

# FI 008 – Eletrodinâmica I

1º Semestre de 2020

26/03/2020

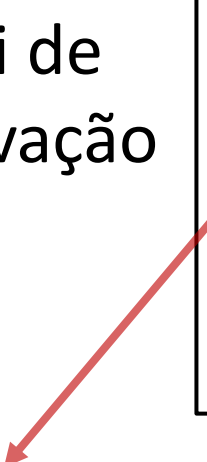
Aula 6

# Equações de Maxwell

# Equações de Maxwell

Maxwell, acrescentou o termo de **corrente de deslocamento** à lei de Ampère, que garante a conservação da carga.

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}; \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0; \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.\end{aligned}$$


$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0 = \mu_0 \left( \nabla \cdot \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{E})}{\partial t} \right) = \mu_0 \left( \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) = 0$$

Integrando num volume **V**:

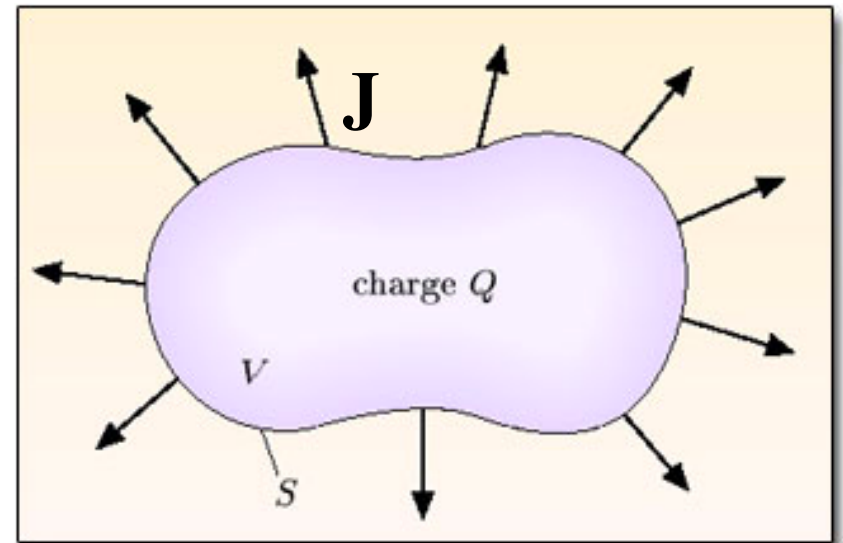
$$\begin{aligned}\int_V \nabla \cdot \mathbf{J} d^3x &= - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3x \\ \int_{S(V)} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS &= - \frac{d}{dt} \left( \int_V \rho d^3x \right) = - \frac{dQ(V)}{dt}\end{aligned}$$

# Lei de conservação (local) da carga

$$\int_{S(V)} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = - \frac{dQ(V)}{dt}$$

**Corrente** através de  $S(V)$

A carga em  $V$  só pode variar se for **transportada para fora** de  $V$  através da superfície: **conservação local**.



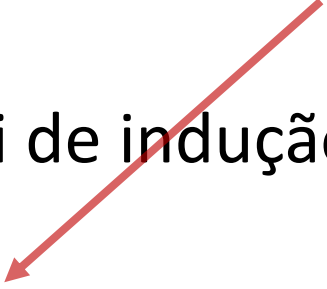
Válida sempre para equações dessa forma: ver outros exemplos adiante.

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

# Potenciais

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \iff \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}; \quad \text{continua válida}$$

Mas, a lei de indução de Faraday leva a:


$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \iff \nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \iff \mathbf{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A};$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

As equações sem fontes permitem definir os **potenciais vetor e escalar**, mesmo em situações **dinâmicas**.

# Potenciais em termos das fontes

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}; \\ \mathbf{E} &= -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.\end{aligned}$$

Levando agora nas outras equações (com fontes):

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0};$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \hat{\mathbf{J}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

$$-\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla^2 \Phi + \frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{A})}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{B} &= \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \\ \mu_0 \left( \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) &= \mu_0 \left[ \mathbf{J} - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \nabla \Phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \right] = \mu_0 \left\{ \mathbf{J} - \epsilon_0 \left[ \nabla \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right] \right\} \\ \Rightarrow \nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left[ \nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right] &= -\mu_0 \mathbf{J}.\end{aligned}$$

# Potenciais em termos das fontes

Definindo:  $\mu_0\epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$

$$\begin{aligned}\nabla^2\Phi + \frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{A})}{\partial t} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0}; \\ \nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla\left[\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right] &= -\mu_0\mathbf{J}.\end{aligned}$$

# Transformações de calibre (“gauge”)

Como  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ; ainda tenho a liberdade de adicionar ao potencial vetor  $\mathbf{A}$ , um **gradiente de um escalar qualquer**.

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Lambda$$

Mas essa transformação muda o campo elétrico:

$$\mathbf{E}' = -\nabla \Phi' - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t}$$

$$\mathbf{E}' = -\nabla \Phi' - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{\partial (\nabla \Lambda)}{\partial t}$$

Isso pode ser consertado, se impusermos que o **potencial escalar se transforme**:

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$$

$$\mathbf{E}' = -\nabla \Phi + \frac{\partial (\nabla \Lambda)}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{\partial (\nabla \Lambda)}{\partial t}$$

$$\mathbf{E}' = -\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{E}$$

# Transformações de calibre (“gauge”)

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Lambda$$

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$$

Pode-se mudar os potenciais dessa maneira, sem alterar os campos **E** e **B**:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}' = \mathbf{B}';$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \Phi' - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} = \mathbf{E}'$$

# Calibre de Lorenz

Podemos explorar a liberdade de calibre para impor a condição:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

(Condição de Lorenz)

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi + \frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{A})}{\partial t} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0}; \\ \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left[ \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right] &= -\mu_0 \mathbf{J}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0}; \\ \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \mathbf{J}. \end{aligned}$$

No calibre de Lorenz, as equações dos potenciais adquirem uma forma **mais simples e unificada**.

# Calibre de Lorenz

$$\begin{aligned}\nabla^2\Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0}; \\ \nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0\mathbf{J}.\end{aligned}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0$$

O potencial escalar  $\Phi$  e cada componente do potencial vetor  $\mathbf{A}$  satisfazem a equação de onda não homogênea:

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -f(\mathbf{x}, t)$$

Encontraremos mais adiante sua solução geral.

# O calibre de Lorenz é sempre possível?

É **sempre possível** usar a liberdade de calibre para impor o calibre de Lorenz? Sim!

Suponhamos que **A** e **Φ** não satisfaçam a condição de Lorenz.

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \chi(\mathbf{x}, t) \quad \text{onde } \chi \text{ é uma função qualquer.}$$

Sejam **A'** e **Φ'**, obtidos por uma transformação de calibre:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \mathbf{A} + \nabla \Lambda \\ \Phi' &= \Phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{A}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi'}{\partial t} = \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t}}_{\chi(\mathbf{x}, t)} + \nabla^2 \Lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2}$$

# O calibre de Lorenz é sempre possível?

$$\text{Assim: } \nabla \cdot \mathbf{A}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi'}{\partial t} = \chi(\mathbf{x}, t) + \nabla^2 \Lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2}$$

Se acharmos  $\Lambda$  tal que:

$$\nabla^2 \Lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = -\chi(\mathbf{x}, t) = -\left( \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)$$

os potenciais  $\mathbf{A}'$  e  $\Phi'$  satisfarão a condição de Lorenz.

Ora, isso é sempre possível se pudermos resolver a equação de onda não homogênea, o que mostraremos mais adiante, como queríamos demonstrar.

# Calibre de Lorenz

Notem que, mesmo que a condição de Lorenz sera satisfeita:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

ainda assim é possível fazer uma transformação de calibre:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Lambda$$

$$\Phi' = \Phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$$

e continuar satisfazendo a condição de Lorenz se:

$$\nabla^2 \Lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = 0$$

Note que há soluções **não triviais**  
para essa equação: **ondas!**

# Outros calibres: o calibre de Coulomb

O calibre de Lorenz não é o único que é útil. Existem outras escolhas, como o **calibre de Coulomb (ou de radiação ou transversal)**. Nele, impomos:

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} = 0} \quad (\text{como na magnetostática})$$

$$\nabla^2 \Phi + \frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{A})}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}},$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left[ \nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right] = -\mu_0 \mathbf{J},$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t}}.$$

# Calibre de Coulomb

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \longrightarrow \boxed{\Phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{T.E.} \frac{\rho(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'}$$

Note que o potencial é determinado pela densidade instantânea, como se violasse a relatividade restrita... (?)

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \mathbf{J} + \boxed{\frac{1}{c^2} \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t}} \\ \frac{1}{c^2} \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \frac{1}{c^2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \int_{T.E.} \frac{\partial \rho(\mathbf{x}', t) / \partial t}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (\text{conservação carga}) \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \int_{T.E.} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \equiv \mu_0 \mathbf{J}_l \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{J}_l = -\frac{1}{4\pi} \nabla \int_{T.E.} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'} \longrightarrow \nabla \times \mathbf{J}_l = 0$$

# Calibre de Coulomb

Qualquer distribuição de correntes  $\mathbf{J}$  pode ser escrita como a **soma** de uma parte com **rotacional nulo** (longitudinal) e outra com **divergente nulo** (transversal).

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_t + \mathbf{J}_l$$

$$\mathbf{J}_t = \frac{1}{4\pi} \nabla \times \left[ \nabla \times \int_{T.E.} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \right] \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{J}_t = 0 \quad (\text{ver prova nas notas})$$

$$\mathbf{J}_l = -\frac{1}{4\pi} \nabla \left[ \nabla \cdot \int_{T.E.} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \right] \Rightarrow \nabla \times \mathbf{J}_l = 0$$

A parte longitudinal acima é exatamente a mesma que obtivemos antes.

# Calibre de Coulomb

$$\mathbf{J}_l = -\frac{1}{4\pi} \nabla \left[ \nabla \cdot \int_{T.E.} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x' \right]$$


$$\begin{aligned} \nabla \cdot \int_{T.E.} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x' &= \int_{T.E.} \nabla \cdot \left[ \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] d^3 x' \\ &= \int_{T.E.} \mathbf{J}(\mathbf{x}', t) \cdot \nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) d^3 x' \\ &= - \int_{T.E.} \mathbf{J}(\mathbf{x}', t) \cdot \nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) d^3 x' \\ \nabla \cdot \int_{T.E.} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x' &= \int_{T.E.} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x' \end{aligned}$$

$$\mathbf{J}_l = -\frac{1}{4\pi} \nabla \int_{T.E.} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x'$$

que é a mesma  
expressão que  
tínhamos antes.

# Calibre de Coulomb

Assim, a equação para o potencial vetor fica:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \mathbf{J}_l = -\mu_0 \mathbf{J}_t$$

Apenas a parte **transversal** da corrente aparece na equação. Isso é consistente com a escolha de calibre pois, se **tomarmos o divergente** da equação acima:

$$\nabla^2 \nabla \cdot \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \nabla \cdot \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0 = -\mu_0 \nabla \cdot \mathbf{J}_t = 0$$

É importante salientar que, embora o potencial escalar seja instantaneamente propagado, apenas os campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  são físicos e eles satisfazem a relatividade restrita com a propagação de informação com velocidade finita.

# Solução da equação de onda não homogênea

Queremos resolver uma EDP não homogênea, dada  $f(\mathbf{x}, t)$ :

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -f(\mathbf{x}, t)$$

Vamos usar o método das **funções de Green**:

$$\nabla^2 G(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t')}{\partial t^2} = -\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t')$$

Da invariância translacional, só precisamos resolver:

$$\nabla^2 G(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = -\delta^{(3)}(\mathbf{x}) \delta(t)$$

# Solução da eq. de onda não-homogênea

$$\nabla^2 G(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = -\delta^{(3)}(\mathbf{x}) \delta(t)$$

Usando transformadas de Fourier:

$$G(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3 k d\omega}{(2\pi)^4} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} G(\mathbf{k}, \omega);$$

$$\delta^{(3)}(\mathbf{x}) \delta(t) = \int \frac{d^3 k d\omega}{(2\pi)^4} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}.$$

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx}$$

$$\begin{aligned} \left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G(\mathbf{x}, t) &= \int \frac{d^3 k d\omega}{(2\pi)^4} \left[ \left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \right] G(\mathbf{k}, \omega) \\ &= \int \frac{d^3 k d\omega}{(2\pi)^4} \left[ \left( -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \right] G(\mathbf{k}, \omega) \\ &= \int \frac{d^3 k d\omega}{(2\pi)^4} (-1) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \left( -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) G(\mathbf{k}, \omega) = -1 \end{aligned}$$

$$G(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{k^2 - \omega^2/c^2}.$$

# Solução da eq. de onda não-homogênea

$$G(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k d\omega}{(2\pi)^4} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \frac{1}{k^2 - \omega^2/c^2}$$

Fazendo a integração em **k**, usando **coordenadas esféricas**:

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}, t) &= \int \frac{d^3k d\omega}{(2\pi)^4} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \frac{1}{k^2 - \omega^2/c^2} \quad (\rightarrow \text{coordenadas esféricas para } \mathbf{k}) \\ &= \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \int \frac{k^2 \sin \theta dk d\theta d\phi}{(2\pi)^3} e^{ikr \cos \theta} \frac{1}{k^2 - \omega^2/c^2} \quad (\rightarrow \mu \equiv \cos \theta; \sin \theta d\theta = -d\mu) \\ &= \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{(2\pi)^2} \frac{1}{k^2 - \omega^2/c^2} \int_{-1}^1 d\mu e^{ikr\mu} \\ &= \int \frac{d\omega}{2\pi i r} e^{-i\omega t} \int_0^\infty \frac{k dk}{(2\pi)^2} \frac{1}{k^2 - \omega^2/c^2} (e^{ikr} - e^{-ikr}) \\ &= \int \frac{d\omega}{4\pi i r} e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^\infty \frac{k dk}{(2\pi)^2} \frac{1}{k^2 - \omega^2/c^2} (e^{ikr} - e^{-ikr}) \end{aligned}$$

$$I(\omega) = \int_{-\infty}^\infty \frac{k dk}{2\pi i} \frac{1}{\left(k - \frac{\omega}{c}\right) \left(k + \frac{\omega}{c}\right)} e^{\pm ikr}$$

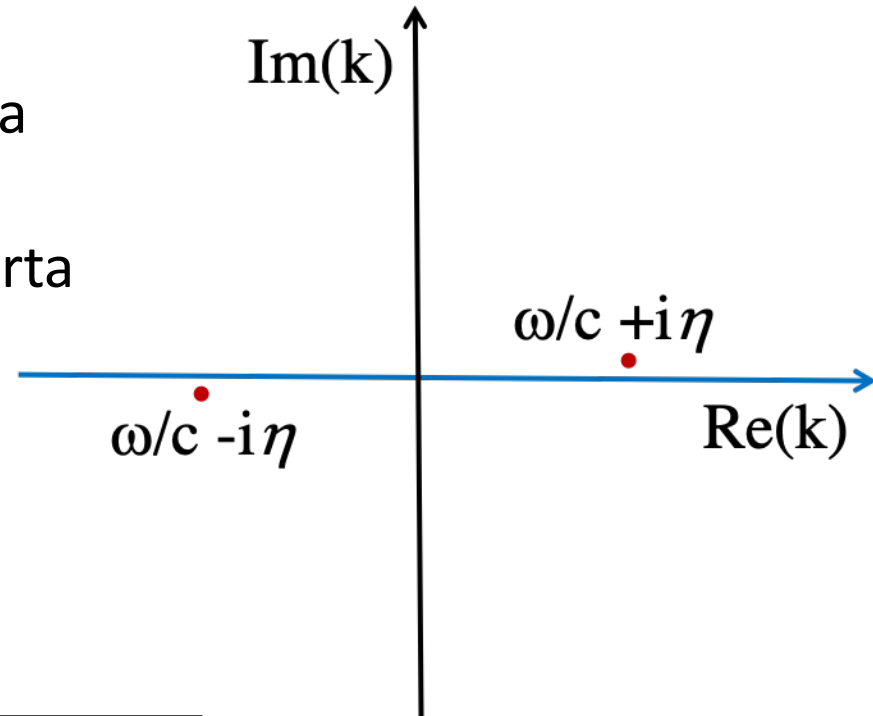
A integral diverge em  $\pm \omega/c$ .

# Solução da eq. de onda não-homogênea

Precisamos de um procedimento para “evitar” os polos simples. Cada procedimento corresponde a uma certa **condição de contorno**.

Uma possibilidade é fazer:

$$\omega \rightarrow \omega + i\eta, \quad \eta \rightarrow 0^+$$



$$I_1^{(+)}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k dk}{2\pi i} \frac{e^{ikr}}{\left(k - \frac{\omega}{c} - i\eta\right) \left(k + \frac{\omega}{c} + i\eta\right)}$$

$$I_2^{(+)}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k dk}{2\pi i} \frac{e^{-ikr}}{\left(k - \frac{\omega}{c} - i\eta\right) \left(k + \frac{\omega}{c} + i\eta\right)}$$

Essa escolha, leva à estrutura de polos, no plano de  **$k$  complexo**, da figura acima.

# Solução da eq. de onda não-homogênea

$$I_1^{(+)}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k dk}{2\pi i} \frac{e^{ikr}}{\left(k - \frac{\omega}{c} - i\eta\right) \left(k + \frac{\omega}{c} + i\eta\right)}$$

**Lema de Jordan(1):**

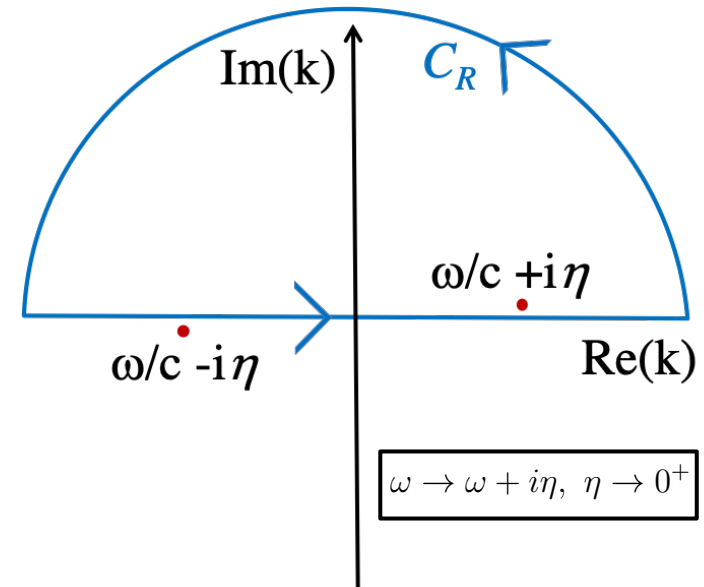
Se  $f(z)$  é analítica exceto em alguns pontos do semi-plano superior e

$$f(z) \rightarrow 0, \text{ se } |z| \rightarrow \infty, \arg(z) \in (0, \pi)$$

$$\text{então } I(R \rightarrow \infty) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{i\alpha z} f(z) dz = 0, \quad \alpha > 0$$

onde  $C_R$  é o semi-círculo no plano superior da figura.

Portanto, a integral na linha  $k \in (-\infty, +\infty)$  é igual à integral sobre o contorno fechado azul completo  $C$  da figura acima.

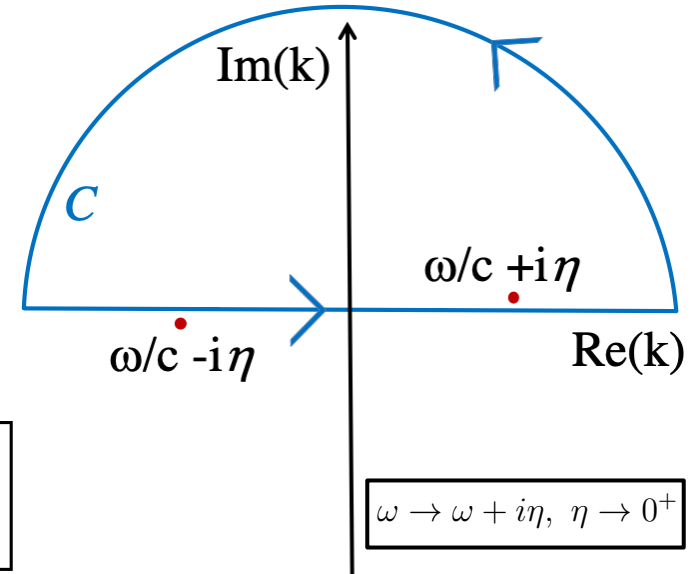


# Solução da eq. de onda não-homogênea

$$I_1^{(+)}(\omega) = \oint_C \frac{k dk}{2\pi i} \frac{e^{ikr}}{\left(k - \frac{\omega}{c} - i\eta\right) \left(k + \frac{\omega}{c} + i\eta\right)}$$

Usando o teorema dos resíduos:

$$\begin{aligned} I_1^{(+)}(\omega) &= 2\pi i \sum_{\text{res}} \left[ \frac{1}{2\pi i} \frac{k e^{ikr}}{\left(k - \frac{\omega}{c} - i\eta\right) \left(k + \frac{\omega}{c} + i\eta\right)} \right] \\ &= \frac{k e^{ikr}}{\left(k + \frac{\omega}{c} + i\eta\right)} \bigg|_{k = \frac{\omega}{c} + i\eta} \\ &= \frac{1}{2} e^{i\frac{\omega r}{c}} \end{aligned}$$



# Solução da eq. de onda não-homogênea

$$I_2^{(+)}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k dk}{2\pi i} \frac{e^{-ikr}}{\left(k - \frac{\omega}{c} - i\eta\right) \left(k + \frac{\omega}{c} + i\eta\right)}$$

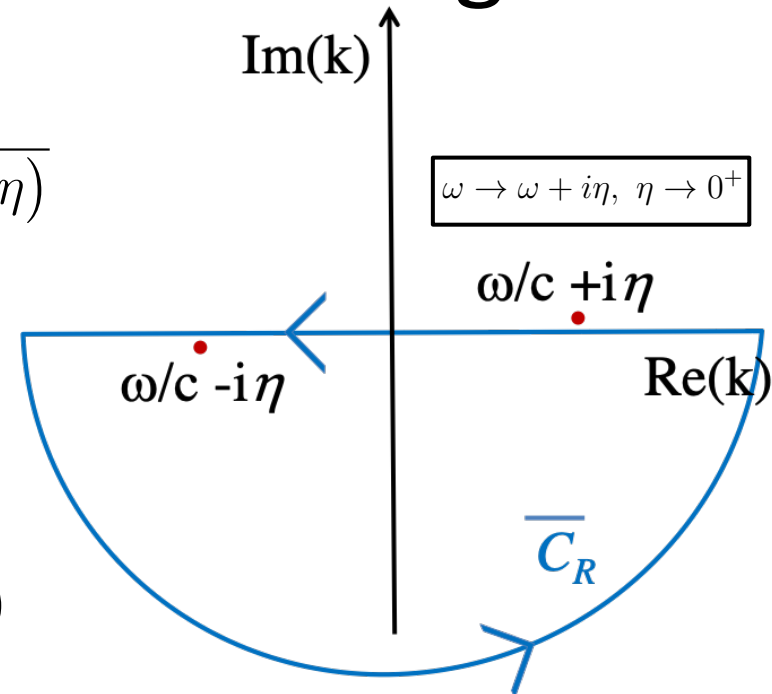
**Lema de Jordan (2):**

Se  $f(z)$  é analítica exceto em alguns pontos do semi-plano **inferior** e

$$f(z) \rightarrow 0, \text{ se } |z| \rightarrow \infty, \arg(z) \in (\pi, 2\pi)$$

então 
$$I(R \rightarrow \infty) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\overline{C}_R} e^{i\alpha z} f(z) dz = 0, \quad \alpha < 0$$

onde  $\overline{C}_R$  é o semi-círculo no plano **inferior** da figura.



Portanto, a **menos** a integral na linha  $k \in (-\infty, +\infty)$  é igual à integral sobre o **contorno fechado azul completo**  $C$  da figura acima.

# Solução da eq. de onda não-homogênea

$$I_2^{(+)}(\omega) = - \oint_C \frac{k dk}{2\pi i} \frac{e^{-ikr}}{\left(k - \frac{\omega}{c} - i\eta\right) \left(k + \frac{\omega}{c} + i\eta\right)}$$

Usando o teorema dos resíduos:

$$\begin{aligned} I_2^{(+)}(\omega) &= -2\pi i \sum_{\text{res}} \left[ \frac{1}{2\pi i} \frac{k e^{-ikr}}{\left(k - \frac{\omega}{c} - i\eta\right) \left(k + \frac{\omega}{c} + i\eta\right)} \right] \\ &= - \frac{k e^{-ikr}}{\left(k - \frac{\omega}{c} - i\eta\right)} \Big|_{k = -\frac{\omega}{c} - i\eta} \\ &= -\frac{1}{2} e^{i\frac{\omega r}{c}} \end{aligned}$$

