FI 008 – Eletrodinâmica I

1º Semestre de 2020
16/06/2020
Aula 25

Movimento de partículas em campos constantes e uniformes

Aula passada

Dados os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$, qual é o movimento de uma partícula carregada?

$$\mathbf{p} = \gamma_v m \mathbf{v}$$

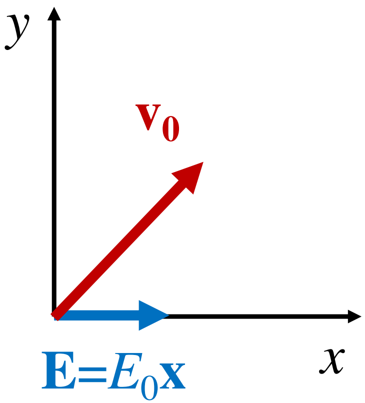
$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right)$$

$$E = \gamma_v m c^2$$

$$\frac{dE}{dt} = e\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}$$

$$\gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}; \;\; \beta = \frac{v}{c}$$

Aula passada



Caso 1: movimento hiperbólico **B**=0, **E**≠0

$$\frac{v_x(t)}{c} = \frac{eE_0t + p_{0x}}{\sqrt{m^2c^2 + p_{0y}^2 + (eE_0t + p_{0x})^2}} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

$$\frac{v_y(t)}{c} = \frac{p_{0y}}{\sqrt{m^2c^2 + p_{0y}^2 + (eE_0t + p_{0x})^2}} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$x(t) = \frac{c}{eE_0}\sqrt{m^2c^2 + p_{0y}^2 + (eE_0t + p_{0x})^2} - X$$

$$y(t) = \frac{cp_{0y}}{eE_0}\sinh^{-1}\left(\frac{eE_0t + p_{0x}}{\sqrt{m^2c^2 + p_{0y}^2}}\right) - Y$$

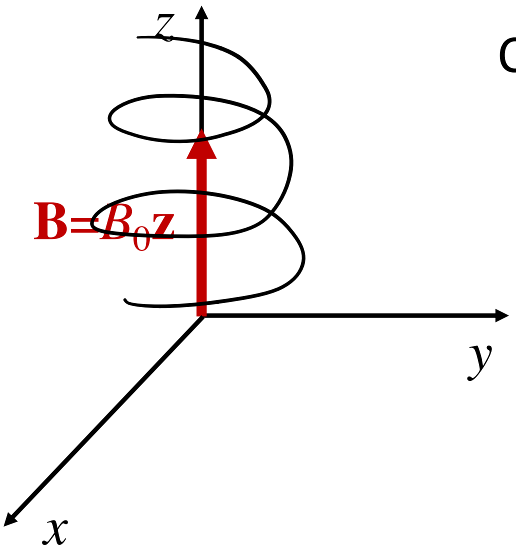
$$X = \frac{\sqrt{m^2c^4 + c^2\left(p_{0y}^2 + p_{0x}^2\right)}}{eE_0}$$

$$Y = \frac{cp_{0y}}{eE_0}\sinh^{-1}\left(\frac{p_{0x}}{\sqrt{m^2c^2 + p_{0y}^2}}\right)$$

Trajetória:

$$x + X = \frac{\sqrt{m^2c^4 + c^2p_{0y}^2}}{eE_0}\cosh\left[\frac{eE_0(y+Y)}{cp_{0y}}\right]$$

Aula passada



Caso 2: movimento helicoidal **E**=0, **B**≠0

$$|\mathbf{v}| = \text{const.} \Rightarrow E = \text{const.}$$

$$\omega_B = \frac{eB}{\gamma_v mc} = \frac{ecB}{E}$$

$$\mathbf{v}_\perp(t) = v_{0\perp}\left[\cos(\omega_B t + \delta)\,\hat{\mathbf{x}} - \sin(\omega_B t + \delta)\,\hat{\mathbf{y}}\right]$$

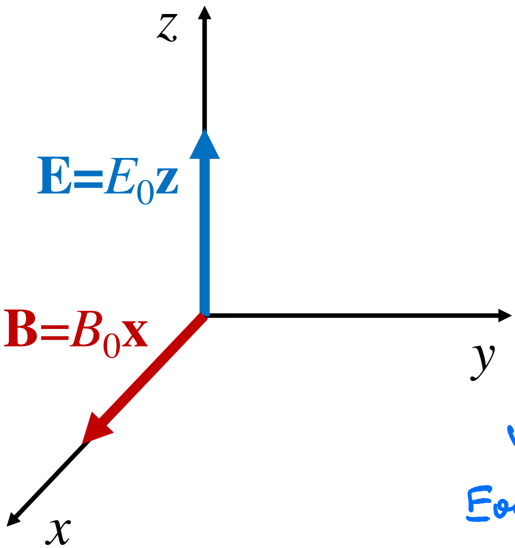
$$\mathbf{v}_\parallel(t) = v_{0\parallel}\hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{x}_\perp(t) = \frac{v_{0\perp}}{\omega_B}\left[\sin(\omega_B t + \delta)\,\hat{\mathbf{x}} + \cos(\omega_B t + \delta)\,\hat{\mathbf{y}}\right]$$

$$\mathbf{x}_\parallel(t) = \left(v_{0\parallel} t\right)\hat{\mathbf{z}}$$

$$a = \frac{v_{0\perp}}{\omega_B} = \frac{\gamma m c v_{0\perp}}{eB} = \frac{c p_{0\perp}}{eB}$$

Caso 3a: E≠0, B≠0, E⊥B (E·B=0), |E|<|B|



$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \propto E^2 - B^2$

$F^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu} \propto \vec{E}\cdot\vec{B}$

INVARIANTES DE LORENTZ

$E^2 - B^2 < 0$

EXISTE UM REFERENCIAL K' ONDE

$\vec{E}' = 0 \quad \Rightarrow E'^2 - B'^2 = -B'^2 < 0$

VOU ESCOLHER A VELOCIDADE $\vec{u}$ DE K' EM RELAÇÃO A K COMO SENDO NORMAL A $\vec{E}$ E $\vec{B}$ ($\propto \hat{y}$). NESSE CASO:

$$\vec{E}' = \gamma(\vec{E} + \vec{\beta}\times\vec{B}) \Rightarrow \vec{E}' = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\beta}\times\vec{B} = \vec{B}\times\vec{\beta} = \frac{1}{c}\vec{B}\times\vec{u} \quad (1)$$

$$\vec{B}' = \gamma(\vec{B} - \vec{\beta}\times\vec{E})$$

SE ESCOLHERMOS: $\boxed{\dfrac{\vec{u}}{c} = \vec{\beta} = \dfrac{\vec{E}\times\vec{B}}{B^2}}$

$$\frac{|\vec{u}|}{c} = \frac{|\vec{E}\times\vec{B}|}{B^2} = \frac{EB}{B^2} = \frac{E}{B} < 1$$

$$\frac{1}{c}\vec{B}\times\vec{u} = \vec{B}\times\frac{(\vec{E}\times\vec{B})}{B^2} = \frac{1}{B^2}\left[-\cancel{(\vec{B}\cdot\vec{E})}^{\,0}\vec{B} + B^2\vec{E}\right]$$

$= \vec{E}$ QUE É A CONDIÇÃO (1)

“Boost” na direção x:

$$\begin{aligned} E_1' &= E_1 & B_1' &= B_1 \\ E_2' &= \gamma(E_2 - \beta B_3) & B_2' &= \gamma(B_2 + \beta E_3) \\ E_3' &= \gamma(E_3 + \beta B_2) & B_3' &= \gamma(B_3 - \beta E_2) \end{aligned}$$

“Boost” genérico: $\vec{\beta} = \frac{\vec{u}}{c}$

$$\mathbf{E}' = \gamma(\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E})$$

$$\mathbf{B}' = \gamma(\mathbf{B} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B})$$

EM K':

$$\vec{B}' = \gamma(\vec{B} - \vec{\beta}\times\vec{E}) = \gamma\left[\vec{B} - \frac{(\vec{E}\times\vec{B})}{B^2}\times\vec{E}\right]$$

$$= \gamma\left[\vec{B} + \frac{\vec{E}\times(\vec{E}\times\vec{B})}{B^2}\right] = \gamma\left[\vec{B} + \cancel{\frac{(\vec{E}\cdot\vec{B})\vec{E}}{B^2}}^{\,0} - \frac{E^2}{B^2}\vec{B}\right] = \gamma\left(1 - \frac{E^2}{B^2}\right)\vec{B}$$

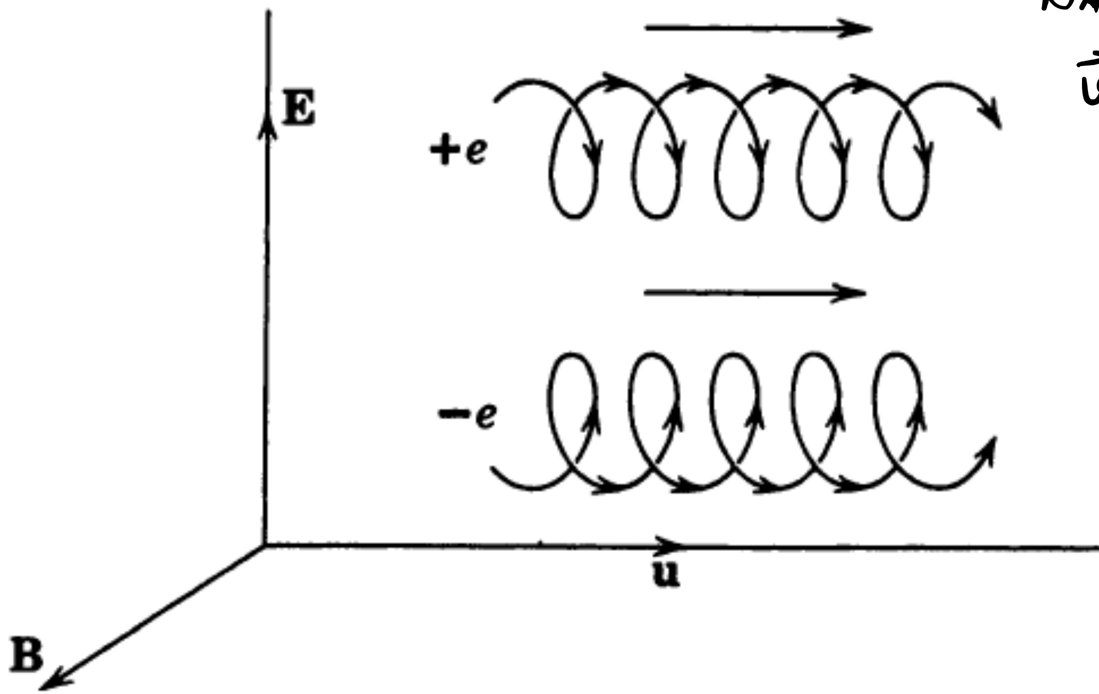
$$\gamma = \left[1 - \beta^2\right]^{-1/2} = \left[1 - \frac{E^2}{B^2}\right]^{-1/2}$$

$$\vec{B}' = \frac{(1 - E^2/B^2)\vec{B}}{\sqrt{1 - E^2/B^2}} = \sqrt{1 - E^2/B^2}\,\vec{B} = \frac{\vec{B}}{\gamma} \Rightarrow |\vec{B}'| < |\vec{B}|$$

SEGUE QUE EM K', O MOVIMENTO É HELICOIDAL.

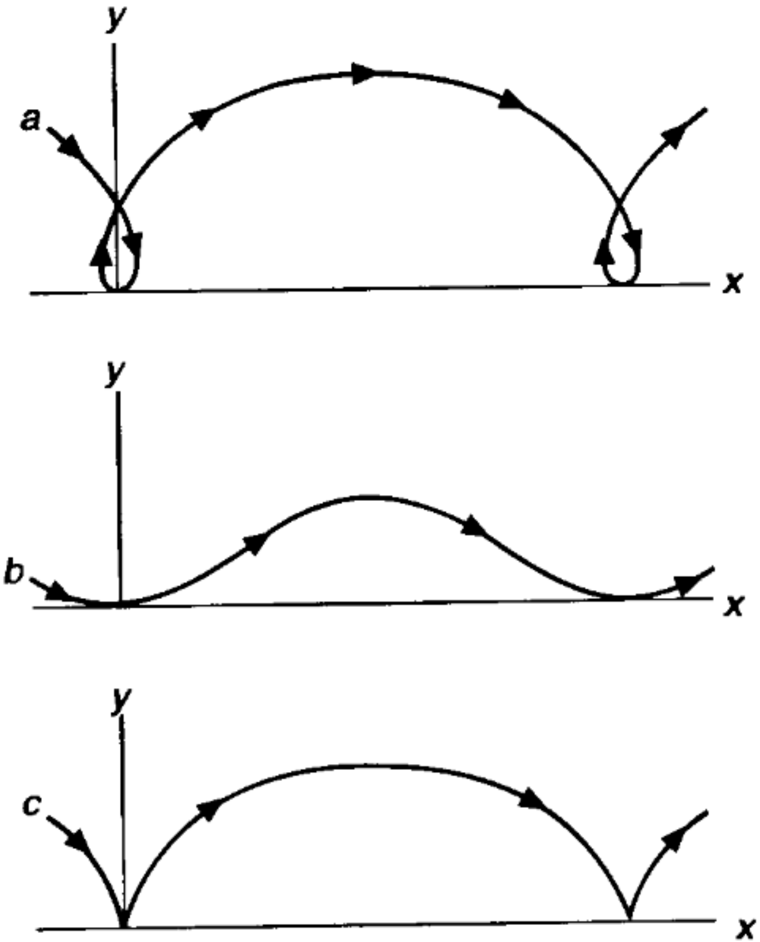
EM K, SOBREPÕE-SE A ESSE MOVIMENTO, UMA VELOCIDADE DE DERIVA ("DRIFT"): $\frac{\vec{u}}{c} = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{B^2}$

SUPERPOSIÇÃO DE UM MOVIMENTO CIRCULAR NO PLANO $(\vec{E}, \vec{B})$ A UM MOVIMENTO DE DERIVA NA DIREÇÃO $\vec{u} \propto (\vec{E} \times \vec{B})$

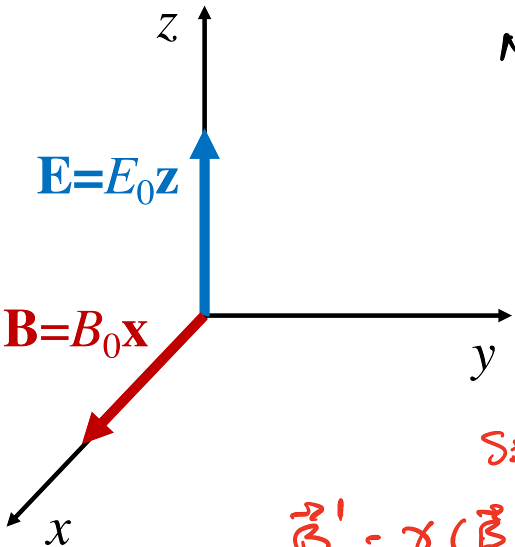


$\vec{u}$ INDEPENDE DO SINAL DA CARGA!

De maneira mais geral



Caso 3b: $\mathbf{E}\neq 0$, $\mathbf{B}\neq 0$, $\mathbf{E}\perp\mathbf{B}$ ($\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}=0$), $|\mathbf{E}|>|\mathbf{B}|$



NESSE CASO (E > B) EXISTE K' ONDE

$$\vec{B}'=0$$

DE FATO, SE $\frac{\vec{u}}{c} = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{E^2}$

$$\Rightarrow \frac{|\vec{u}|}{c} = \frac{EB}{E^2} = \frac{B}{E} < 1$$

SE ESCOLHERMOS ESSE $\vec{u}$:

$$\vec{B}' = \gamma(\vec{B} - \vec{\beta}\times\vec{E}) = \gamma\left[\vec{B} - \frac{(\vec{E}\times\vec{B})}{E^2}\times\vec{E}\right] = \gamma\left[\vec{B} + \frac{1}{E^2}\vec{E}\times(\vec{E}\times\vec{B})\right]$$

$$= \gamma\left[\vec{B} - \frac{E^2}{E^2}\vec{B}\right] = 0$$

$$\vec{E}' = \gamma\left[\vec{E} + \frac{1}{E^2}(\vec{E}\times\vec{B})\times\vec{B}\right] = \gamma\left(1 - \frac{B^2}{E^2}\right)\vec{E}$$

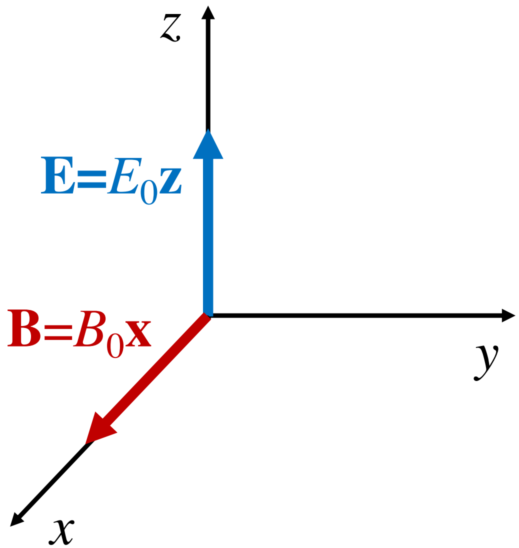
$$\vec{E}' = \sqrt{1 - B^2/E^2}\,\vec{E} = \frac{\vec{E}}{\gamma}$$

MOVIMENTO EM K' É HIPERBÓLICO

E CRESCE INDEFINIDAMENTE

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - B^2/E^2}}$$

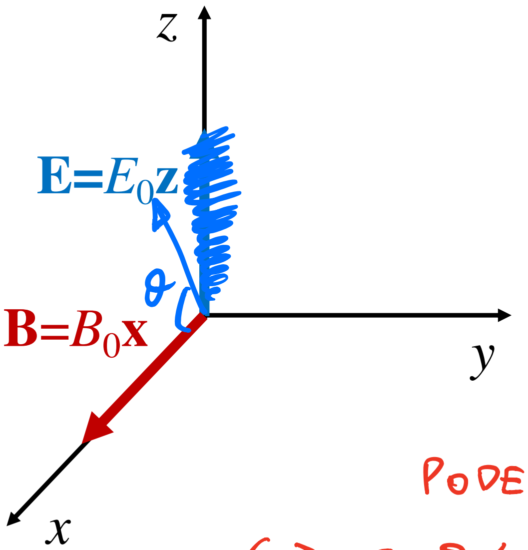
Caso 3c: $\mathbf{E}\neq 0$, $\mathbf{B}\neq 0$, $\mathbf{E}\perp\mathbf{B}$ ($\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}=0$), $|\mathbf{E}|=|\mathbf{B}|$



ESSE CASO TEM QUE SER TRATADO SEPARADAMENTE.

SUA SOLUÇÃO PODE SER OBTIDA (VER PROBLEMA 2, DA SEÇÃO 22 DE "TEORIA DO CAMPO" DO LANDAU E LIFSHITZ)

Caso 4: $\mathbf{E}\neq 0$, $\mathbf{B}\neq 0$, $\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}\neq 0$



θ = ÂNGULO ENTRE $\vec{E}$ E $\vec{B}$ $\neq \frac{\pi}{2}$

INVARIANTE $\vec{E}\cdot\vec{B} = EB\cos\theta \neq 0$

SE $\theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta' < \frac{\pi}{2}$ EM QUALQUER REFERENCIAL

SE $\theta > \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta' > \frac{\pi}{2}$ " "

PODE-SE PROVAR (VER NOTAS) QUE:

(a) SE $\theta < \frac{\pi}{2}$, EXISTE K' ONDE $\theta' = 0$

(b) SE $\theta > \frac{\pi}{2}$, " K' " $\theta' = \pi$

EM AMBOS OS CASOS $\Rightarrow \vec{E} \propto \vec{B}$, $\vec{E} \parallel \vec{B}$ NO CASO (a)

$\vec{E} \parallel -\vec{B}$ " " (b)

EM K', ONDE $\vec{E} = \alpha \vec{B}$ ($\alpha > 0$ OU < 0), O PROBLEMA PODE SER RESOLVIDO EXATAMENTE:

PROBLEMA 12.6b DO JACKSON

RESOLVIDO NO PROBLEMA 1 DA SEÇÃO 22 DO LIVRO DO LANDAU E LIFSHITZ

Radiação de cargas pontuais em movimento

Potenciais de Liénard-Wiechert

Quais são os potenciais Φ e $\mathbf{A}$ gerados por uma partícula de carga e e **trajetória dada** $\mathbf{r}(t)$?

$$\Phi(\mathbf{x},t) = \int \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\rho\left(\mathbf{x}', t-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|/c\right) d^3x'$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t) = \int \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\frac{\mathbf{J}}{c}\left(\mathbf{x}', t-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|/c\right) d^3x'$$

$$\rho(\vec{x},t) = e\,\delta^{(3)}[\vec{x}-\vec{r}(t)]$$

$$\vec{J}(\vec{x},t) = \rho(\vec{x},t)\,\dot{\vec{x}} = e\,\dot{\vec{r}}(t)\,\delta^{(3)}[\vec{x}-\vec{r}(t)]$$

$$\Phi(\vec{x},t) = \int \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\rho(\vec{x}',t')\,\delta\left[t-t'-|\vec{x}-\vec{x}'|/c\right] d^3x'\,dt'$$

$$= e\int \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\delta^{(3)}[\vec{x}'-\vec{r}(t')]\,\delta\left[t-t'-|\vec{x}-\vec{x}'|/c\right] d^3x'\,dt'$$

FAZENDO A INTEGRAL ESPACIAL:

$$\Phi(\bar{x},t) = e\int \frac{1}{|\bar{x}-\vec{r}(t')|}\,\delta\left[t-t'-|\bar{x}-\vec{r}(t')|/c\right]dt'$$

PARA CALCULAR A INTEGRAL, EU PRECISO DA FÓRMULA:

$$\int dt'\,\delta[f(t')]\,g(t') = \sum_{t_i}\frac{g(t_i)}{|f'(t_i)|}$$

ONDE t_i SÃO AS RAÍZES $\underset{\text{SIMPLES}}{\wedge}$ DE $f(t')=0$

AS RAÍZES PROCURADAS SATISFAZEM:

$$t-t_i = |\bar{x}-\bar{r}(t_i)|/c \Rightarrow \boxed{c\,(t-t_i) = |\bar{x}-\bar{r}(t_i)|}\quad (1)$$

AS SOLUÇÕES t_i SÃO FUNÇÕES DE $(\bar{x},t)$.

A INTERPRETAÇÃO FÍSICA DA EQUAÇÃO É QUE:

DADO O EVENTO $x^\mu = (ct,\vec{x})$ E $x_i^\mu = (ct_i,\vec{r}(t_i))$

$$\Rightarrow (x^\mu - x_i^\mu)(x_\mu - x_{i\mu}) = 0 \Leftrightarrow c^2(t-t_i)^2 - |\bar{x}-\vec{r}(t_i)|^2 = 0$$

OU SEJA $(\bar{x},t)$ ESTÁ NO CONE DE LUZ DE $(t_i,\vec{r}(t_i))$

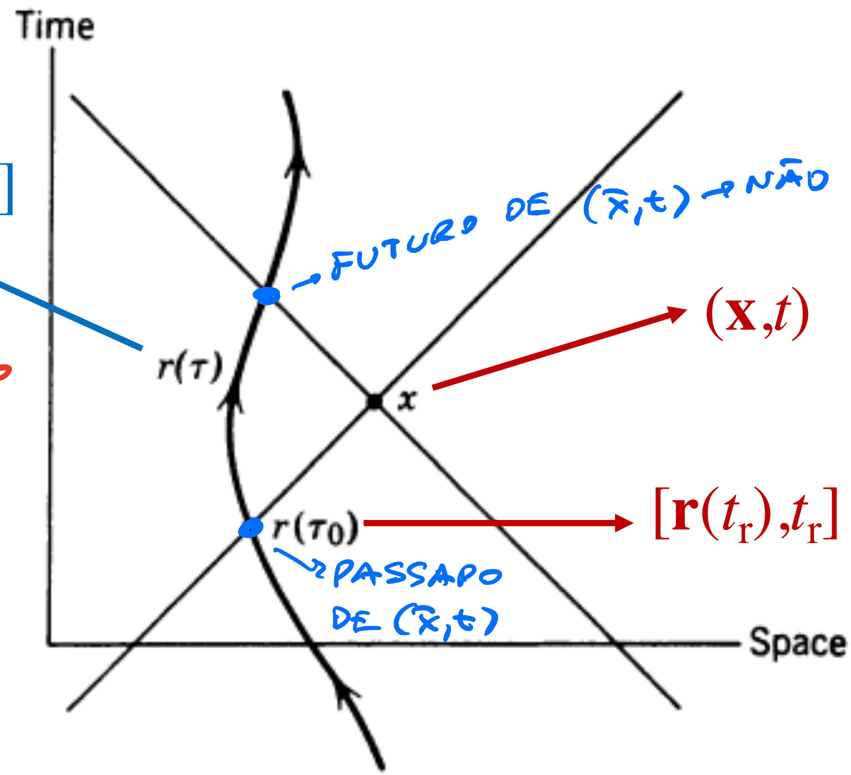
SÓ A SOLUÇÃO NO CONE DO PASSADO DE $(\bar{x},t)$ É QUE INTERESSA

$(\mathbf{x},t)$ está no cone de luz do futuro de $[\mathbf{r}(t_r),t_r]$

Trajetória:$[\mathbf{r}(t),t]$

t_r = INSTANTE RETARDADO

$t_r = \tau_0$



→ FUTURO DE $(\bar{x},t)$ → NÃO INTERESSA

→ PASSADO DE $(\bar{x},t)$

$(\mathbf{x},t)$

$[\mathbf{r}(t_r),t_r]$

É fundamental para o entendimento posterior notar que t_r e $\mathbf{r}(t_r)$ são funções de $(\mathbf{x},t)$:

$$\boxed{\begin{aligned} t_r &= t_r(\mathbf{x},t) \\ \mathbf{r}(t_r) &= \mathbf{r}[t_r(\mathbf{x},t)] \end{aligned}}$$

PRECISO CALCULAR A DERIVADA EM RELAÇÃO A t' DE

$$f(t') = t - t' - |\vec{x} - \vec{r}(t')|/c$$

$$\frac{df(t')}{dt'} = -1 - \frac{1}{c}\frac{d}{dt'}\left(|\vec{x}-\vec{r}(t')|\right) = (**)$$

$$\frac{d}{dt'}\left[|\vec{x}-\vec{r}(t')|\right] = \sum_i \underbrace{\frac{\partial|\vec{x}-\vec{r}|}{\partial r_i}}_{\vec\nabla_r|\vec{x}-\vec{r}| = \vec\nabla_r|\vec{r}-\vec{x}|} \frac{\partial r_i}{\partial t'}\Bigg|_{\vec{r}=\vec{r}(t')} = (*)$$

$$\left.\begin{aligned} &\vec\nabla_r|\vec{r}-\vec{x}| = \left(\vec\nabla_r|\vec{r}|\right)\Big|_{\vec{r}=\vec{r}-\vec{x}} \\ &\vec\nabla_r(r) = \frac{\partial r}{\partial r}\hat{r} = \hat{r} = \left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\right) \end{aligned}\right\} \quad \vec\nabla_r|\vec{r}-\vec{x}| = \frac{\vec{r}-\vec{x}}{|\vec{r}-\vec{x}|}$$

$$(*) = \frac{(\vec{r}-\vec{x})}{|\vec{r}-\vec{x}|}\cdot\dot{\vec{r}}(t)\Bigg|_{\vec{r}=\vec{r}(t')} = \frac{(\vec{r}(t')-\vec{x})}{|\vec{r}(t')-\vec{x}|}\cdot\dot{\vec{r}}(t')$$

$$\frac{df(t')}{dt'} = -1 - \frac{\dot{\vec{r}}(t')}{c}\cdot\frac{(\vec{r}(t')-\vec{x})}{|\vec{r}(t')-\vec{x}|} = -1 + \frac{\dot{\vec{r}}(t')}{c}\cdot\frac{(\vec{x}-\vec{r}(t'))}{|\vec{x}-\vec{r}(t')|}$$

O 2º TERMO É, EM MÓDULO, MENOR QUE 1

$$\underbrace{\frac{\vec{v}}{c}\cdot\underbrace{\frac{(\vec{x}-\vec{r}(t))}{|\vec{x}-\vec{r}(t)|}}_{\hat{n}\ \rightarrow\ \text{UNITÁRIO}}}_{\in(-1,1)} \Rightarrow \frac{\vec{v}\cdot\hat{n}}{c} = \frac{v}{c}\cos\theta$$

$$\Rightarrow \frac{|\vec{v}\cdot\hat{n}|}{c} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{df(t')}{dt'} < 0 \Rightarrow \left|\frac{df(t')}{dt'}\right| = -\frac{df(t')}{dt'} = 1 - \frac{\vec{v}(t')}{c}\frac{(\vec{x}-\vec{r}(t'))}{|\vec{x}-\vec{r}(t')|}$$

$$\boxed{\Phi(\vec{x},t) = \frac{e}{|\vec{x}-\vec{r}(t_r)|}\,\frac{1}{1-\frac{\vec{v}(t_r)}{c}\cdot\frac{(\vec{x}-\vec{r}(t_r))}{|\vec{x}-\vec{r}(t_r)|}}}$$

Notação:

$$\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{r}(t_r)$$

$$R = |\mathbf{x} - \mathbf{r}(t_r)|$$

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{R}}{R} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{r}(t_r)}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t_r)|}$$

$$\frac{\vec{v}(t_r)}{c} = \vec{\beta}$$

USANDO ESSA NOTAÇÃO:

$$\Phi(\bar{x}, t) = \frac{e}{R} \frac{1}{1 - \vec{\beta} \cdot \frac{\vec{R}}{R}} = \frac{e}{R} \frac{1}{1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n}} \Big|_{t = t_r}$$

ANALOGAMENTE:

$$\vec{A}(\bar{x}, t) = \frac{e\vec{\beta}}{R} \frac{1}{1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n}} \Big|_{t = t_r}$$

ESSES SÃO OS CHAMADOS POTENCIAIS DE LIÉNARD-WIECHERT

Potenciais de Liénard-Wiechert

$$\boxed{\begin{aligned}\Phi(\mathbf{x},t) &= \left.\frac{e}{R}\frac{1}{1-\boldsymbol{\beta}\cdot\hat{\mathbf{n}}}\right|_{t=t_r} \\ \mathbf{A}(\mathbf{x},t) &= \left.\frac{e}{R}\frac{\boldsymbol{\beta}}{1-\boldsymbol{\beta}\cdot\hat{\mathbf{n}}}\right|_{t=t_r}\end{aligned}}$$

$$\vec{E}(\vec{x},t) = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B}(\vec{x},t) = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

PARA O CÁLCULO DE $\vec{E}$ E $\vec{B}$ FEITO NAS NOTAS, É IMPORTANTE LEMBRAR QUE $t_r = t_r(\vec{x},t)$