FI 008 – Eletrodinâmica I

1º Semestre de 2021

23/03/2021

Aula 3

Aula passada

Eletrostática:
$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0},$$
$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi, \quad \Phi = -\int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$$

$$-\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\Phi = \boxed{\nabla^2\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

Equação de Poisson

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{T.\,E.} \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} d^3x'$$

Solução geral da Equação de Poisson

Aula passada

Equação não-homogêna: $\nabla^2\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$

Equação auxiliar: $\nabla^2 G\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right) = \delta^{(3)}\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right)$

Solução da equação auxiliar: $G\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right|}$

Solução da equação não-homogênea:

$$\Phi\left(\mathbf{x}\right) = \underbrace{\int}_{\text{T.E.}} G\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right)\left[-\frac{\rho\left(\mathbf{x}'\right)}{\epsilon_0}\right] d^3x' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\underbrace{\int}_{\text{T.E.}} \frac{\rho\left(\mathbf{x}'\right)}{\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right|} d^3x'$$

Aula passada

Eq. diferencial linear parcial não-homogênea:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m} \equiv A(t)$$

Equação auxiliar: $\ddot{g} + 2\gamma\dot{g} + \omega_0^2 g = \delta(t - t')$

Solução geral da eq. homogênea (caso sub-amortecido):

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t + \eta) \quad \omega_0 > \gamma; \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

Condição de contorno/inicial: $x(t) = 0 \quad (t < t')$

Continuidade da função em $t = t'$:

$$x(t \to t'^{+}) = \underbrace{x(t \to t'^{-})}_{=0} \Rightarrow x(t) = Ae^{-\gamma t}\sin[\omega_1 (t - t')] \quad (t > t')$$

TOMAMOS A EQUAÇÃO PARA $g(t-t')$ E INTEGRAMOS DE $t'-\epsilon$ A $t'+\epsilon$, ONDE $\epsilon \to 0^+$

$$\int_{t'-\epsilon}^{t'+\epsilon} [\ddot{g} + 2\gamma \dot{g} + \omega_0^2 g]\, dt = \int_{t'-\epsilon}^{t'+\epsilon} \delta(t-t')\, dt = 1$$

$$\int_{t'-\epsilon}^{t'+\epsilon} g(t)\, dt \cong g(t') \int_{t'-\epsilon}^{t'+\epsilon} dt = 2\epsilon\, g(t') \xrightarrow[\epsilon \to 0^+]{} 0$$

$$\int_{t'-\epsilon}^{t'+\epsilon} \dot{g}(t)\, dt = g(t'+\epsilon) - g(t'-\epsilon) \xrightarrow[\epsilon \to 0^+]{} 0,$$ PORQUE $g(t)$ É CONTÍNUA EM t'

$$\int_{t'-\epsilon}^{t'+\epsilon} \ddot{g}(t)\, dt = \dot{g}(t'+\epsilon) - \underbrace{\dot{g}(t'-\epsilon)}_{0} = \dot{g}(t'^+) \neq 0$$

$$\Rightarrow \dot{g}(t'^+) = 1 \Rightarrow \dot{g}(t) = A\left[-\gamma e^{-\gamma t} \sin(\omega_1(t-t')) + \omega_1 e^{-\gamma t} \cos(\omega_1(t-t'))\right]$$

$$\dot{g}(t'^+) = A\omega_1 e^{-\gamma t'} = 1 \Rightarrow A = \frac{e^{\gamma t'}}{\omega_1}$$

$$\Rightarrow g(t) = \frac{1}{\omega_1} e^{-\gamma(t-t')} \sin[\omega_1(t-t')] \qquad (t > t')$$

$$x_{nh}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t,t')\, A(t')\, dt'$$

$$= \int_{-\infty}^{t} g(t,t')\, A(t')\, dt'$$

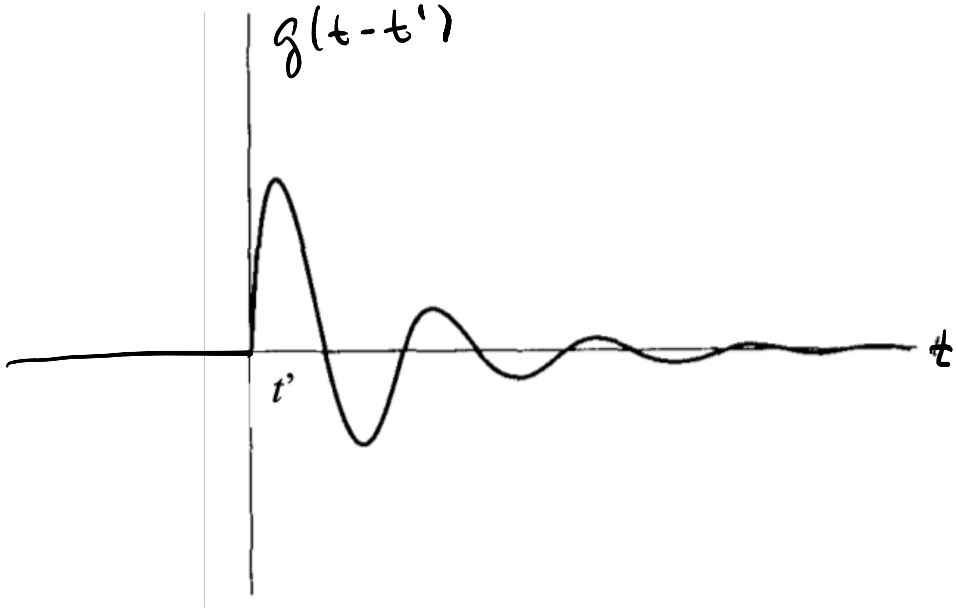
$$x_{nh}(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{e^{-\gamma(t-t')}}{\omega_1} \sin[\omega_1(t-t')]\, A(t')\, dt'$$

SOLUÇÃO GERAL:

$$x(t) = A\, e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \eta) + x_{nh}(t)$$

$$\ddot{g} + 2\gamma\dot{g} + \omega_0^2 g = \delta\left(t - t'\right)$$

$$x\left(t\right) \equiv g\left(t - t'\right) = \begin{cases} 0 & \left(t < t'\right) \\ \frac{1}{\omega_1} e^{-\gamma\left(t - t'\right)} \sin\left[\omega_1\left(t - t'\right)\right] & \left(t > t'\right) \end{cases}$$



Método da função de Green em 1D

Equação não-homogênea: $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = A(t)$

Equação auxiliar: $\ddot{g} + 2\gamma\dot{g} + \omega_0^2 g = \delta(t - t')$

Solução da equação auxiliar (com condições de contorno):

$$g(t - t') = \begin{cases} 0 & (t < t') \\ \frac{1}{\omega_1} e^{-\gamma(t-t')} \sin[\omega_1 (t - t')] & (t > t') \end{cases}$$

Solução da equação não-homogêna:

$$x_{nh}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(t') g(t - t') \, dt' = \int_{-\infty}^{t} \frac{A(t')}{\omega_1} e^{-\gamma(t-t')} \sin[\omega_1 (t - t')] \, dt'$$

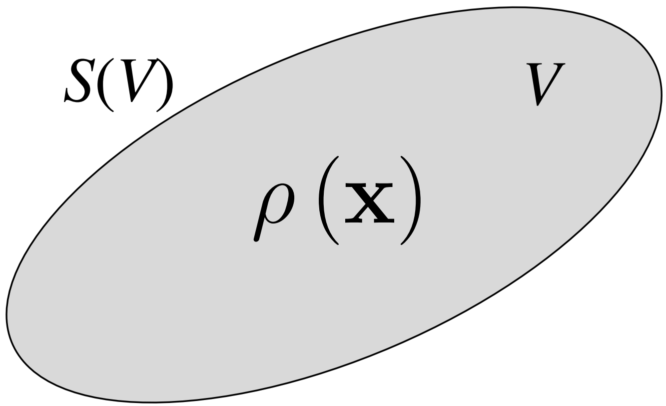
$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = A(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(t')\,\delta(t-t')\,dt'$$

COMO A EQ. É LINEAR, A SOMA DE SOLUÇÕES É TAMBÉM SOLUÇÃO

$$x_{nh}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-t')\,A(t')\,dt'$$

Fica como exercício provar que a solução encontrada de fato resolve a equação não-homogênea.

Problema de valor de contorno



$$\nabla^2\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0},\ \mathbf{x}\in V$$

$$\rho\left(\mathbf{x}\right), \mathbf{x}\ \in\ V$$

$$\text{info sobre }\Phi\left(\mathbf{x}\right), \mathbf{x}\ \in\ S\left(V\right)$$

- COMO RESOLVER?
- A SOLUÇÃO É ÚNICA?

Teoremas de unicidade

SEJA UMA REGIÃO $\underline{V}$, COM BORDA $S(V)$, ONDE É DADA $\rho(\bar{x})$ $\forall\ \bar{x} \in \underline{V}$. A SOLUÇÃO DE:

$$\nabla^2 \Phi(\bar{x}) = -\frac{\rho(\bar{x})}{\epsilon_0} \quad \forall\ \bar{x} \in V$$

É ÚNICA:

(i) SE $\Phi(\bar{x})$ É ESPECIFICADO $\forall\ \bar{x} \in S(V)$

"CONDIÇÃO DE CONTORNO DE DIRICHLET"

(ii) SE $(\vec{\nabla}\Phi)\cdot\hat{n} \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{n}}$ É ESPECIFICADA $\forall\ \bar{x} \in S(V)$

"CONDIÇÃO DE CONTORNO DE NEUMANN"

(iii) $\Phi(\bar{x})$ É ESPECIFICADO EM PARTES DE $S(V)$ E $\frac{\partial \Phi}{\partial \hat{n}}$ É ESPECIFICADO NO RESTO DE $S(V)$

"CONDIÇÃO DE CONTORNO MISTA"

Funções de Green para problemas de valor de contorno

TEOREMA DE GAUSS:

$$\int_V \vec{\nabla}' \cdot \vec{A}\, d^3x' = \int_{S(V)} \vec{A} \cdot \hat{n}'\, ds'$$

ESCOLHO $\vec{A} = \phi \vec{\nabla}' \psi$, ONDE $\phi(\vec{x}')$ E $\psi(\vec{x}')$ SÃO ESCALARES QUAISQUER

$$\vec{\nabla}' \cdot \vec{A} = \vec{\nabla}' \cdot [\phi \vec{\nabla}' \psi] = (\vec{\nabla}' \phi) \cdot (\vec{\nabla}' \psi) + \phi \nabla'^2 \psi$$

$$\Rightarrow \int_V [\phi \nabla'^2 \psi + (\vec{\nabla}' \phi) \cdot (\vec{\nabla}' \psi)]\, d^3x' = \int_{S(V)} \phi\, (\vec{\nabla}' \psi) \cdot \hat{n}'\, ds' = \int_{S(V)} \phi \frac{\partial \psi}{\partial \hat{n}'}\, ds'$$

1ª IDENTIDADE DE GREEN

TROCANDO ϕ POR ψ:

$$\int_V [\psi \nabla'^2 \phi + (\vec{\nabla}' \phi) \cdot (\vec{\nabla}' \psi)]\, d^3x' = \int_{S(V)} \psi \frac{\partial \phi}{\partial \hat{n}'}\, ds'$$

SUBTRAINDO AS DUAS EQS.:

$$\int_V [\phi \nabla'^2 \psi - \psi \nabla'^2 \phi]\, d^3x' = \int_{S(V)} \left[\phi \frac{\partial \psi}{\partial \hat{n}'} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial \hat{n}'}\right] ds'$$

"2ª IDENTIDADE DE GREEN."

$\phi(\bar{x}') \longrightarrow \Phi(\bar{x}')$ POTENCIAL ELÉTRICO PROCURADO

$\psi(\bar{x}') \longrightarrow G(\bar{x}, \bar{x}')$ FUNÇÃO DE GREEN PROCURADA

OU SEJA: $\nabla'^2 G(\bar{x}, \bar{x}') = \delta^{(3)}(\bar{x} - \bar{x}')$

$$\nabla'^2 \Phi(\bar{x}') = -\frac{\rho(\bar{x}')}{\epsilon_0} \qquad \bar{x}' \in V$$

$$\Rightarrow \int_V \Big[\Phi(\bar{x}') \underbrace{\nabla'^2 G(\bar{x}, \bar{x}')}_{\delta^{(3)}(\bar{x} - \bar{x}')} - G(\bar{x}, \bar{x}') \underbrace{\nabla'^2 \Phi(\bar{x}')}_{-\frac{\rho(\bar{x}')}{\epsilon_0}}\Big] d^3x' = \int_{S(V)} \left[\Phi(\bar{x}') \frac{\partial G}{\partial \hat{n}'} - G \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{n}'}\right] ds'$$

$$\Phi(\bar{x}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \int_V G(\bar{x}, \bar{x}') \rho(\bar{x}')\, d^3x' + \int_{S(V)} \left[\Phi(\bar{x}') \frac{\partial G}{\partial \hat{n}'} - G \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{n}'}\right] ds'$$

(i) SUPONHAMOS DIRICHLET : $\Phi(\bar{x}')$ $\bar{x}' \in S(V)$

PARA ESSE CASO, EU IMPONHO QUE $\boxed{G_D(\bar{x}, \bar{x}') = 0, \ \forall \, \bar{x}' \in S(V)}$

SE EU ACHAR ESSA $G_D(\bar{x}, \bar{x}')$ (EU SEI QUE ELA EXISTE E É ÚNICA):

$$\Phi(\bar{x}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \int_V G_D(\bar{x}, \bar{x}') \rho(\bar{x}') d^3x' + \int_{S(V)} \left[\Phi(\bar{x}') \frac{\partial G_D(\bar{x}, \bar{x}')}{\partial \hat{n}'} \right] ds'$$

QUE É A SOLUÇÃO PROCURADA.

(ii) NEUMANN. A TENTAÇÃO INICIAL É IMPOR:

$$\frac{\partial G_N(\bar{x}, \bar{x}')}{\partial \hat{n}} = 0 \qquad \forall \, \bar{x}' \in S(V)$$

MAS ISSO NÃO FUNCIONA, PELA SEGUINTE RAZÃO:

$$\nabla'^2 G_N(\bar{x}, \bar{x}') = \delta^{(3)}(\bar{x} - \bar{x}')$$

$$\Rightarrow \int_V \nabla'^2 G_N(\bar{x}, \bar{x}') d^3x' = \int_V \delta^{(3)}(\bar{x} - \bar{x}') d^3x' = 1 \quad \text{SE } \bar{x} \in V$$

MAS, O LADO ESQUERDO É:

$$\int_V \nabla'^2 G_N(\bar{x},\bar{x}')\, d^3x' = \int_V \vec{\nabla}' \cdot \left[\vec{\nabla}' G_N(\bar{x},\bar{x}') \right] d^3x'$$

(GAUSS)

$$= \int_{S(V)} \underbrace{\vec{\nabla}' G_N(\bar{x},\bar{x}') \cdot \hat{n}'}_{\frac{\partial G_N(\bar{x},\bar{x}')}{\partial \hat{n}'}}\, ds' = 0$$

MAS, EU POSSO ESCOLHER:

$$\frac{\partial G_N(\bar{x},\bar{x}')}{\partial \hat{n}'} = \frac{1}{A[S(V)]} = \text{CONST.}$$

$A[S(V)] =$ ÁREA DA BORDA

$$\Rightarrow \int_{S(V)} \frac{\partial G_N(\bar{x},\bar{x}')}{\partial \hat{n}} ds' = 1$$

LEVANDO NA IDENTIDADE DE GREEN:

$$\Phi(\bar{x}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\int_V G_N(\bar{x},\bar{x}')\,\Phi(\bar{x}')\, d^3x' + \underbrace{\langle \Phi(\bar{x}) \rangle} - \int_{S(V)} G_N(\bar{x},\bar{x}') \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{n}'}\, ds'$$

$$\langle \Phi(\vec{x}') \rangle = \frac{1}{A[S(V)]} \int_{S(V)} \Phi(\vec{x}')\, dS' = \text{MÉDIA DE } \Phi(\vec{x}) \text{ EM } S(V)$$

$$= \text{CONSTANTE NÃO IMPORTANTE}$$

(

Energia eletrostática

DEF.: O TRABALHO REALIZADO CONTRA AS FORÇAS ELETROSTÁTICAS PARA TRAZER AS CARGAS DESDE O INFINITO ATÉ A CONFIGURAÇÃO DE INTERESSE LENTAMENTE. PARA N CARGAS: q_1 EM $\vec{x}_1$, q_2 EM $\vec{x}_2$, TRAGO A PRIMEIRA CARGA SEM REALIZAR ... TRABALHO:

$$W_1 = 0$$

2ª CARGA: $W_2 = -\int_{+\infty}^{\vec{x}_2} q_2 \vec{E}_1(\vec{x}')\cdot d\vec{x}' = q_2 \underbrace{\left[-\int_{\infty}^{\vec{x}_2} \vec{E}_1(\vec{x}')\cdot d\vec{x}'\right]}_{\Phi_1(\vec{x}_2)\text{ TOMANDO O INFINITO COMO REF.}}$

$$\Phi_1(\vec{x}) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_1|}$$

$$W_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\bar{x}_2 - \bar{x}_1|}$$

3ª CARGA:

$$W_3 = q_3 \Bigg[\underbrace{-\int_{\infty}^{\bar{x}_3} \bar{E}_1(\bar{x}') \cdot d\bar{x}'}_{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\bar{x}_3 - \bar{x}_1|}} \underbrace{- \int_{\infty}^{\bar{x}_3} \bar{E}_2(\bar{x}') \cdot d\bar{x}'}_{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{|\bar{x}_3 - \bar{x}_2|}} \Bigg]$$

$$W_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1 q_3}{|\bar{x}_3 - \bar{x}_1|} + \frac{q_2 q_3}{|\bar{x}_3 - \bar{x}_2|} \right]$$

$$W = W_1 + W_2 + \ldots W_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\text{PARES}} \frac{q_i q_j}{|\bar{x}_i - \bar{x}_j|}$$

$$\sum_{\text{PARES}} = \underline{\underline{\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N}}} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N}{}' \Rightarrow W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N}{}' \right) \frac{q_i q_j}{|\bar{x}_i - \bar{x}_j|}$$

PARA DISTRIBUIÇÕES CONTÍNUAS DE CARGAS: $\rho(\bar{x})$

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int_{T.E.} d^3x \, d^3x' \frac{\rho(\bar{x})\rho(\bar{x}')}{|\bar{x}-\bar{x}'|}$$

USANDO:
$$\Phi(\bar{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{T.E.} \frac{\rho(x')\, d^3x'}{|\bar{x}-\bar{x}'|}$$

$$\Rightarrow \boxed{W = \frac{1}{2} \int_{T.E.} d^3x \, \rho(\bar{x}) \Phi(\bar{x})}$$

USO EQ. DE POISSON: $\rho(\bar{x}) = -\epsilon_0 \nabla^2 \Phi(\bar{x})$

$$W = -\frac{\epsilon_0}{2} \int_{T.E.} \Phi(\bar{x}) \nabla^2 \Phi(\bar{x}) \, d^3x$$

CONSIDERE: $\displaystyle\int_{T.E.} \vec{\nabla} \cdot [\Phi \vec{\nabla} \Phi] \, d^3x = \int_{S_\infty} \Phi \vec{\nabla} \Phi \cdot \hat{n} \, dS = 0$

MAS, QUANDO $|\vec{x}| \to \infty$:

$\Phi(\vec{x}) \sim \frac{1}{r}$

PARA DIST. LOCALIZADAS DE CARGA $\rho(\vec{x})$

$\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) \sim \frac{1}{r^2}$

$\Phi\vec{\nabla}\Phi \sim \frac{1}{r^3}$

$$\int_{S_\infty} \Phi \vec{\nabla}\Phi \, \hat{n} \cdot ds \sim \frac{R^2}{R^3} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

LADO ESQUERDO:

$$\int_{T.E.} \vec{\nabla}\cdot\left[\Phi\vec{\nabla}\Phi\right] d^3x = \int_{T.E.} \left[(\vec{\nabla}\Phi)\cdot(\vec{\nabla}\Phi) + \Phi\nabla^2\Phi\right] d^3x = 0$$

$$\Rightarrow \int_{T.E.} \Phi\nabla^2\Phi \, d^3x = -\int_{T.E.} |\vec{\nabla}\Phi|^2 \, d^3x$$

$$W = \frac{\epsilon_0}{2}\int_{T.E.} |\vec{\nabla}\Phi|^2 d^3x = \boxed{\frac{\epsilon_0}{2}\int_{T.E.} E^2 \, d^3x = W}$$