FI 008 – Eletrodinâmica I

1º Semestre de 2020
23/06/2020
Aula 26

Aula passada

Potenciais Φ e $\mathbf{A}$ gerados por uma partícula de carga e e **trajetória dada** $\mathbf{r}(t)$: potenciais de Liénard-Wiechert

$$\Phi(\mathbf{x},t) = \frac{e}{|\mathbf{x}-\mathbf{r}(t_r)|}\frac{1}{1-\frac{\dot{\mathbf{r}}(t_r)\cdot[\mathbf{x}-\mathbf{r}(t_r)]}{c|\mathbf{x}-\mathbf{r}(t_r)|}} = \frac{e}{R}\frac{1}{1-\boldsymbol{\beta}\cdot\hat{\mathbf{n}}}\bigg|_{t=t_r}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t) = \frac{e/c}{|\mathbf{x}-\mathbf{r}(t_r)|}\frac{\dot{\mathbf{r}}(t_r)}{1-\frac{\dot{\mathbf{r}}(t_r)\cdot[\mathbf{x}-\mathbf{r}(t_r)]}{c|\mathbf{x}-\mathbf{r}(t_r)|}} = \frac{e}{R}\frac{\boldsymbol{\beta}}{1-\boldsymbol{\beta}\cdot\hat{\mathbf{n}}}\bigg|_{t=t_r}$$

Notação:

$$\mathbf{R} = \mathbf{x}-\mathbf{r}(t_r)$$

$$R = |\mathbf{x}-\mathbf{r}(t_r)|$$

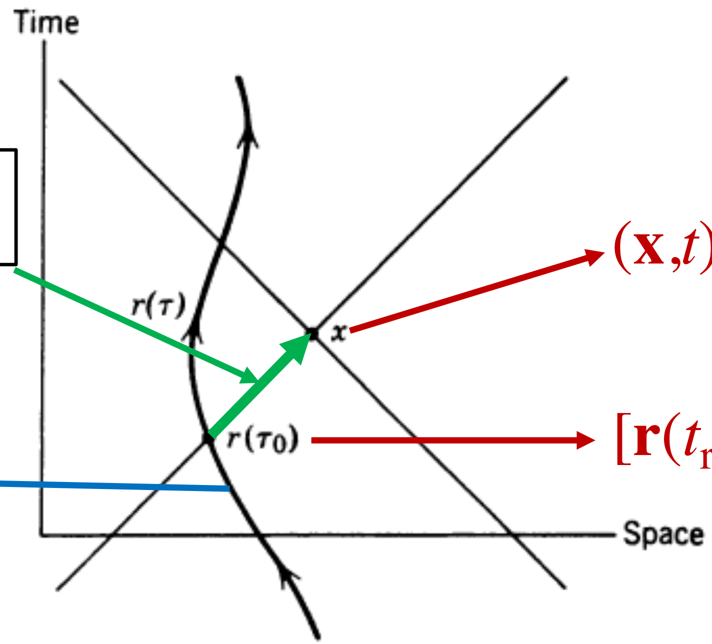
$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{R}}{R} = \frac{\mathbf{x}-\mathbf{r}(t_r)}{|\mathbf{x}-\mathbf{r}(t_r)|}$$

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t_r)}{c}$$

Aula passada

O tempo retardado t_r: $(\mathbf{x},t)$ está no cone de luz do futuro de $[\mathbf{r}(t_r),t_r]$

$$\boxed{c\left(t-t_r\right)=\left|\mathbf{x}-\mathbf{r}\left(t_r\right)\right|}$$



$(\mathbf{x},t)$

$[\mathbf{r}(t_r),t_r]$

Trajetória: $[\mathbf{r}(t),t]$

É fundamental para o entendimento posterior notar que t_r e $\mathbf{r}(t_r)$ são funções de $(\mathbf{x},t)$:

$$\boxed{\begin{aligned} t_r &= t_r\left(\mathbf{x},t\right) \\ \mathbf{r}\left(t_r\right) &= \mathbf{r}\left[t_r\left(\mathbf{x},t\right)\right] \end{aligned}}$$

Campos de Liénard-Wiechert

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \qquad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

DEVEMOS NOTAR QUE Φ E $\vec{A}$ DEPENDEM EXPLICITAMENTE DE $\vec{x}$ E IMPLICITAMENTE DE $(\vec{x}, t)$ ATRAVÉS DE $t_r = t_r(\vec{x}, t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial t_r}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t_r} \quad \text{E} \quad \vec{\nabla} = \vec{\nabla}\Big|_{EX} + \vec{\nabla}(t_r)\frac{\partial}{\partial t_r}$$

DAS NOTAS:

$$\frac{\partial t_r}{\partial t} = \frac{1}{(1-\vec{\beta}\cdot\hat{n})}\Bigg|_{t=t_r}$$

$$\vec{\nabla}(t_r) = \frac{-\hat{n}/c}{(1-\vec{\beta}\cdot\hat{n})}\Bigg|_{t=t_r}$$

Campos de Liénard-Wiechert

$$\mathbf{E} = \frac{e}{(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\hat{\mathbf{n}})^3}\left\{\underbrace{\frac{\hat{\mathbf{n}}-\boldsymbol{\beta}}{\gamma^2 R^2}}_{\vec{E}_v} + \underbrace{\frac{1}{c}\frac{\hat{\mathbf{n}}\times\left[(\hat{\mathbf{n}}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\right]}{R}}_{\vec{E}_a}\right\}\Bigg|_{t=t_r}$$

$$\mathbf{B} = (\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{E})\big|_{t=t_r}$$

Notação:

$$\mathbf{R} = \mathbf{x}-\mathbf{r}(t_r)$$

$$R = |\mathbf{x}-\mathbf{r}(t_r)|$$

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{R}}{R} = \frac{\mathbf{x}-\mathbf{r}(t_r)}{|\mathbf{x}-\mathbf{r}(t_r)|}$$

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t_r)}{c}$$

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \frac{\ddot{\mathbf{r}}(t_r)}{c}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Comentários sobre os campos

. OS CAMPOS TÊM DUAS CONTRIBUIÇÕES:

. UMA, QUASE-ESTÁTICA, QUE NÃO DEPENDE DE $\vec{a}$, CAI COM $\frac{1}{R^2}$.

. OUTRA, DE RADIAÇÃO, QUE É NULA SE $\vec{a} = 0$ E CAI COM $\frac{1}{R}$

. OS CAMPOS DE RADIAÇÃO, $\vec{E}_a$ E $\vec{B}_a$, SÃO TAIS QUE:

$$\vec{E}_a \perp \vec{B}_a \,, \quad \vec{E}_a \perp \hat{n} \,, \quad \vec{B}_a \perp \hat{n}$$

$\Rightarrow$ TRÍADE ORTOGONAL

Campos de uma carga em MRU

Ver final da Seção 14.1 do Jackson.

ACHAR OS CAMPOS DE LIÉNARD-WIECHERT DE UMA PARTÍCULA EM MRU EM K:

$$\vec{r}(t) = \underbrace{c\beta}_{v} t\,\hat{x}$$

$\Rightarrow \vec{E}_a = 0$, SÓ $\vec{E}_v \neq 0$

PRIMEIRO, É NECESSÁRIO CALCULAR t_r COMO FUNÇÃO DE $\vec{x}, t$: $\quad t_r = t_r(x, y, z, t)$

COMPARAR COM OS CAMPOS OBTIDOS ATRAVÉS DE UMA TRANSFORMAÇÃO DE LORENTZ DE UM REFERENCIAL K' ONDE A PARTÍCULA ESTÁ EM REPOUSO: $\vec{E}' \neq 0, \vec{B}' = 0$

Distribuição angular da potência total irradiada

VETOR DE POYNTING: $\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E}_a \times \vec{B}_a = \frac{c}{4\pi}\vec{E}_a \times (\hat{n} \times \vec{E}_a) =$

$$= \frac{c}{4\pi}\left[|\vec{E}_a|^2 \hat{n} - \cancelto{0}{(\vec{E}_a \cdot \hat{n})}\vec{E}_a\right] = \frac{c}{4\pi}|\vec{E}_a|^2 \hat{n}$$

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = R^2(\hat{n}\cdot\vec{S}) = \frac{c}{4\pi}R^2|\vec{E}_a|^2 = \frac{c}{4\pi}\frac{e^2/c^2}{(1-\vec{\beta}\cdot\hat{n})^6}\left|\hat{n}\times[(\hat{n}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}}]\right|^2$$

$$= \frac{e^2}{4\pi c}\frac{1}{(1-\vec{\beta}\cdot\hat{n})^6}\left|\hat{n}\times[(\hat{n}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}}]\right|^2$$

NORMALMENTE, O QUE CONTROLAMOS É O TEMPO DA PARTÍCULA t_r:

$$E_{RAD} = \int_{t_r=t_r^i}^{t_r=t_r^f}\frac{dE}{dt_r}dt_r = \int \overbrace{\frac{dE}{dt_r}\frac{\partial t_r}{\partial t}}^{P(t)}dt \Rightarrow P(t) = P(t_r)\frac{\partial t_r}{\partial t}$$

$$P(t_r) = \frac{\partial t}{\partial t_r}P(t)$$

$$\frac{dP(t_r)}{d\Omega} = \frac{dP(t)}{d\Omega}\frac{\partial t}{\partial t_r} = (1-\vec{\beta}\cdot\hat{n})\frac{dP(t)}{d\Omega}$$

$$\boxed{\frac{dP(t_r)}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c}\frac{1}{(1-\vec{\beta}\cdot\hat{n})^5}\left|\hat{n}\times[(\hat{n}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}}]\right|^2\Big|_{t_r}} \quad (1)$$

LIMITE NÃO RELATIVÍSTICO: $|\vec{\beta}| << 1$, $(1-\vec{\beta}\cdot\hat{n}) \cong 1$

$$\frac{dP_{NR}}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c}|\hat{n}\times(\hat{n}\times\dot{\vec{\beta}})|^2 = \frac{e^2}{4\pi c}\cancelto{1}{|\hat{n}|^2}\,|\hat{n}\times\dot{\vec{\beta}}|^2 \cancelto{1}{\sin^2\underbrace{(\hat{n},\hat{n}\times\dot{\vec{\beta}})}_{\pi/2}}$$

$$= \frac{e^2}{4\pi c}|\hat{n}\times\dot{\vec{\beta}}|^2 = \frac{e^2}{4\pi c^3}|\hat{n}\times\vec{a}|^2 = \frac{e^2}{4\pi c^3}a^2\sin^2\theta$$

θ = ÂNGULO ENTRE $\hat{n}$ E $\vec{a}$: $\frac{dP_{NR}}{d\Omega} \to$ MÁXIMO QUANDO $\hat{n}\perp\vec{a}$

0 '' $\hat{n}\parallel\vec{a}$

$$P_{NR} = \int\frac{dP_{NR}}{d\Omega}\,d\phi\sin\theta\,d\theta = 2\pi\int_0^{\pi}\frac{e^2}{4\pi c^3}a^2\sin^3\theta\,d\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{NR} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}a^2}$$

FÓRMULA DE LARMOR

Distribuição angular da potência total irradiada

$$\frac{dP\left(t_r\right)}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c}\frac{1}{\left(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\hat{\mathbf{n}}\right)^5}\left.\left|\hat{\mathbf{n}}\times\left[\left(\hat{\mathbf{n}}-\boldsymbol{\beta}\right)\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\right]\right|^2\right|_{\mathrm{ret}}$$

$$\frac{dP_{\text{não}-\text{relat.}}}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c}\left|\hat{\mathbf{n}}\times\left[\hat{\mathbf{n}}\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\right]\right|^2 = \frac{e^2a^2}{4\pi c^3}\sin^2\theta$$

Potência total irradiada (caso geral)

INTEGRAR O RESULTADO (1) EM TODAS AS DIREÇÕES DE $\hat{n}$ É POSSÍVEL, MAS MUITO LONGO.

UMA ALTERNATIVA É A SEGUINTE:

$$P = \frac{dE}{dt}$$

E E t SÃO AMBOS AS COMPONENTES TEMPORAIS DE 2 QUADRI-VETORES: $\left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$, $(ct, \vec{x})$

PODE-SE MOSTRAR QUE, NA VERDADE, P É UM INVARIANTE DE LORENTZ. OBSERVANDO (1), VEMOS QUE P DEVE SER FUNÇÃO DE $\vec{\beta}$ E $\dot{\vec{\beta}}$. TEMOS OS DOIS 4-VETORES: $U^\mu = \gamma(c, \vec{v}) = \frac{dx^\mu}{d\tau}$, $a^\mu = \frac{dU^\mu}{d\tau}$

COM ESSES 4-VETORES, É POSSÍVEL CONSTRUIR 3 INVARIANTES DE LORENTZ: $U^\mu U_\mu$, $a^\mu a_\mu$, $U^\mu a_\mu$

$$U^\mu U_\mu = \gamma^2 (c^2 - v^2) = \frac{1}{1 - v^2/c^2}(c^2 - v^2) = \frac{c^2}{c^2 - v^2}(c^2 - v^2) = c^2$$

SE EU DERIVAR A ÚLTIMA EQUAÇÃO EM RELAÇÃO A τ

$$\frac{dU^\mu}{d\tau} U_\mu + U^\mu \left(\frac{dU_\mu}{d\tau} \right) = 2 U^\mu \underbrace{\frac{dU_\mu}{d\tau}}_{a_\mu} = 0 \Rightarrow U^\mu a_\mu = 0$$

RESTA APENAS $a^\mu a_\mu$. NAS NOTAS, MOSTRAMOS QUE:

$$a^\mu a_\mu = -c^2 \gamma^6 \left[|\dot{\vec{\beta}}|^2 - |\vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}}|^2 \right]$$

$$\Rightarrow P = -\alpha c^2 \gamma^6 \left[|\dot{\vec{\beta}}|^2 - |\vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}}|^2 \right]$$

ONDE α É UMA CONSTANTE A SER DETERMINADA.

α PODE SER ENCONTRADA IMPONDO QUE P TEM DE SE REDUZIR A $P_{NR} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}a^2 = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c}|\dot{\vec{\beta}}|^2$ NO LIMITE NÃO RELATIVÍSTICO $(|\vec{\beta}| << 1)$

$$P \xrightarrow[\beta << 1]{} -\alpha c^2 |\dot{\vec{\beta}}|^2$$

COMPARANDO: $-\alpha c^2 = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c}$

$$\Rightarrow \boxed{P = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c}\gamma^6\left[|\dot{\vec{\beta}}|^2 - |\vec{\beta}\times\dot{\vec{\beta}}|^2\right]}$$

FÓRMULA DE LIÉNARD

Potência total irradiada

$$P = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c}\gamma^6\left[\left|\dot{\boldsymbol{\beta}}\right|^2 - \left|\boldsymbol{\beta}\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\right|^2\right] \quad \text{(Fórmula de Liénard)}$$

$$P_{\text{não-relat.}} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c}\left|\dot{\boldsymbol{\beta}}\right|^2 = \frac{2}{3}\frac{e^2 a^2}{c^3} \quad \text{(Fórmula de Larmor)}$$