FI 008 – Eletrodinâmica I

1º Semestre de 2021

06/04/2021

Aula 6

Equações de Maxwell

Equações de Maxwell

Maxwell, acrescentou o termo de corrente de deslocamento à lei de Ampère, que garante a conservação da carga.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}; \\ \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} &= -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}; \\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B} &= 0; \\ \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} &= \mu_0\mathbf{J}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}. \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}) = 0 = \mu_0\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J}+\epsilon_0\frac{\partial\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}\right)}{\partial t}\right) = \mu_0\boxed{\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}\right) = 0}$$

Integrando num volume V:

$$\begin{aligned} \int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J}d^3x &= -\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}d^3x \\ \int_{S(V)} \mathbf{J}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS &= -\frac{d}{dt}\left(\int_V \rho d^3x\right) = -\frac{dQ\left(V\right)}{dt} \end{aligned}$$

Potenciais

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B} = 0 \iff \mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A};$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla}\times\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \iff \boldsymbol{\nabla}\times\underbrace{\left(\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)}_{-\vec\nabla\Phi} = 0 \iff \mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}.$$

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{B} &= \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A};\\ \mathbf{E} &= -\boldsymbol{\nabla}\Phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}.\end{aligned}}$$

As equações sem fontes permitem definir os potenciais vetor e escalar, mesmo em situações dinâmicas.

$$\vec A \to \vec A + \vec\nabla\Lambda$$

Potenciais em termos das fontes

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{B} &= \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}; \\ \mathbf{E} &= -\boldsymbol{\nabla}\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \end{aligned}}$$

Levando agora nas outras equações (com fontes):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}; \\ \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Definindo: $\mu_0 \epsilon_0 = \dfrac{1}{c^2}$

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla^2 \Phi + \frac{\partial \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} \right)}{\partial t} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0}; \\ \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla} \left[\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right] &= -\mu_0 \mathbf{J}. \end{aligned}}$$

Transformações de calibre ("gauge")

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{A} \;&\to\; \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla}\Lambda \\ \Phi \;&\to\; \Phi' = \Phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \end{aligned}}$$

$$\to \oint_c \vec{A}'\cdot d\vec{\ell} = \oint_c \vec{A}\cdot d\vec{\ell} + \cancel{\oint_c \vec{\nabla}\Lambda\cdot d\vec{\ell}}^{\,0}$$

Pode-se mudar os potenciais dessa maneira, sem alterar os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$:

$$\oint_c \vec{A}\cdot d\vec{\ell} = \int_{S(c)} \vec{\nabla}\times\vec{A}\cdot d\vec{S} = \int_{S(c)} \vec{B}\cdot d\vec{S}$$

$$\mathbf{B} \;=\; \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}' = \mathbf{B}';$$

$$\mathbf{E} \;=\; -\boldsymbol{\nabla}\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi' - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} = \mathbf{E}'$$

Calibre de Lorenz

Podemos explorar a liberdade de calibre para impor a condição:

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t}=0}$$

(Condição de Lorenz)

NÃO É LORENTZ

$$\boxed{\begin{aligned}\nabla^2\Phi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}&=-\frac{\rho}{\epsilon_0};\\ \nabla^2\boldsymbol{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}&=-\mu_0\boldsymbol{J}.\end{aligned}}$$

No calibre de Lorenz, as equações dos potenciais adquirem uma forma mais simples e unificada.

$$\nabla^2\psi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=-f\left(\mathbf{x},t\right)$$

São 4 equações com a mesma forma.

O calibre de Lorenz é sempre possível?

É sempre possível usar a liberdade de calibre para impor o calibre de Lorenz? Sim!

Notem que, mesmo que a condição de Lorenz sera satisfeita, ainda assim é possível fazer uma tranformação de calibre:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla}\Lambda(\vec{x},t)$$

$$\Phi' = \Phi - \frac{\partial \Lambda(\vec{x},t)}{\partial t}$$

$$\psi \to \underbrace{e^{i\frac{e}{\hbar}\Lambda(\vec{x},t)}}_{\in U(1)} \psi(\vec{x},t)$$

e continuar satisfazendo a condição de Lorenz se:

$$\nabla^2\Lambda - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Lambda}{\partial t^2} = 0$$

Note que há soluções não triviais para essa equação: ondas!

Outros calibres: o calibre de Coulomb

Existem outras escolhas, como o calibre de Coulomb (ou de radiação ou transversal). Nele, impomos:

$\vec{A} \to \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda \longrightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{A} \to \vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \nabla^2\Lambda$

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} = 0}$$ (como na magnetostática) $\boxed{\nabla^2\Lambda = 0}$

$$\nabla^2\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \longrightarrow \boxed{\Phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{T.E.} \frac{\rho(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'}$$

Calibre de Coulomb

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\mathbf{J} + \mu_0\mathbf{J}_l = -\mu_0\mathbf{J}_t$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{J} &= \mathbf{J}_t + \mathbf{J}_l \\
\mathbf{J}_t &= \frac{1}{4\pi}\boldsymbol{\nabla}\times\left[\boldsymbol{\nabla}\times\int_{T.E.}\frac{\mathbf{J}\left(\mathbf{x}',t\right)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d^3x'\right] \Rightarrow \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J}_t = 0 \\
\mathbf{J}_l &= -\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{\nabla}\left[\boldsymbol{\nabla}\cdot\int_{T.E.}\frac{\mathbf{J}\left(\mathbf{x}',t\right)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d^3x'\right] \Rightarrow \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{J}_l = 0
\end{aligned}$$

Embora o potencial escalar seja instantaneamente propagado, apenas os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ são físicos e eles satisfazem a relatividade restrita com a propagação de informação com velocidade finita.

Solução da equação de onda não homogênea

Queremos resolver uma EDP não homogênea, dada $f(\mathbf{x},t)$:

$$\boxed{\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -f\left(\mathbf{x},t\right)}$$

Vamos usar o método das funções de Green:

$$\nabla^2 G\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}',t-t'\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 G\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}',t-t'\right)}{\partial t^2} = -\delta^{(3)}\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right)\delta\left(t-t'\right)$$

Da invariância translacional, só precisamos resolver:

$$\nabla^2 G\left(\mathbf{x},t\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 G\left(\mathbf{x},t\right)}{\partial t^2} = -\delta^{(3)}\left(\mathbf{x}\right)\delta\left(t\right)$$

Solução da eq. de onda não-homogênea

$$\boxed{\nabla^2 G(\mathbf{x},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 G(\mathbf{x},t)}{\partial t^2} = -\delta^{(3)}(\mathbf{x})\,\delta(t)}$$

Usando transformadas de Fourier:

$$G(\mathbf{x},t) = \int \frac{d^3k\,d\omega}{(2\pi)^4} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)} G(\boldsymbol{k},\omega);$$

$$\delta^{(3)}(\mathbf{x})\,\delta(t) = \int \frac{d^3k\,d\omega}{(2\pi)^4} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}.$$

$$\boxed{G(\mathbf{k},\omega) = \frac{1}{k^2-\omega^2/c^2}.}$$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t}} = \underline{\underline{\delta(t)}}$$

$$G(\mathbf{x},t) = \int \frac{d^3k\,d\omega}{(2\pi)^4} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)} \frac{1}{k^2-\omega^2/c^2}$$

$$G(\mathbf{x},t) = \int \frac{d\omega}{4\pi i r} e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k\,dk}{(2\pi)^2} \frac{1}{k^2-\omega^2/c^2} \left(e^{ikr} - e^{-ikr}\right)$$

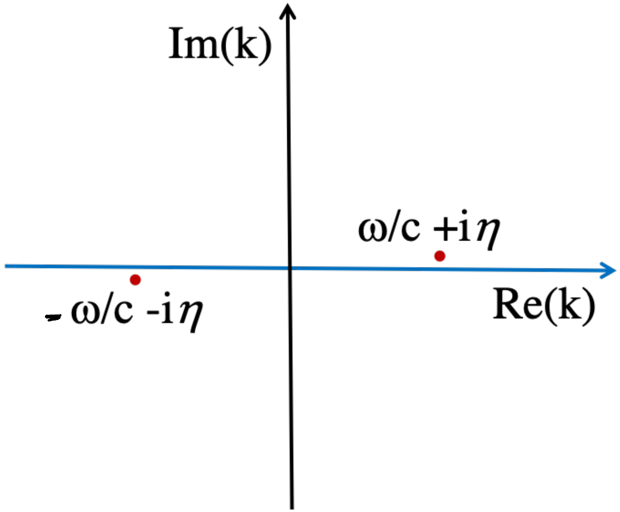
$$\boxed{I(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k\,dk}{2\pi i} \frac{1}{\left(k-\frac{\omega}{c}\right)\left(k+\frac{\omega}{c}\right)} e^{\pm ikr}}$$

As integrais divergem em $\pm\omega/c$.

Solução da eq. de onda não-homogênea

Escolha de condição de contorno:

$$\boxed{\omega \to \omega + i\eta, \quad \eta \to 0^+}$$



$$I_1^{(+)}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{kdk}{2\pi i} \frac{e^{ikr}}{\left(k - \frac{\omega}{c} - i\eta\right)\left(k + \frac{\omega}{c} + i\eta\right)}$$

$$I_2^{(+)}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{kdk}{2\pi i} \frac{e^{-ikr}}{\left(k - \frac{\omega}{c} - i\eta\right)\left(k + \frac{\omega}{c} + i\eta\right)}$$

$$I_{1,2}^{(+)}(\omega) = \pm \frac{1}{2} e^{i\frac{\omega r}{c}}$$

$$G(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \frac{e^{i\omega r/c}}{4\pi r} = \frac{1}{4\pi r} \delta(t - r/c)$$

$$\boxed{G(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') = \frac{1}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta(t - t' - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c) = \frac{1}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta[t' - (t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c)]}$$

Solução da eq. de onda não-homogênea

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -f\left(\mathbf{x},t\right)$$

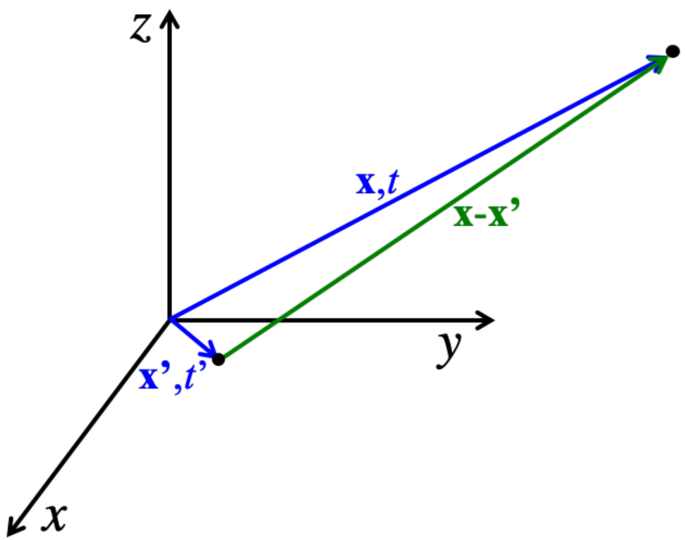
$$\begin{aligned}
\psi\left(\mathbf{x},t\right) &= \int G\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}',t-t'\right) f\left(\mathbf{x}',t'\right) d^3x'dt' \\
&= \int \frac{1}{4\pi\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right|}\delta\left[t'-\left(t-\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right|/c\right)\right] f\left(\mathbf{x}',t'\right) d^3x'dt' \\
&= \int \frac{1}{4\pi\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right|} f\left(\mathbf{x}',t-\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right|/c\right) d^3x'
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned}
\Phi\left(\mathbf{x},t\right) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{1}{\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right|}\rho\left(\mathbf{x}',t-\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right|/c\right) d^3x' \\
\mathbf{A}\left(\mathbf{x},t\right) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{1}{\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right|}\mathbf{J}\left(\mathbf{x}',t-\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right|/c\right) d^3x' \\
& t_{ret} = t-\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right|/c
\end{aligned}}$$

Interpretação física

$$\Phi(\mathbf{x},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\rho\left(\mathbf{x}', \underbrace{t-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|/c}_{t'}\right) d^3x'$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\mathbf{J}\left(\mathbf{x}', \underbrace{t-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|/c}_{t'}\right) d^3x'$$



$$\boxed{t - t' = |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|/c}$$

Soluções retardada e avançada

$$\boxed{\omega \to \omega \pm i\eta,\ \eta \to 0^+}$$

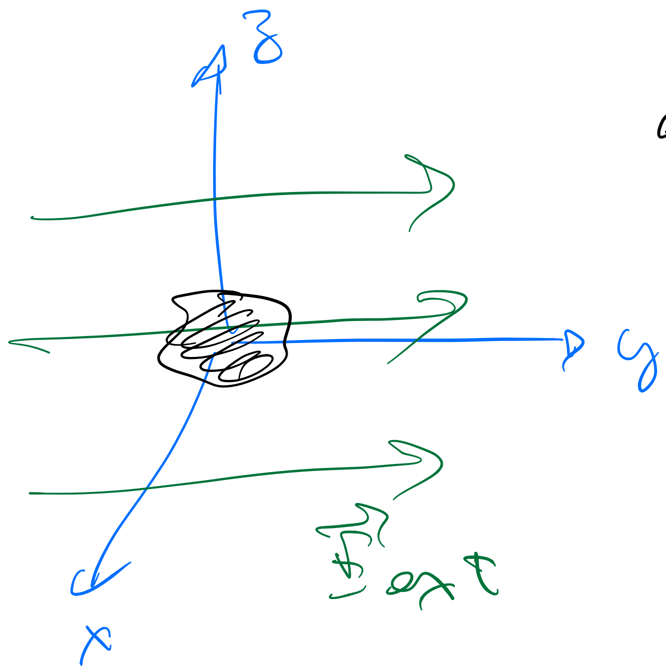
$$G^{(\pm)}(\mathbf{x},\omega) = \frac{e^{\pm i\omega r/c}}{4\pi r}$$

$$\begin{aligned} G^{(\pm)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}', t-t') &= \frac{1}{4\pi\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right|}\delta\left(t-t' \mp \left|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right|/c\right) \\ &= \frac{1}{4\pi\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right|}\delta\left[t' - \left(t \mp \left|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right|/c\right)\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi^{(\pm)}(\mathbf{x},t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{1}{\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right|}\rho\left(\mathbf{x}', t \mp \left|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right|/c\right) d^3x' \\ \mathbf{A}^{(\pm)}(\mathbf{x},t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{1}{\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right|}\mathbf{J}\left(\mathbf{x}', t \mp \left|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right|/c\right) d^3x' \end{aligned}$$

$$W = \int \rho(\vec{x})\, \Phi_{ext}(\vec{x})\, d^3x$$

ENERGIA DE UMA DIST. CARGA NUM CAMPO EXTERNO DADO



$dq\,(\infty \to \vec{x}) \Rightarrow$

$$\Delta W = dq\, \Phi_{ext}(\vec{x})$$

$$W = \int dW = \int dq\, \Phi_{ext}(\vec{x})$$

$$= \int \rho\, \Phi_{ext}(\vec{x})\, d^3x$$

ENERGIA TOTAL : $W = \frac{1}{2} \int \rho(\vec{x})\, \Phi(\vec{x})\, d^3x$