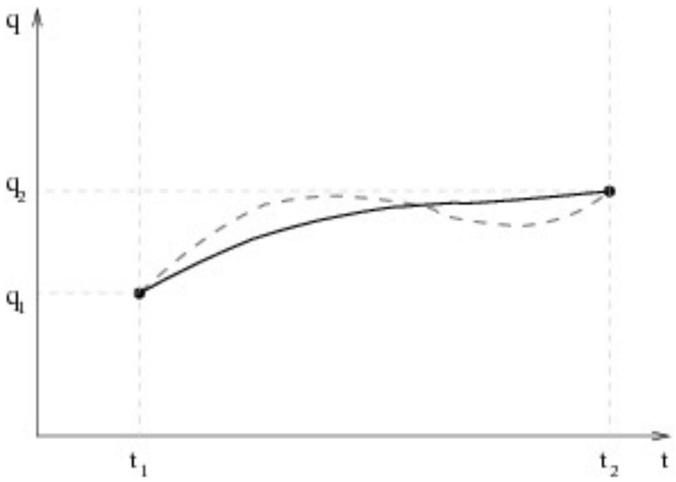
FI 008 – Eletrodinâmica I

1º Semestre de 2021
15/06/2021
Aula 23

Aula passada

Formulação Lagrangiana: Princípio de Hamilton



$$L\left[q_i\left(t\right),\dot{q}_i\left(t\right),t\right]\equiv L\left(q,\dot{q},t\right)$$

$$S=\int_{t_1}^{t_2}L\left(q,\dot{q},t\right)dt$$

Consideramos variações em torno de uma trajetória dada $q_0(t)$, que se anulam nos extremos:

$$\begin{aligned} q_i\left(t\right) &= q_i^0\left(t\right)+\delta q_i\left(t\right) \\ \dot{q}_i\left(t\right) &= \dot{q}_i^0\left(t\right)+\delta\dot{q}_i\left(t\right) \end{aligned}$$

$$\delta q_i\left(t_1\right)=\delta q_i\left(t_2\right)=0$$

Aula passada

Se impusermos que a variação da ação se anula em primeira ordem para qualquer variação, a trajetória $q_0(t)$, é a trajetória clássica.

$$\delta S = S\left[q_i^0(t) + \delta q_i(t), \dot{q}_i(t) + \delta \dot{q}_i(t), t\right] - S\left[q_i^0(t), \dot{q}_i^0(t), t\right] = 0, \text{ para todo } \delta q_i(t)$$

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right] = 0.}$$

Equações de movimento (Euler-Lagrange)

Aula passada

Lagrangiana de uma partícula de massa m e carga e em ~~campos~~ POTENCIAIS eletromagnéticos dados $(\Phi,\mathbf{A})$

$$L\left[\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}}\right]=-mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{c^2}}-e\Phi\left(\mathbf{x},t\right)+\frac{e}{c}\dot{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{A}\left(\mathbf{x},t\right)$$

$$\begin{aligned} U_\mu &= \gamma_u\left(c,-\mathbf{u}\right) \\ A^\mu &= \left(\Phi,\mathbf{A}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\gamma_u L\left[x^\mu,U^\mu\right]=-mc^2-\frac{e}{c}U_\mu A^\mu\left(x^\mu\right)}$$

Formulação Lagrangiana para teorias de campo

O índice discreto "se torna" contínuo:

$$\boxed{q_i(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, N) \Longrightarrow \phi(x, t)}$$

De maneira geral:

$$q_i(t) \;\rightarrow\; \phi_k(x^\mu)$$

$$\dot{q}_i(t) \;\rightarrow\; \partial^\alpha \phi_k(x^\mu)$$

$$\boxed{L = \sum_i L_i(q_i, \dot{q}_i, t) \;\rightarrow\; \int \mathcal{L}\left[\phi_k, \partial^\alpha \phi_k, x^\nu\right] d^3x}$$

DENSIDADE DE LAGRANGIANA

Princípio de Hamilton para teorias de campo

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left[\phi_i\left(x^\nu\right), \partial_\mu \phi_i\left(x^\nu\right), x^\nu\right]$$

$$S = \int d^4x \mathcal{L}\left[\phi_i\left(x^\nu\right), \partial_\mu \phi_i\left(x^\nu\right), x^\nu\right]$$

$$d^4x = dx^0 d^3x = c\,dt\,d^3x$$

$$\phi_i\left(x^\nu\right) = \phi_i^0\left(x^\nu\right) + \delta\phi_i\left(x^\nu\right)$$

$$\partial_\mu \phi_i\left(x^\nu\right) = \partial_\mu \phi_i^0\left(x^\nu\right) + \partial_\mu \delta\phi_i\left(x^\nu\right)$$

$$\delta\phi_i\left(x^\nu\right) = 0 \text{ nas bordas do espaço} - \text{tempo}$$

$$\delta S = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \phi_i\right)} = 0 \ \ (i = 1, 2, \ldots, N)}$$

Princípio de Hamilton para teorias de campo

$$S = \int dt L = \int dt \int \mathcal{L}\left[\phi_k, \partial^\alpha \phi_k, x^\nu\right] d^3x = \int d^4x \mathcal{L}\left[\phi_i\left(x^\nu\right), \partial_\mu \phi_i\left(x^\nu\right), x^\nu\right]$$

$$d^4x = d^3x dt \rightarrow \left(\frac{d^3x'}{\gamma_u}\right)\left(\gamma_u dt'\right) = d^4x' \Rightarrow d^4x \text{ é um escalar}$$

Para que S seja um escalar de Lorentz, $\mathcal{L}$ deve ser também um escalar.

Formulação Lagrangiana da eletrodiâmica

1. Fontes são dadas: $J^{\mu} = (c\rho, \mathbf{J})$
2. Queremos ao final recuperar as equações de Maxwell:

$$\partial_{\mu} F^{\mu\nu} = \partial_{\mu}\left(\partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu}\right) = \frac{4\pi}{c} J^{\nu}$$

$$\partial_{\mu} \widetilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_{\mu} F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_{\mu}\left(\partial_{\alpha} A_{\beta} - \partial_{\beta} A_{\alpha}\right) = 0$$

3. $\mathcal{L}$ deve ser um escalar de Lorentz
4. $A^{\mu} = (\Phi, \mathbf{A})$ são as variáveis dinâmicas: $\mathcal{L}[A^{\mu}, \partial^{\nu} A^{\mu}, J^{\mu}]$
5. Invariância sob transformações de calibre:

$$\left.\begin{array}{lll} \Phi & \to & \Phi + \frac{1}{c}\frac{\partial\lambda}{\partial t} = \Phi + \frac{\partial\lambda}{\partial x^0} \\ \mathbf{A} & \to & \mathbf{A} - \boldsymbol{\nabla}\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow A^{\mu} \to A^{\mu} + \partial^{\mu}\lambda$$

Lagrangiana da eletrodinâmica

$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$

$$\mathcal{L}\left[A^\mu, \partial^\nu A^\mu\right] = -\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{c} J_\mu A^\mu \qquad \partial_\mu J^\mu = 0$$

$$= \frac{1}{8\pi}\left[\underbrace{\left(-\nabla\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)}_{E^2}{}^2 - (\underbrace{\nabla \times \mathbf{A}}_{B^2})^2\right] - \rho\Phi + \frac{1}{c}\mathbf{J}\cdot\mathbf{A}$$

Equações de Euler-Lagrange são as equações de Maxwell com fontes:

$$\partial_\mu \underbrace{\left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right)}_{F^{\mu\nu}} = \frac{4\pi}{c} J^\nu$$

Equações de Maxwell sem fontes são automaticamente satisfeitas

$$\partial_\mu \widetilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\mu\left(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha\right) = 0$$