FI 008 – Eletrodinâmica I

1º Semestre de 2020

02/06/2020

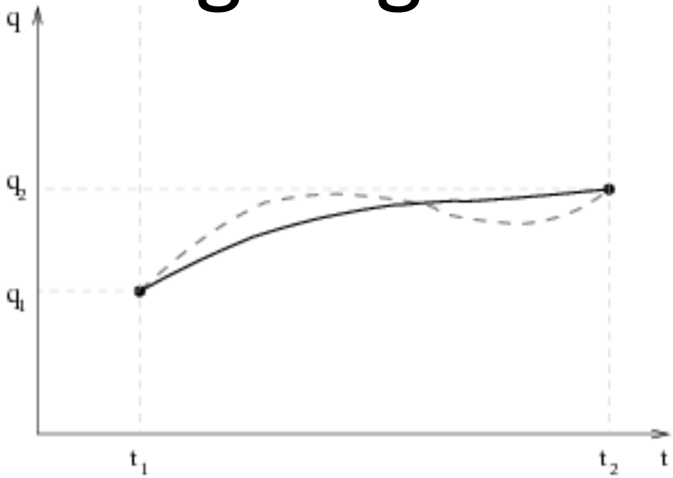
Aula 22

Formulações Lagrangiana e Hamiltoniana

Formulações Lagrangiana e Hamiltoniana: Por quê?

- Têm a mesma forma em todos os sistemas de coordenadas (Lagrangiana).
- São mais “fáceis” de derivar.
- Têm implicações importantes em outras áreas da Física: Física Estatística e Mecânia Quântica.
- Mais fundamentais?
- INCORPORAÇÃO DE VÍNCULOS.

Princípio de Hamilton e formulação Lagrangiana: caso não-relativístico



DE TODAS AS TRAJETÓRIAS DE UM SISTEMA (1 GRAU DE LIBERDADE) QUE COMEÇAM E TERMINAM EM COORDENADAS FIXAS:

$q(t_1) = q_1$ E $q(t_2) = q_2$

AQUELA QUE O SISTEMA DE FATO REALIZA É A QUE EXTREMIZA O VALOR DA AÇÃO:

$$S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L[q(t), \dot{q}(t), t]\, dt$$

NA PRÁTICA:

$$\delta L = L[q_0(t)+\delta q(t), \dot{q}_0(t)+\delta\dot{q}_0(t), t] - L[q_0(t), \dot{q}_0(t), t]$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L \, dt \implies \delta S = 0 \text{ EM 1º ORDEM EM } \delta q(t)$$

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q}\bigg|_{\substack{q_0(t)\\ \dot{q}_0(t)}} \delta q(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\bigg|_{\substack{q_0(t)\\ \dot{q}_0(t)}} \delta \dot{q}$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q}\delta q(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}(t)\right] dt$$

2º TERMO: $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d\delta q}{dt} dt = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cancelto{0}{\delta q(t)}\bigg|_{t_1}^{t_2}}_{\substack{\delta q(t_2)=0 \\ \delta q(t_1)=0}} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right] \delta q(t) dt$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\right]\bigg|_{q_0(t), \dot{q}_0(t)} \delta q(t) \, dt \quad \forall\, \delta q(t)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right] = 0$$

EQ. DE EULER-LAGRANGE

$$L = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial q} = -\dfrac{dV}{dq} \\ \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \end{cases}$$

$$\Rightarrow m\ddot{q} = -\frac{dV}{dq} = F$$

EQ. DA $2^{\underline{a}}$ LEI DE NEWTON

Formulação Hamiltoniana

1) DEFINA O MOMENTO CANONICAMENTE CONJUGADO A $\underline{q}$

$$p = p_q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}[q, \dot{q}, t]$$

2) INVERTA ESSA EQUAÇÃO E OBTENHA:

$$\dot{q} = \dot{q}[p, q, t]$$

3) DEFINA A HAMILTONIANA $H(q,p,t)$, FUNÇÃO DE q, p, t

$$H(q,p,t) = \dot{q}p - L = \dot{q}[p,q,t]p - L[q, \dot{q}(p,q,t), t]$$

4) AS EQS. DE HAMILTON:

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q} \quad \text{E} \quad \frac{\partial H}{\partial q} = -\dot{p}$$

$$L = \frac{m}{2}\dot{q} - V(q)$$

1) $$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} = p$$

2) $$\dot{q} = \frac{p}{m}$$

3) $$H = \dot{q}\,p - L = \left(\frac{p}{m}\right)p - \left[\frac{m}{2}\left(\frac{p}{m}\right)^2 - V(q)\right]$$

$$H(q,p) = \frac{p^2}{m} - \frac{p^2}{2m} + V(q) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$

4) $$\begin{cases} \dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p} = \dfrac{p}{m} \\[2ex] \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial q} = -\dfrac{dV}{dq} \end{cases} \longrightarrow m\ddot{q} = -\frac{dV}{dq} \quad \text{COMO ANTES}$$

Generalização para *n* graus de liberdade

$$L[q_i(t), \dot{q}_i(t), t] \Rightarrow S = \int_{t_1}^{t_2} L[q_i(t), \dot{q}_i(t), t]\, dt \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right] = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad (i = 1, 2, \dots, n) \Rightarrow \dot{q}_i = \dot{q}_i[q_i, p_i, t]$$

$$H = \sum_i \dot{q}_i p - L = H[q_i(t), p_i(t), t]$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Caso relativístico: lagrangiana de uma partícula livre

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L \, dt$$ QUEREMOS ACHAR L.

VAMOS PROCURAR POR AÇÕES QUE SEJAM INVARIANTES DE LORENTZ.

1) LEVA NATURALMENTE A UMA FORMULAÇÃO COVARIANTE JÁ QUE AS EQS. DE EULER-LAGRANGE TÊM A MESMA FORMA EM QUAISQUER SISTEMAS DE COORDENADAS

2) NA FORMULAÇÃO QUÂNTICA, A AÇÃO APARECE COMO A FASE DE UMA ONDA: $e^{iS/\hbar}$

COMO VIMOS, ESPERA-SE QUE A FASE DE UMA ONDA SEJA UM INVARIANTE DE LORENTZ

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \underbrace{\gamma L}_{\downarrow} \, d\tau$$

INVARIANTE DE LORENTZ

$d\tau$ É INVARIANTE DE LORENTZ

$\Rightarrow \gamma L$ = INVARIANTE DE LORENTZ

PARTÍCULA LIVRE : A ÚNICA QUANTIDADE DISPONÍVEL É A VELOCIDADE OU A 4-VELOCIDADE U^μ

INVARIANTE : $U^\mu U_\mu \Rightarrow \gamma^2(c^2 - u^2) = \dfrac{c^2 - u^2}{1 - u^2/c^2} = -c^2$

$$U^\mu = \gamma(c, \vec{u})$$

$\Rightarrow$ CHUTAMOS γL = CONST.

FAZEMOS $\gamma L = -mc^2 = m U^\mu U_\mu$

$$\Rightarrow \boxed{L = -mc^2 \sqrt{1 - u^2/c^2}} \xrightarrow[u \ll c]{} -mc^2 - mc^2\left(-\frac{u^2}{2c^2}\right)$$

$$= -mc^2 + \frac{m}{2} u^2 = \text{CONST.} + T$$

EQS. DE EULER-LAGRANGE

$$L = -mc^2\sqrt{1-u^2/c^2} = -mc^2\sqrt{1-\frac{1}{c^2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\cancel{-}mc^{\cancel{2}}}{\sqrt{}}\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right)\left(\cancel{-}\frac{\cancel{2}}{\cancel{c^2}}\dot{x}\right)$$

$$= \frac{m\dot{x}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \gamma_u m\dot{x}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right] = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(\gamma_u m\dot{x}) = 0 \Leftarrow \frac{dp_x}{dt} = 0$$

ANALOGAMENTE: $\frac{dp_y}{dt} = \frac{dp_z}{dt} = 0$ $\qquad \frac{\partial L}{\partial u} = \gamma_u m\vec{u} = \vec{p}$

OU $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \qquad \vec{p} = \gamma_u m\vec{u}$

$$\Rightarrow \boxed{L = -\frac{mc^2}{\gamma_u}}$$

Caso relativístico: lagrangiana de uma partícula sob a ação de campos **E** e **B** dados

PARTÍCULA DE MASSA $\underline{\underline{m}}$ E CARGA $\underline{\underline{e}}$ NA PRESENÇA DE $\vec{E}$ E $\vec{B}$

DINÂMICA PROCURADA: $\frac{d\vec{p}}{dt} = e\left[\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{u}\times\vec{B}\right]$; $\vec{p} = \gamma_u m \vec{u}$

$$m\frac{dU^\mu}{d\tau} = \frac{e}{c}F^{\mu\nu}U_\nu$$

PROCURAR POR INVARIANTES DE LORENTZ:

$$L = L_0 + L_1 = -mc^2\sqrt{1-u^2/c^2} + L_1$$

γL_1 = INVARIANTE DE LORENTZ

JÁ NA FORMULAÇÃO NÃO-RELATIVÍSTICA, ESCREVEMOS L_1 EM TERMOS DE Φ E $\vec{A}$, NÃO $\vec{E}$ E $\vec{B}$

DISPONÍVEIS: $A^{\mu} = (\Phi, \vec{A})$

$U^{\mu} = \gamma_u (c, \vec{u}) \Rightarrow U_{\mu} = \gamma_u (c, -\vec{u})$

$$\gamma_u L_1 \propto A^{\mu} U_{\mu} \Rightarrow \gamma_u L_1 = -\frac{e}{c} A^{\mu} U_{\mu}$$

$$A^{\mu} U_{\mu} = \gamma_u \left(c\Phi - \vec{u} \cdot \vec{A} \right)$$

$$\Rightarrow L_1 = -\frac{e}{c} \left(c\Phi - \vec{u} \cdot \vec{A} \right) = -e\Phi + \frac{e}{c} \vec{u} \cdot \vec{A}$$

$$\boxed{L = -mc^2 \sqrt{1 - u^2/c^2} - e\Phi + \frac{e}{c} \vec{u} \cdot \vec{A}} \rightarrow \begin{array}{l} \Phi = \Phi(\vec{x}, t) \\ \vec{A} = \vec{A}(\vec{x}, t) \end{array}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{u}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = \vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = -e \vec{\nabla} \Phi + \frac{e}{c} \vec{\nabla} (\vec{u} \cdot \vec{A}) = -e \vec{\nabla} \Phi + \frac{e}{c} \left[(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + \vec{u} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \right]$$

IDENTIDADE VETORIAL

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{u}} = \vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = -e\vec{\nabla}\Phi + \frac{e}{c}\left[(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} + \vec{u}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})\right]$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \vec{u}}\right] = \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{e}{c}\frac{d\vec{A}}{dt} = -e\vec{\nabla}\Phi + \frac{e}{c}\left[(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} + \vec{u}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})\right]$$

MAS: $$\frac{d\vec{A}(\vec{x},t)}{dt} = \frac{\partial\vec{A}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$= (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{e}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -e\vec{\nabla}\Phi + \frac{e}{c}\vec{u}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\underbrace{\left[-\vec{\nabla}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right]}_{\vec{E}(\vec{x},t)} + \frac{e}{c}\vec{u}\times\underbrace{(\vec{\nabla}\times\vec{A})}_{\vec{B}(\vec{x},t)} = e\left[\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{u}\times\vec{B}\right]$$

QUE É A DINÂMICA PROCURADA.

Lagrangiana de uma partícula de massa m e carga e em campos eletromagnéticos dados:

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} - e\Phi(\mathbf{x},t) + \frac{e}{c}\mathbf{u}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{x},t)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma_u m\vec{u}) = e\left[\vec{E}(\vec{x},t) + \frac{1}{c}\vec{u}\times\vec{B}(\vec{x},t)\right]$$

COMPARE COM:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\vec{x}})^2 - V(\vec{x})$$

Caso relativístico: hamiltoniana de uma partícula sob a ação de campos **E** e **B** dados

1) $\vec{\Pi} = \dfrac{\partial L}{\partial \vec{u}} = \vec{p} + \dfrac{e}{c}\vec{A} = \gamma_u m \vec{u} + \dfrac{e}{c}\vec{A} = \dfrac{m\vec{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} + \dfrac{e}{c}\vec{A}$

2) ESCREVER $\vec{u}$ EM FUNÇÃO DE $\vec{\pi}$ E $\vec{x}$

$$\vec{u} = \frac{c\vec{p}}{\sqrt{p^2+m^2c^2}} = \frac{c\vec{\pi} - e\vec{A}}{\sqrt{\left(\vec{\pi}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + m^2c^2}}$$ (VER NOTAS)

3) DEFINA:

$$H = \vec{\Pi}\cdot\vec{u} - L$$

$$H(\vec{x},\vec{\pi},t) = \sqrt{c^2\Big(\underbrace{\vec{\pi}-\frac{e}{c}\vec{A}}_{\vec{p}}\Big)^2 + m^2c^4} + e\Phi$$ (VER NOTAS)

4) EQS. DE HAMILTON:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{u} = \frac{\partial H}{\partial \vec{\pi}} \qquad \dot{\vec{\Pi}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{x}}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \vec{\pi}} = \cancel{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{\quad}} \cancel{2} c^2 \left(\vec{\pi} - \frac{e}{c}\vec{A}\right) = \frac{c(c\vec{\pi} - e\vec{A})}{\sqrt{c^2(\vec{\pi} - \frac{e}{c}\vec{A})^2 + m^2 c^4}}$$

$$= \frac{c\vec{\pi} - e\vec{A}}{\left[(\vec{\pi} - \frac{e}{c}\vec{A})^2 + m^2 c^2\right]^{1/2}} = \vec{u} \quad (1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \vec{x}} = -\frac{e}{c}\left[\frac{d\vec{A}}{dt} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right] - \frac{e}{c}\vec{u} \times (\nabla \times \vec{A}) + e\nabla\Phi = -\dot{\vec{\pi}} \quad (2)$$

$$\dot{\vec{\pi}} = \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{e}{c}\frac{d\vec{A}}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = e\Big[\underbrace{-\nabla\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}_{\vec{E}(\vec{x},t)}\Big] + \frac{e}{c}\vec{u} \times \underbrace{(\nabla \times \vec{A})}_{\vec{B}(\vec{x},t)}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = e\left[\vec{E}(\vec{x},t) + \frac{1}{c}\vec{u} \times \vec{B}(\vec{x},t)\right]$$

Hamiltoniana de uma partícula de massa m e carga e em campos eletromagnéticos dados

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\left(\mathbf{x}, t\right) \equiv \mathbf{\Pi}$$

$$H = \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{u} - L = c\left\{\left[\mathbf{\Pi} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\left(\mathbf{x}, t\right)\right]^2 + m^2c^2\right\}^{1/2} + e\Phi\left(\mathbf{x}, t\right)$$

Quadri-momento canonicamente conjugado

$$H=\sqrt{p^2c^2+m^2c^4}+e\Phi \Rightarrow H-e\Phi=E=\sqrt{p^2c^2+m^2c^4}$$

$$\vec{\pi}=\vec{p}+\frac{e}{c}\vec{A} \Rightarrow \vec{\pi}-\frac{e}{c}\vec{A}=\vec{p}$$

$$p^\mu=\left(\frac{E}{c},\vec{p}\right)=\left(\frac{H}{c}-\frac{e}{c}\Phi,\ \vec{\pi}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)$$

$$=\underbrace{\left(\frac{H}{c},\vec{\pi}\right)}_{\pi^\mu}-\frac{e}{c}\underbrace{\left(\Phi,\vec{A}\right)}_{A^\mu}$$

$$\Rightarrow p^\mu=\pi^\mu-\frac{e}{c}A^\mu \Rightarrow \pi^\mu=p^\mu+\frac{e}{c}A^\mu$$

$\pi^\mu=\left(\frac{H}{c},\vec{\pi}\right)\rightarrow$ QUADRI-MOMENTO CANONICAMENTE CONJUGADO