FI 008 – Eletrodinâmica I

1º Semestre de 2021

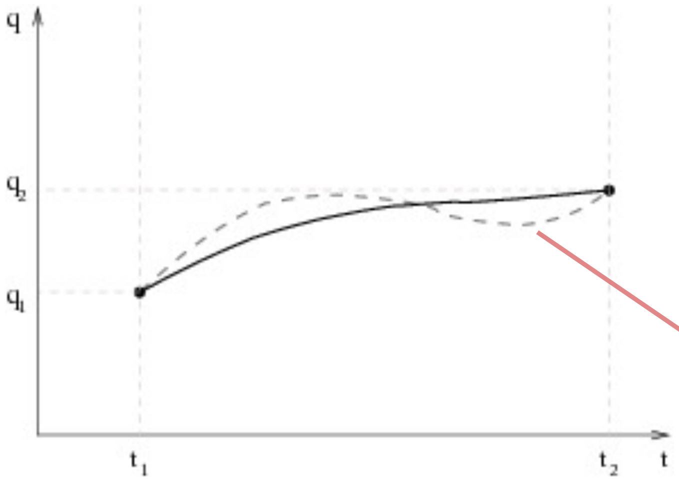
10/06/2021

Aula 22

Formulações Lagrangiana e Hamiltoniana

Dinâmica de partículas

Princípio de Hamilton e formulação Lagrangiana: caso não-relativístico



Ação: $L = T - V$

Exemplo: $L = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q)$

$$\boxed{S = \int_{t_1}^{t_2} L\left[\{q_i(t)\}, \{\dot{q}_i(t)\}, t\right] dt}$$

$$q_i(t) \;=\; q_i^0(t) + \delta q_i(t)$$

$$\dot{q}_i(t) \;=\; \dot{q}_i^0(t) + \delta \dot{q}_i(t)$$

$$\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$$

Princípio de Hamilton: a ação é mínima (crítica) na trajetória clássica

$$\boxed{\delta S = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \;\; (i = 1, 2, \ldots n)}$$

Formulação Hamiltoniana

1. Momentos canônicos: $p_i = \frac{\partial L\left[\left\{q_i\left(t\right)\right\},\left\{\dot{q}_i\left(t\right)\right\},t\right]}{\partial \dot{q}_i},\ \left(i = 1, 2, \ldots n\right)$

2. Inversão: $\dot{q}_i = \dot{q}_i\left[\left\{q_i\left(t\right)\right\},\left\{p_i\left(t\right)\right\},t\right],\ \left(i = 1, 2, \ldots n\right)$

3. Hamiltoniano: $H\left[\left\{q_i\left(t\right)\right\},\left\{p_i\left(t\right)\right\},t\right] = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L$

4. Equações de Hamilton:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i},\ \left(i = 1, 2, \ldots n\right) \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i},\ \left(i = 1, 2, \ldots n\right) \end{aligned}}$$

Ex.:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V\left(q\right)$$

Caso relativístico: lagrangiana de uma partícula livre

Ação deve ser um invariante de Lorentz:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\gamma_u L)\, d\tau = -mc^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau = -mc^2 \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\gamma_u} = -mc^2 \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} dt$$

$$\boxed{\frac{d\left(\gamma_u m \mathbf{u}\right)}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0}$$

Caso relativístico: lagrangiana de uma partícula sob a ação de campos **E** e **B** dados

A formulação exige o uso dos potenciais **Φ** e **A**.

$$\gamma_u L\left[x^\mu, U^\mu\right] = -mc^2 - \frac{e}{c} U_\mu A^\mu\left(x^\mu\right)$$

$$\begin{aligned} U_\mu &= \gamma_u\left(c, -\mathbf{u}\right) \\ A^\mu &= \left(\Phi, \mathbf{A}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{L\left[\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}\right] = -mc^2\sqrt{1 - \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{c^2}} - e\Phi\left(\mathbf{x}, t\right) + \frac{e}{c}\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}\left(\mathbf{x}, t\right)}$$

Eqs. de Euler-Lagrange:

$$\frac{d\left(\gamma_u m\mathbf{u}\right)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{\mathbf{x}}}{\sqrt{1 - \dot{\mathbf{x}}^2/c^2}}\right) = e\left\{\underbrace{-\boldsymbol{\nabla}\Phi\left(\mathbf{x}, t\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}\left(\mathbf{x}, t\right)}{\partial t}}_{\vec{E}(\vec{x},t)} + \frac{1}{c}\dot{\mathbf{x}} \times \underbrace{\left[\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}\left(\mathbf{x}, t\right)\right]}_{\vec{B}(\vec{x},t)}\right\}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

FORÇA DE LORENTZ

Caso relativístico: hamiltoniana de uma partícula sob a ação de campos **E** e **B** dados

1. Momentos canônicos: $\mathbf{\Pi} = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = \dfrac{m\dot{\mathbf{x}}}{\sqrt{1-\dot{\mathbf{x}}^2/c^2}} + \dfrac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{x},t)$

2. Inversão: $\dot{\mathbf{x}} = \dfrac{c\mathbf{\Pi} - e\mathbf{A}(\mathbf{x},t)}{\sqrt{\left[\mathbf{\Pi} - \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{x},t)\right]^2 + m^2c^2}}$

3. Hamiltoniano:

$$\boxed{H = \mathbf{\Pi}\cdot\dot{\mathbf{x}} - L = c\sqrt{\left[\mathbf{\Pi} - \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{x},t)\right]^2 + m^2c^2} + e\Phi(\mathbf{x},t)}$$

4. Equações de Hamilton: $\dot{\mathbf{x}} = \dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{\Pi}} = \dfrac{c\mathbf{\Pi} - e\mathbf{A}(\mathbf{x},t)}{\sqrt{\left[\mathbf{\Pi} - \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{x},t)\right]^2 + m^2c^2}}$

$$\dot{\mathbf{\Pi}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{\mathbf{x}}}{\sqrt{1-\dot{\mathbf{x}}^2/c^2}}\right) = e\left\{\underbrace{-\nabla\Phi(\mathbf{x},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial A(\mathbf{x},t)}{\partial t}}_{\vec{E}(\vec{x},t)} + \frac{1}{c}\dot{\mathbf{x}}\times\underbrace{\left[\nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{x},t)\right]}_{\vec{B}(\vec{x},t)}\right\}$$

$\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$