANTE DE AMORTECIMENTO b, E FUNÇÃO FORÇANTE $F(t)$):

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F(t)$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m} \equiv A(t)$$

ONDE:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\gamma = \frac{b}{2m}$$

EDO DE 2ª ORDEM NÃO HOMOGÊNEA. MÉTODO DAS FUNÇÕES DE GREEN.

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \delta(t-t') \quad (1) \quad \text{(EQ. AUXILIAR)}$$

ONDE t' É UM PARÂMETRO FIXO.

Oscilador harmônico (sub-)amortecido

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Solução geral (homogênea), caso sub-amortecido:

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t + \eta) \quad \left(\omega_0 > \gamma; \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\right)$$

VAMOS RESOLVER A EQ. AUXILIAR POR PARTES:

$t < t'$: TENHO UMA EQ. HOMOGÊNEA, PORQUE $\delta(t-t') = 0$

$t > t'$: TAMBÉM $\delta(t-t') = 0$

A FUNÇÃO $\delta(t-t')$, FISICAMENTE, CORRESPONDE A UMA FORÇA IMPULSIVA ATUANTE NO INSTANTE $t = t'$.

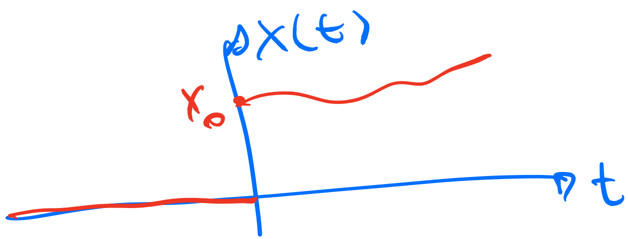
VAMOS SUPOR QUE, ANTES DESSA FORÇA, O SISTEMA ESTAVA EM REPOUSO: $x(t) = 0$ SE $t < t'$

APÓS A FORÇA IMPULSIVA:

$$x(t) = A\, e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \eta) \qquad t > t'$$

AGORA, PRECISAMOS "CASAR" AS DUAS SOLUÇÕES EM $t = t'$.

DE (1), EU SEI QUE $x(t)$ TEM QUE SER CONTÍNUA EM $t=t'$. DO CONTRÁRIO, SUPONHA QUE HAJA UM SALTO EM $x(t)$ EM $t=t'$



NESSE CASO:

$$x(t) \simeq x_0\, \theta(t - t')$$

NA VIZINHANÇA DE t'

$$\Rightarrow \dot{x}(t) \propto \delta(t-t') \quad e \quad \ddot{x}(t) \propto \delta'(t-t')$$

DESSA FORMA, SERÁ IMPOSSÍVEL SATISFAZER (1), POIS NÃO HÁ OUTRO TERMO $\propto \delta'(t-t')$ QUE "CANCELE" ESSE TERMO.

com isso: $x(t) = A\,e^{-\gamma t} \sin[\omega_1 (t-t')]$ $(t > t')$