FI 008 – Eletrodinâmica I

1º Semestre de 2021

22/06/2021

Aula 25

Aula passada

Dados os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$, qual é o movimento de uma partícula carregada?

$$\mathbf{p} = \gamma_v m \mathbf{v}$$

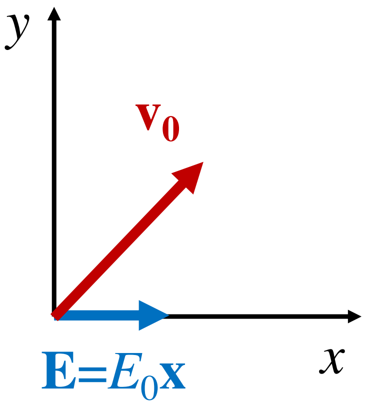
$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right)$$

$$E = \gamma_v m c^2$$

$$\frac{dE}{dt} = e\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}$$

$$\gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}; \;\; \beta = \frac{v}{c}$$

Aula passada



Caso 1: movimento hiperbólico $\mathbf{B}=0$, $\mathbf{E}\neq 0$

$$\frac{v_x(t)}{c} = \frac{eE_0 t + p_{0x}}{\sqrt{m^2c^2 + p_{0y}^2 + (eE_0 t + p_{0x})^2}} \xrightarrow[t\to\infty]{} 1$$

$$\frac{v_y(t)}{c} = \frac{p_{0y}}{\sqrt{m^2c^2 + p_{0y}^2 + (eE_0 t + p_{0x})^2}} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

$$x(t) = \frac{c}{eE_0}\sqrt{m^2c^2 + p_{0y}^2 + (eE_0 t + p_{0x})^2} - X$$

$$y(t) = \frac{cp_{0y}}{eE_0}\sinh^{-1}\left(\frac{eE_0 t + p_{0x}}{\sqrt{m^2c^2 + p_{0y}^2}}\right) - Y$$

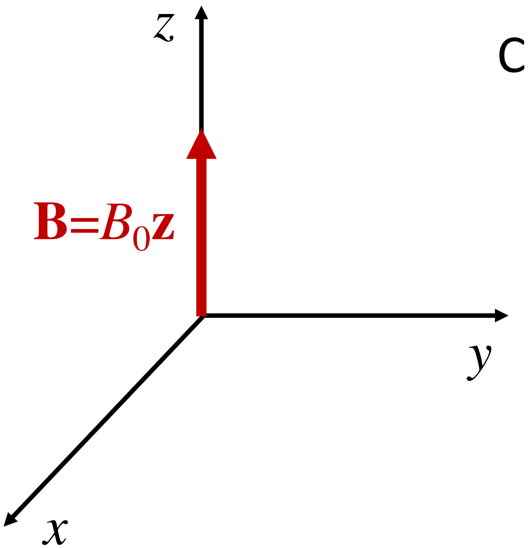
$$X = \frac{\sqrt{m^2c^4 + c^2\left(p_{0y}^2 + p_{0x}^2\right)}}{eE_0}$$

$$Y = \frac{cp_{0y}}{eE_0}\sinh^{-1}\left(\frac{p_{0x}}{\sqrt{m^2c^2 + p_{0y}^2}}\right)$$

Trajetória:

$$x + X = \frac{\sqrt{m^2c^4 + c^2p_{0y}^2}}{eE_0}\cosh\left[\frac{eE_0(y+Y)}{cp_{0y}}\right]$$

Aula passada



Caso 2: movimento helicoidal $\mathbf{E}=0$, $\mathbf{B}\neq 0$

$$E = \text{const.} \Rightarrow |\mathbf{v}| = \text{const.}$$

$$\mathbf{v}_{\perp}(t) = v_{0\perp}\left[\cos\left(\omega_B t+\delta\right)\hat{\mathbf{x}} - \sin\left(\omega_B t+\delta\right)\hat{\mathbf{y}}\right]$$

$$\mathbf{v}_{||}(t) = v_{0||}\hat{\mathbf{z}}$$

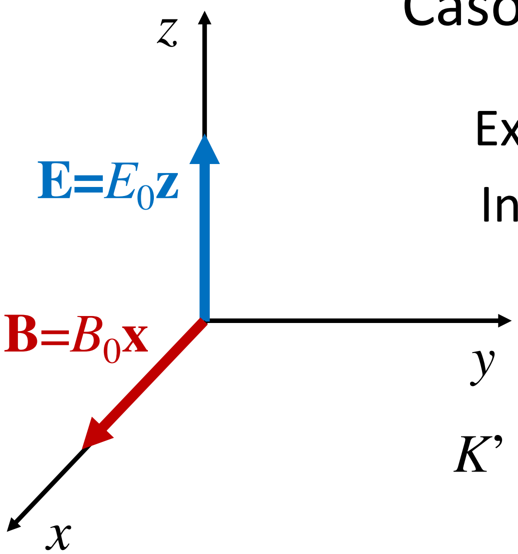
$$\mathbf{x}_{\perp}(t) = \frac{v_{0\perp}}{\omega_B}\left[\sin\left(\omega_B t+\delta\right)\hat{\mathbf{x}} + \cos\left(\omega_B t+\delta\right)\hat{\mathbf{y}}\right]$$

$$\mathbf{x}_{||}(t) = \left(v_{0||}t\right)\hat{\mathbf{z}}$$

$$\boxed{\omega_B = \frac{eB}{\gamma_v mc} = \frac{ecB}{E}}$$

$$\boxed{a = \frac{v_{0\perp}}{\omega_B} = \frac{\gamma m c v_{0\perp}}{eB} = \frac{c p_{0\perp}}{eB}}$$

Caso 3a: $\mathbf{E}\neq 0$, $\mathbf{B}\neq 0$, $\mathbf{E}\perp\mathbf{B}$ ($\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}=0$), $|\mathbf{E}|<|\mathbf{B}|$



Existe um referencial K' onde $E'=0$.

Invariante:

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \propto E^2 - B^2 < 0 \ \ (\text{em } K) \longrightarrow -B'^2 < 0 \ \ (\text{em } K')$$

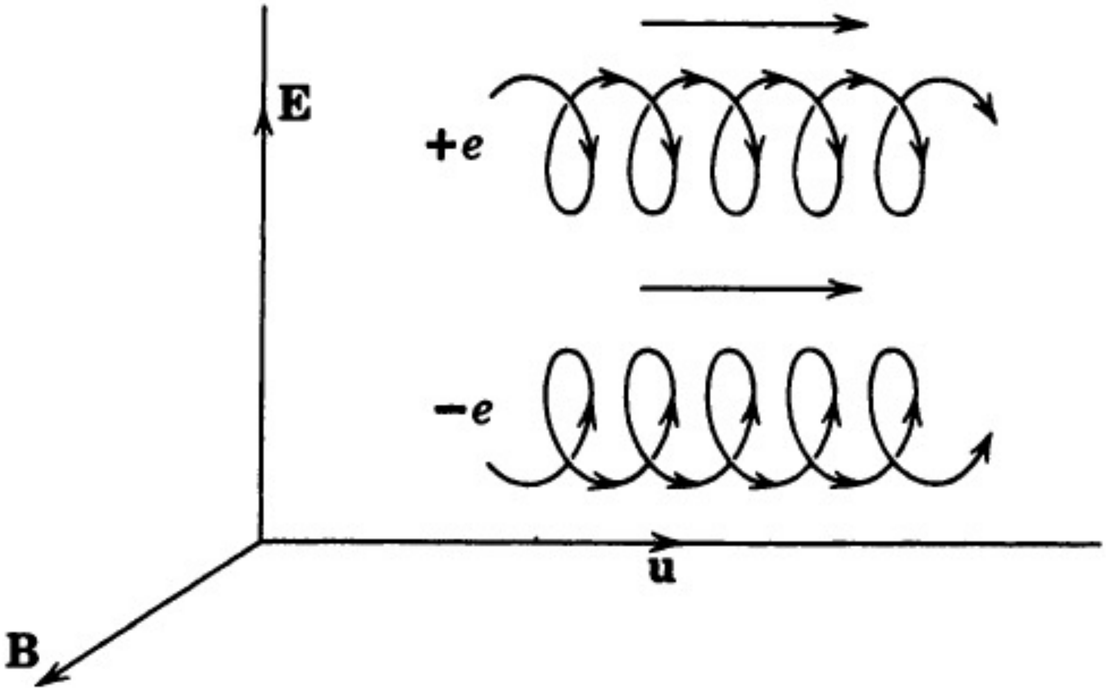
K' move-se com velocidade $\mathbf{u} \parallel y$ em relação a K

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{u}}{c} = \frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{B^2} \Rightarrow \begin{cases} E' = 0 \\ B' = \frac{B}{\gamma} = \sqrt{1-\frac{E^2}{B^2}}B \end{cases}$$

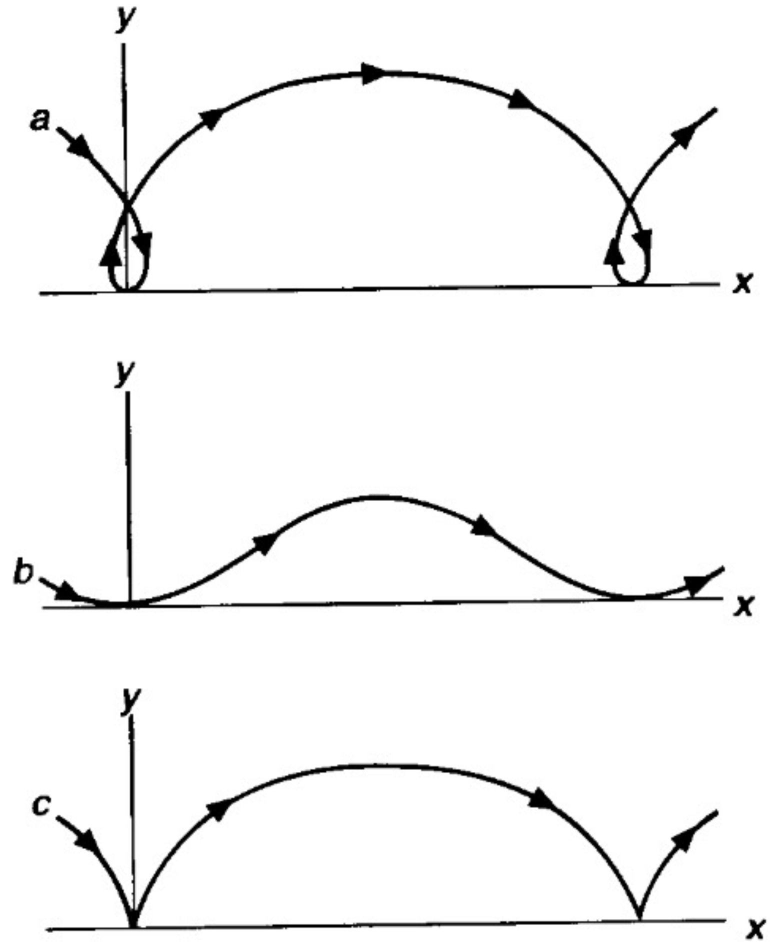
$$|\beta| = \frac{E}{B} < 1$$

Em K' o movimento é helicoidal. Em K, soma-se ao movimento helicoidal uma velocidade de deriva $\mathbf{u}$.

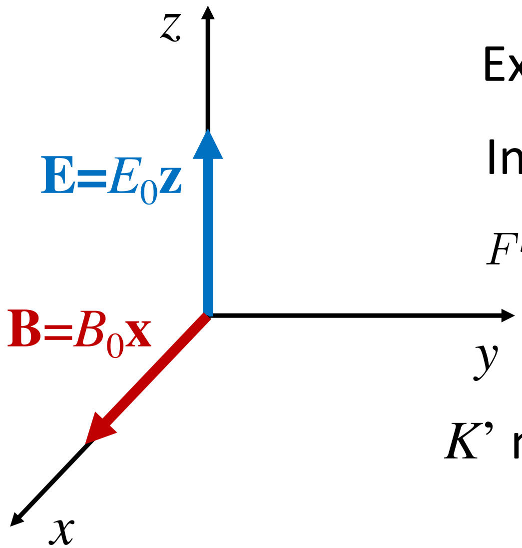
Note que o sentido de deriva independe do sinal da carga.



De maneira mais geral



Caso 3b: **E≠0, B≠0, E⊥B (E·B=0), |E|>|B|**



Existe um referencial K' onde B'=0.

Invariante:

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \propto E^2 - B^2 > 0 \ \ (\text{em } K) \longrightarrow E'^2 > 0 \ \ (\text{em } K')$$

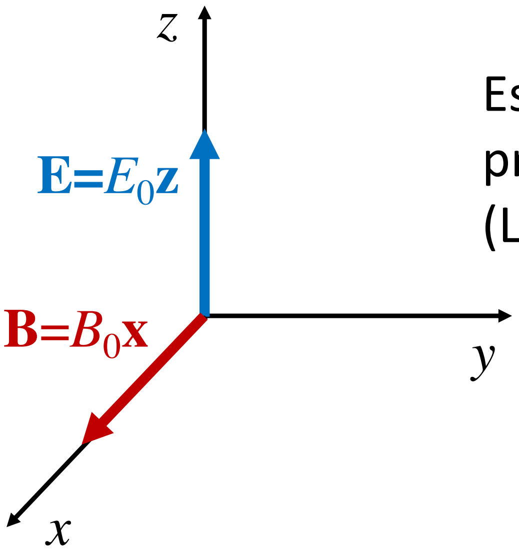
K' move-se com velocidade **u** ∥ y em relação a K

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{u}}{c} = \frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{E^2} \Rightarrow \begin{cases} E' = \frac{E}{\gamma} = \sqrt{1-\frac{B^2}{E^2}}B \\ B' = 0 \end{cases}$$

$|\vec{\beta}| = \frac{B}{E} < 1$

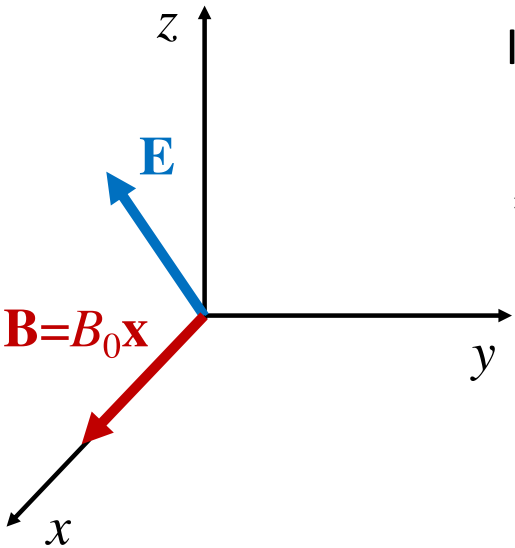
Em K' o movimento é hiperbólico. Em K, soma-se ao movimento helicoidal uma velocidade de deriva **u**.

Caso 3c: $\mathbf{E}\neq 0$, $\mathbf{B}\neq 0$, $\mathbf{E}\perp\mathbf{B}$ $(\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}=0)$, $|\mathbf{E}|=|\mathbf{B}|$



Esse caso requer tratamento separado: problema 2 da seção 22 de “Teoria do campo” (Landau & Lifshitz)

Caso 4: $\mathbf{E}\neq 0$, $\mathbf{B}\neq 0$, $\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}\neq 0$



Invariante: $\widetilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \propto \mathbf{E}\cdot\mathbf{B} = EB\cos\theta$

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta < \pi/2 \ \text{(em } K) \longrightarrow \theta' < \pi/2 \ \text{(em } K') \\ \theta > \pi/2 \ \text{(em } K) \longrightarrow \theta' > \pi/2 \ \text{(em } K') \end{cases}$$

Em cada caso, existe K' tal que:

$$\begin{cases} \text{Se } \theta < \pi/2 \ \text{(em } K) \longrightarrow \theta' = 0 \ \text{(em } K') \Rightarrow \mathbf{E}' \parallel \mathbf{B}' \\ \text{Se } \theta > \pi/2 \ \text{(em } K) \longrightarrow \theta' = \pi \ \text{(em } K') \Rightarrow -\mathbf{E}' \parallel \mathbf{B}' \end{cases}$$

Esse caso pode ser resolvido: problema 12.6(b) do Jackson ou problema 1 da seção 22 de “Teoria do campo” (Landau & Lifshitz)

Radiação de cargas pontuais em movimento

Potenciais de Liénard-Wiechert

Quais são os potenciais Φ e $\mathbf{A}$ gerados por uma partícula de carga e e **trajetória dada** $\mathbf{r}(t)$?

$$\Phi(\mathbf{x},t) = \int \frac{\rho(\mathbf{x}',t')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\delta\left[t-t'-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|/c\right]d^3x'dt'$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t) = \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}',t')}{c|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\delta\left[t-t'-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|/c\right]d^3x'dt'$$

$$\rho(\mathbf{x},t) = e\delta^{(3)}\left[\mathbf{x}-\mathbf{r}(t)\right]$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{x},t) = \rho(\mathbf{x},t)\,\dot{\mathbf{r}}(t) = e\dot{\mathbf{r}}(t)\,\delta^{(3)}\left[\mathbf{x}-\mathbf{r}(t)\right]$$

Potenciais de Liénard-Wiechert

$$\Phi(\mathbf{x},t) = \frac{e}{|\mathbf{x}-\mathbf{r}(t_r)|}\frac{1}{1-\frac{\dot{\mathbf{r}}(t_r)\cdot[\mathbf{x}-\mathbf{r}(t_r)]}{c|\mathbf{x}-\mathbf{r}(t_r)|}} = \frac{e}{R}\frac{1}{1-\boldsymbol{\beta}\cdot\hat{\mathbf{n}}}\bigg|_{t=t_r}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t) = \frac{e/c}{|\mathbf{x}-\mathbf{r}(t_r)|}\frac{\dot{\mathbf{r}}(t_r)}{1-\frac{\dot{\mathbf{r}}(t_r)\cdot[\mathbf{x}-\mathbf{r}(t_r)]}{c|\mathbf{x}-\mathbf{r}(t_r)|}} = \frac{e}{R}\frac{\boldsymbol{\beta}}{1-\boldsymbol{\beta}\cdot\hat{\mathbf{n}}}\bigg|_{t=t_r}$$

Notação:

$$\mathbf{R} = \mathbf{x}-\mathbf{r}(t_r)$$

$$R = |\mathbf{x}-\mathbf{r}(t_r)|$$

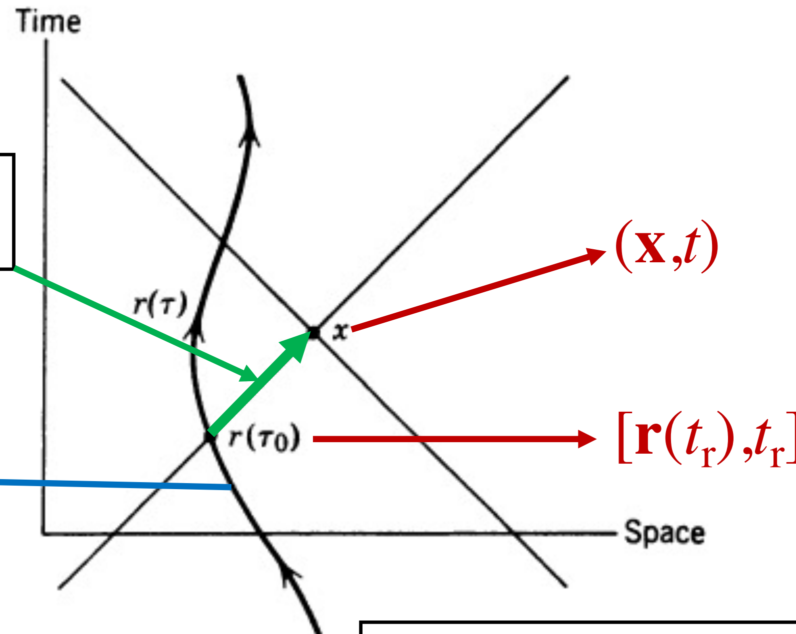
$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{R}}{R} = \frac{\mathbf{x}-\mathbf{r}(t_r)}{|\mathbf{x}-\mathbf{r}(t_r)|}$$

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t_r)}{c}$$

O tempo retardado t_r

$[\mathbf{r}(t_r), t_r]$ está no cone de luz do passado de $(\mathbf{x}, t)$:
interseção da trajetória com o cone de luz de $(\mathbf{x}, t)$

$$c\left(t - t_r\right) = \left|\mathbf{x} - \mathbf{r}\left(t_r\right)\right|$$



Trajetória: $[\mathbf{r}(t), t]$

É fundamental para o entendimento posterior notar que t_r e $\mathbf{r}(t_r)$ são funções de $(\mathbf{x}, t)$:

$$t_r = t_r\left(\mathbf{x}, t\right)$$

$$\mathbf{r}\left(t_r\right) = \mathbf{r}\left[t_r\left(\mathbf{x}, t\right)\right]$$

12.27 (a)

$\delta S = 0$ re $q_{ce}(t) \to q_{ce}(t) + \delta q(t)$

$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L \, dt$$

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} \left[L + \frac{df}{dt}\left[\{q_i(t)\}, t\right] \right] dt$$

$$S' = \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} L \, dt}_{S} + f\left[\{q_i(t_2)\}, t_2\right] - f\left[\{q_i(t_1)\}, t_1\right]$$

$\delta S' = \delta S$