FI 008 – Eletrodinâmica I

1º Semestre de 2021
01/06/2021
Aula 20b

O grupo (homogêneo) de Lorentz

É O CONJUNTO DE TRANSFORMAÇÕES QUE MANTÉM A NORMA DE LORENTZ INVARIANTE:

$$x^\mu x_\mu = (x^\mu)'(x_\mu') \Rightarrow (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = (x^{0\prime})^2 - (x^{1\prime})^2 - (x^{2\prime})^2 - (x^{3\prime})^2$$

SE: $\underbrace{(x^\mu)' = A^\mu{}_\nu x^\nu}_{\text{NOTAÇÃO MATRICIAL}}$; $A^\mu{}_\nu \rightarrow$ MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO

SE CONSIDERARMOS OS VETORES-COLUNA $\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow (x^\mu)' = A^\mu{}_\nu (x^\nu) \Rightarrow \begin{pmatrix} x^{0\prime} \\ x^{1\prime} \\ x^{2\prime} \\ x^{3\prime} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & A^\mu{}_\nu & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{x' = A x}$$

$$x^\mu x_\mu = x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu \Rightarrow \boxed{x^T g\, x}$$ ONDE $x^T = (x^0\ x^1\ x^2\ x^3)$

INVARIÂNCIA DA NORMA:

$$x^T g\, x = (x')^T g\,(x') = (Ax)^T g\,(Ax)$$

$$= x^T (A^T g\, A)\, x$$

COMO ISSO DEVE SER VÁLIDO PARA TODO x:

$$\Rightarrow \boxed{A^T g\, A = g} \quad (1) \qquad g = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$

TOMANDO O DET DE (1):

$$\underbrace{\det(g)}_{-1} = \det(A^T g\, A) = \det(A^T)\det(g)\det(A)$$

$$= [\det(A)]^2 \underbrace{\det(g)}_{-1}$$

$$\Rightarrow [\det(A)]^2 = 1 \Rightarrow \boxed{\det(A) = \pm 1}$$

TRANSFORMAÇÕES PRÓPRIAS SÃO AQUELAS QUE PODEM SER OBTIDAS CONTINUAMENTE A PARTIR DA IDENTIDADE. $\Rightarrow$ TODAS ELAS TÊM DETERMINANTE <u>1</u>

ALGUMAS TRANSFORMAÇÕES NÃO PRÓPRIAS:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$PT = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} = -\mathbb{1}$$

MAS $\det(PT) = +1$, APESAR DE ELA NÃO SER PRÓPRIA

APESAR DISSO, TODA TRANSFORMAÇÃO DO GRUPO PODE SER ESCRITA COMO UMA TRANSFORMAÇÃO PRÓPRIA, SEGUIDA DE $\mathbb{1}$, P, T, PT

A PARTIR DA AGORA IREMOS FOCAR APENAS NAS TRANSFORMAÇÕES PRÓPRIAS.

QUANTOS PARÂMETROS SÃO NECESSÁRIOS ?

6 PARÂMETROS: _ 3 PARA AS ROTAÇÕES EM 3D

_ 3 PARA OS "BOOSTS" NAS DIREÇÕES

$\hat{x}$, $\hat{y}$ E $\hat{z}$

$A^T g A = g \Rightarrow$ 10 EQUAÇÕES $= 4+3+2+1$

PORQUE AS MATRIZES DOS 2 LADOS

DA EQUAÇÃO SÃO SIMÉTRICAS

$$(A^T g A)^T = A^T g A$$

$A \Rightarrow$ 16 ENTRADAS

16 ENTRADAS − 10 EQUAÇÕES = 6 PARÂMETROS

LIVRES

É CONVENIENTE TRABALHAR COM A SEGUINTE REPRESENTAÇÃO MATRICIAL:

$$A = e^{L} = \exp(L)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L^n}{n!}$$

COMO DET(A) = 1 :

$$1 = \det(A) = \det(e^{L}) = e^{Tr(L)}$$ (VER NOTAS)

$$\Rightarrow Tr(L) = 0 \qquad L \in \mathbb{R}$$

$$(1) \Rightarrow A^T g A = g \Rightarrow (e^{L})^T g\, e^{L} = g$$
$$\Rightarrow e^{L^T} g\, e^{L} = g$$
$$\times e^{-L} \Rightarrow e^{L^T} g = g\, e^{-L}$$
$$\times g \Rightarrow g\, e^{L^T} g = e^{-L}$$

MAS: $g e^{L^T} g = e^{g L^T g}$ (VER NOTAS)

$$\left[\begin{array}{l} g L^n g = \underbrace{(gLg)(gLg)\cdots(gLg)}_{n \text{ VEZES}} = (gLg)^n \\ g^2 = 1 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow e^{g L^T g} = e^{-L} \Rightarrow g L^T g = -L$$

$$\overset{\times g}{\Rightarrow} L^T g = -gL$$

$$\Rightarrow (gL)^T = -(gL)$$

$\Rightarrow (gL)$ É UMA MATRIZ ANTI-SIMÉTRICA!

Matriz 4x4 anti-simétrica genérica:

$$gL = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & L_{01} & L_{02} & L_{03} \\ \hline -L_{01} & 0 & -L_{12} & -L_{13} \\ -L_{02} & L_{12} & 0 & -L_{23} \\ -L_{03} & L_{13} & L_{23} & 0 \end{array}\right)$$

$$L = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & L_{01} & L_{02} & L_{03} \\ \hline L_{01} & 0 & L_{12} & L_{13} \\ L_{02} & -L_{12} & 0 & L_{23} \\ L_{03} & -L_{13} & -L_{23} & 0 \end{array}\right)$$

- 6 parâmetros livres.
- A parte anti-simétrica 3x3 gera as rotações.
- Os outros parâmetros geram os “boosts”.

Base para construção de L: geradores

$$
L = \left(\begin{array}{c|ccc}
0 & L_{01} & L_{02} & L_{03} \\
\hline
L_{01} & 0 & L_{12} & L_{13} \\
L_{02} & -L_{12} & 0 & L_{23} \\
L_{03} & -L_{13} & -L_{23} & 0
\end{array}\right)
$$

$$
S_1 = \left(\begin{array}{c|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right), \quad
S_2 = \left(\begin{array}{c|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0
\end{array}\right),
$$

$$
S_3 = \left(\begin{array}{c|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

$$
K_1 = \left(\begin{array}{c|ccc}
0 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
1 & & & \\
0 & & \mathbf{0} & \\
0 & & &
\end{array}\right), \quad
K_2 = \left(\begin{array}{c|ccc}
0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
0 & & & \\
1 & & \mathbf{0} & \\
0 & & &
\end{array}\right), \quad
K_3 = \left(\begin{array}{c|ccc}
0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
0 & & & \\
0 & & \mathbf{0} & \\
1 & & &
\end{array}\right)
$$

$$
\boxed{L = \sum_{i=1}^{3} L_{0i} K_i - L_{23} S_1 + L_{13} S_2 - L_{12} S_3 \equiv -\boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{K} - \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{S}}
$$

$\vec{\zeta} = \zeta_1 \hat{e}_1 + \zeta_2 \hat{e}_2 + \zeta_3 \hat{e}_3$ $\quad$ $\vec{\omega} = \omega_1 \hat{e}_1 + \omega_2 \hat{e}_2 + \omega_3 \hat{e}_3$

EXEMPLO: $\vec{\zeta} = \zeta_1 \hat{e}_1 \qquad \vec{\omega} = 0$

$$L = \zeta_1 K_1$$

$$A = e^{L} = e^{-\zeta_1 K_1} = \mathbb{1} + (-\zeta_1 K_1) + \frac{(\zeta_1 K_1)^2}{2!} + \frac{(-\zeta_1 K_1)^3}{3!} + \dots$$

$$K_1^2 = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & \multicolumn{2}{c}{0} \end{array}\right) \qquad K_1^3 = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & \multicolumn{2}{c}{0} \end{array}\right) = K_1 = K_1^5 = K_1^7 = \dots$$

$$= K_1^4 = K_1^6 = K_1^8 = \dots$$

$$A = \mathbb{1} - \underbrace{\left(\zeta_1 + \frac{\zeta_1^3}{3!} + \frac{\zeta_1^5}{5!} + \dots\right)}_{\sinh(\zeta_1)} K_1 + \underbrace{\left(\frac{\zeta_1^2}{2!} + \frac{\zeta_1^4}{4!} + \frac{\zeta_1^6}{6!} + \dots\right)}_{\cosh(\zeta_1) - 1} K_1^2$$

$$= [-\sinh(\zeta_1)] K_1 + \mathbb{1} + [\cosh(\zeta_1) - 1] K_1^2$$

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} \cosh\zeta_1 & -\sinh\zeta_1 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ -\sinh\zeta_1 & \cosh\zeta_1 & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \end{array}\right)$$

SE $\beta_1 = \tanh(\zeta_1)$

$\gamma_1 = \cosh(\zeta_1)$

$\gamma_1 \beta_1 = \sinh(\zeta_1)$

$$\Rightarrow A = \left(\begin{array}{cc|cc} \gamma_1 & -\beta_1\gamma_1 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ -\beta_1\gamma_1 & \gamma_1 & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \end{array}\right)$$

QUE É O "BOOST" NA DIREÇÃO QUE JÁ TÍNHAMOS OBTIDO ANTERIORMENTE

ζ_2 E ζ_3 DÃO "BOOSTS" NAS DIREÇÕES

$\hat{y}$ e $\hat{z}$.

$$S_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & & & \mathbf{0} \\ & 0 & & \\ & & -1 & \\ \mathbf{0} & & & -1 \end{pmatrix}, \quad S_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & & & \mathbf{0} \\ & -1 & & \\ & & 0 & \\ \mathbf{0} & & & -1 \end{pmatrix},$$

$$S_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & & & \mathbf{0} \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ \mathbf{0} & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$K_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & & & \mathbf{0} \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ \mathbf{0} & & & 0 \end{pmatrix}, \quad K_2^2 = \begin{pmatrix} 1 & & & \mathbf{0} \\ & 0 & & \\ & & 1 & \\ \mathbf{0} & & & 0 \end{pmatrix},$$

$$K_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & & & \mathbf{0} \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ \mathbf{0} & & & 1 \end{pmatrix}$$

PARA $\vec{\omega} = \omega\,\hat{e}_3 \Rightarrow L = -\omega S_3$

$$\Rightarrow A = e^{-\omega S_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & \sin\omega & 0 \\ 0 & -\sin\omega & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

QUE É UMA ROTAÇÃO DE UM ÂNGULO ω

EM TORNO DO EIXO $x^3 = z$

$\omega_1, \omega_2 \Rightarrow$ ROTAÇÕES EM TORNO DE

$\hat{x}$ E $\hat{y}$

"Boost" numa direção qualquer

$$A = e^{-\boldsymbol{\zeta}\cdot\mathbf{K}} \qquad\qquad \boldsymbol{\zeta} = \hat{\boldsymbol{\beta}}\tanh^{-1}\beta$$

$$A_{\text{boost}}(\boldsymbol{\beta}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_1 & -\gamma\beta_2 & -\gamma\beta_3 \\ -\gamma\beta_1 & 1+\dfrac{(\gamma-1)\beta_1^2}{\beta^2} & \dfrac{(\gamma-1)\beta_1\beta_2}{\beta^2} & \dfrac{(\gamma-1)\beta_1\beta_3}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_2 & \dfrac{(\gamma-1)\beta_1\beta_2}{\beta^2} & 1+\dfrac{(\gamma-1)\beta_2^2}{\beta^2} & \dfrac{(\gamma-1)\beta_2\beta_3}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_3 & \dfrac{(\gamma-1)\beta_1\beta_3}{\beta^2} & \dfrac{(\gamma-1)\beta_2\beta_3}{\beta^2} & 1+\dfrac{(\gamma-1)\beta_3^2}{\beta^2} \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \left[1 - (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2)\right]^{-1/2}$$

Álgebra (de Lie) dos geradores

$[S_1, S_2] = S_3$

$$[S_i, S_j] = \epsilon_{ijk} S_k$$

ÁLGEBRA DOS OPERADORES DE MOMENTO ANGULAR.

$$[S_i, K_j] = \epsilon_{ijk} K_k$$

REGRAS DE COMUTAÇÃO QUE INDICAM QUE K_1, K_2, K_3 SE TRANSFORMAM COMO UM VETOR.

$$[K_i, K_j] = -\epsilon_{ijk} S_k$$

DOIS BOOSTS SEGUIDOS EM DIREÇÕES DIFERENTES GERAM ROTAÇÕES