FI 008 – Eletrodinâmica I

1º Semestre de 2021

27/05/2021

Aula 20a

Aulas passada

Quadrivetor: $\left(A^0, A^1, A^2, A^3\right) \equiv \left(A^0, \mathbf{A}\right)$

$$\begin{aligned} A^{0\prime} &= \gamma\left(A^0 - \beta A^1\right) \\ A^{1\prime} &= \gamma\left(-\beta A^0 + A^1\right) \\ A^{2\prime} &= A^2 \\ A^{3\prime} &= A^3 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} A^{0\prime} \\ A^{1\prime} \\ A^{2\prime} \\ A^{3\prime} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix}$$

Produto escalar de Lorentz:

$$A^0 B^0 - A^1 B^1 - A^2 B^2 - A^3 B^3 = A^0 B^0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \text{invariante de Lorentz}$$

Geometria do espaço-tempo

CONSIDEREMOS TRANSFORMAÇÕES DE COORDENADAS NO ESPAÇO-TEMPO, NÃO NECESSARIAMENTE LINEARES

$$x'^{\alpha} = x'^{\alpha}(x^0, x^1, x^2, x^3) \qquad \alpha = 0, 1, 2, 3$$

DEFINIMOS UM 4-VETOR CONTRAVARIANTE COMO AQUELE QUE SE TRANSFORMA SEGUNDO A LEI:

$$A'^{\alpha} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} A^{\beta}$$

(SUPONDO SOMA IMPLÍCITA SOBRE ÍNDICES REPETIDOS)

NOTEM O ÍNDICE "SUPERIOR"! EVIDENTEMENTE, SE AS TRANSFORMAÇÕES SÃO LINEARES, RECUPERAMOS A DEFINIÇÃO ANTERIOR DE 4-VETOR.

DEFINIMOS UM 4-VETOR COVARIANTE COMO AQUELE QUE SE TRANSFORMA COMO:

$$B_{\alpha} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}} B_{\beta}$$

NOTE O ÍNDICE INFERIOR

TAIS DEFINIÇÕES SE GENERALIZAM NATURALMENTE PARA TENSORES DE ORDEM SUPERIOR:

4-TENSOR CONTRAVARIANTE DE 2ª ORDEM:

$$F'^{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\delta}} F^{\gamma\delta}$$

4-TENSOR COVARIANTE DE 2ª ORDEM:

$$G'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\delta}}{\partial x'^{\beta}} G_{\gamma\delta}$$

4-TENSOR MISTO DE 2ª ORDEM:

$$H'^{\alpha}{}_{\beta} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x^{\delta}}{\partial x'^{\beta}} H^{\gamma}{}_{\delta}$$

E ESSE PADRÃO SE GENERALIZA DE MANEIRA ÓBVIA PARA TENSORES DE ORDEM MAIOR QUE 2.

PRODUTO ESCALAR ENTRE UM 4-VETOR CONTRAVARIANTE E UM 4-VETOR COVARIANTE:

$$B \cdot A = B_\alpha A^\alpha \quad \text{(SOMA IMPLÍCITA SOBRE } \alpha\text{)}$$

ELE É INVARIANTE SOB A TRANSFORMAÇÃO?

$$B'_\alpha A'^\alpha = B_\alpha A^\alpha$$

(TAMBÉM CHAMADA DE CONTRAÇÃO DE ÍNDICES)

$$B_\gamma \underbrace{\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\delta}}_{} A^\delta = B_\gamma \delta^\gamma{}_\delta A^\delta = B_\delta A^\delta \quad \checkmark$$

$$\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\delta} = \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^\delta} = \delta^\gamma{}_\delta$$

NÃO É POSSÍVEL ENCONTRAR UMA FORMA BILINEAR DE 2 4-VETORES CONTRA OU 2 4-VETORES CO QUE SEJA INVARIANTE DE LORENTZ.

É POSSÍVEL GENERALIZAR A CONTRAÇÃO DE ÍNDICES, SEMPRE UM CO E UM CONTRA, PARA TENSORES SUPERIORES

POR EXEMPLO:

$H^{\alpha}{}_{\alpha}$ = INVARIANTE

$F^{\alpha\beta} B_{\beta}$ = 4-VETOR CONTRAVARIANTE

E ASSIM POR DIANTE...

Quadrivetor contravariante $$A'^{\alpha} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} A^{\beta}$$

Quadrivetor covariante $$B'_{\alpha} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}} B_{\beta}$$

Tensor contravariante de 2ª ordem $$F'^{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\delta}} F^{\gamma\delta}$$

Tensor covariante de 2ª ordem $$G'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\delta}}{\partial x'^{\beta}} G_{\gamma\delta}$$

Tensor misto de 2ª ordem $$H'^{\alpha}{}_{\beta} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x^{\delta}}{\partial x'^{\beta}} H^{\gamma}{}_{\delta}$$

Contrações $$B \cdot A \equiv B_{\alpha} A^{\alpha}$$

Espaço-tempo (plano) de Minkowski

VAMOS AGORA PARTICULARIZAR A DISCUSSÃO PARA ESPAÇOS-TEMPO PLANO (DE MINKOWISKI). A GEOMETRIA É DEFINIDA PELO ELEMENTO DE LINHA (INTERVALO) INVARIANTE:

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

$$\equiv g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta$$

ONDE:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

TENSOR MÉTRICO COVARIANTE NO E-T DE MINKOWSKI

TENSOR MÉTRICO CONTRAVARIANTE $g^{\alpha\beta}$ É DEFINIDO COMO A INVERSA DE $g_{\alpha\beta}$:

$$g_{\alpha\beta}\, g^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^{\ \gamma}$$

EM MINKOWSKI:

$$g_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}$$

$$ds^2 = \underbrace{g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha}\, dx^\beta = dx_\beta\, dx^\beta \rightarrow \text{CONTRAÇÃO}$$

dx_β

$\Rightarrow dx_\beta = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha$ É UM 4-VETOR COVARIANTE

OU

$$dx_\alpha = g_{\beta\alpha}\, dx^\beta = \boxed{g_{\alpha\beta}\, dx^\beta = dx_\alpha}$$

$$\begin{pmatrix} dx_0 \\ dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^0 \\ dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} dx_0 = dx^0 \\ dx_1 = -dx^1 \\ dx_2 = -dx^2 \\ dx_3 = -dx^3 \end{array}$$

PODEMOS GENERALIZAR ESSE PROCEDIMENTO E UTILIZAR $g_{\alpha\beta}$ PARA "ABAIXAR" QUAISQUER ÍNDICES E $g^{\alpha\beta}$ PARA "LEVANTAR" ÍNDICES: $F^{\alpha\beta}{}_{\lambda\mu} = g^{\beta\gamma} g_{\lambda\nu} F^{\alpha}{}_{\gamma}{}^{\nu}{}_{\mu}$

$$F^{\alpha\beta} = g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} F_{\gamma\delta}$$

PRODUTO ESCALAR:

$$B \cdot A = B_\alpha A^\alpha = B^\beta g_{\alpha\beta} A^\alpha = A^\alpha g_{\alpha\beta} B^\beta$$

A TRANSFORMAÇÃO DE 4-VETORES DE CONTRA PARA CO OU VICE-VERSA É GENÉRICA:

$$A_0 = A^0 \qquad A_1 = -A^1 \qquad A_2 = -A^2 \qquad A_3 = -A^3$$

DESSA FORMA, SE: $A^\alpha = (A^0, \vec{A})$

ENTÃO: $A_\alpha = (A^0, -\vec{A})$

$$B \cdot A = B^0 A^0 - \vec{B} \cdot \vec{A}$$

$$\parallel$$

$$B_\alpha A^\alpha$$

O operador nabla

CONSIDERE O NABLA 4-DIMENSIONAL:

$$\left(\underbrace{\frac{\partial}{\partial x^0}}_{\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \vec{\partial}\right) = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS DE $x^\alpha \longrightarrow x'^\alpha$:

$$\frac{\partial}{\partial x'^\alpha} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial}{\partial x^\beta}$$

QUE É EXATAMENTE A LEI DE TRANSFORMAÇÃO DE 4-VETORES COVARIANTES: $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ É UM 4-VETOR COVARIANTE

ANALOGAMENTE: $\frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \underbrace{\frac{\partial x^\beta}{\partial x_\alpha}}_{g^{\beta\alpha} = g^{\alpha\beta}}\frac{\partial}{\partial x^\beta} = g^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^\beta}$ QUE É A LEI DE 4-VETORES CONTRA

UMA NOTAÇÃO QUE CONTÉM ESSA INFORMAÇÃO É:

$$\partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0} , \vec{\nabla} \right)$$

$$\partial^\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial x_0} , \frac{\partial}{\partial x_1} , \frac{\partial}{\partial x_2} , \frac{\partial}{\partial x_3} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x^0} , -\vec{\nabla} \right)$$

COM ISSO, PODEMOS DEFINIR O 4-DIVERGENTE

$$\partial_\alpha A^\alpha = \partial^\alpha A_\alpha = \frac{\partial A^0}{\partial x^0} + \frac{\partial A^1}{\partial x^1} + \frac{\partial A^2}{\partial x^2} + \frac{\partial A^3}{\partial x^3}$$

$$= \frac{\partial A^0}{\partial x^0} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial A^0}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

DEFINE-SE TAMBÉM O 4-LAPLACIANO (D'ALEMBERTIANO)

$$\partial_\alpha \partial^\alpha = \frac{\partial^2}{\partial (x^0)^2} - \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \equiv \Box = \text{"CAIXA"}$$

$$\hookrightarrow g_{\alpha\beta} \, \partial_\alpha \partial_\beta$$