FI 008 – Eletrodinâmica I

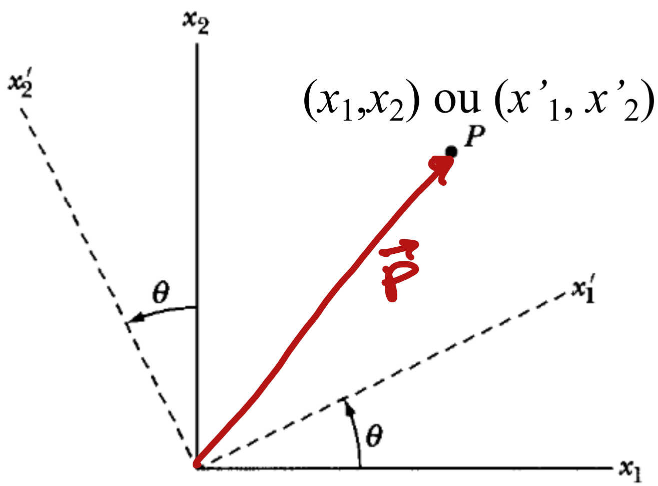
1º Semestre de 2020

02/04/2020

Aula 8

Propriedades de transformação dos campos eletromagnéticos

Rotações:



$$\begin{cases} x_1' = \cos\theta\ x_1 + \sin\theta\ x_2 \\ x_2' = -\sin\theta\ x_1 + \cos\theta\ x_2 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}^{a_{\alpha\beta}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right.$$

$$x'_\alpha = \sum_\beta a_{\alpha\beta} x_\beta = a_{\alpha\beta} x_\beta$$

ÍNDICES REPETIDOS HÁ UMA SOMA IMPLÍCITA

EM 3D:

$x'_\alpha = a_{\alpha\beta} x_\beta$ ONDE $a_{\alpha\beta}$ É UMA MATRIZ 3x3

MÓDULO DE $\vec{P}$ É INVARIANTE SOB ROTAÇÕES!

$$x_\alpha x_\alpha = x'_\alpha x'_\alpha = (a_{\alpha\beta} x_\beta)(a_{\alpha\gamma} x_\gamma) = (a_{\alpha\beta} a_{\alpha\gamma}) x_\beta x_\gamma$$

$$\delta_{\beta\gamma} x_\beta x_\gamma \Rightarrow \delta_{\beta\gamma} x_\beta x_\gamma = (a_{\alpha\beta} a_{\alpha\gamma}) x_\beta x_\gamma$$

COMO $x_\beta x_\gamma$ É QUALQUER: $\delta_{\beta\gamma} = a_{\alpha\beta} a_{\alpha\gamma} = a^T_{\beta\alpha} a_{\alpha\gamma}$

ELEMENTOS DE $\mathbb{1}$

$$a^T a = \mathbb{1} \quad (1) \Rightarrow \boxed{a^T = a^{-1}}$$

MATRIZ ORTOGONAL

TOMANDO O DETERMINANTE DE (1):

$$\det(a^T a) = \det(\mathbb{1}) = 1$$

$$\det(a^T)\det(a) = [\det(a)]^2 = 1 \Rightarrow \boxed{\det(a) = \pm 1}$$

Definição de vetores, escalares, tensores

VETORES SÃO CONJUNTOS DE 3 QUANTIDADES v_α QUE, SOB ROTAÇÕES, SE TRANSFORMAM COMO:

$$v'_\alpha = a_{\alpha\beta} v_\beta$$

SEGUE QUE, SE v_α, ω_α SÃO VETORES:

$v_\alpha \omega_\alpha$ É INVARIANTE SOB ROTAÇÕES

(PROVE ISSO)

ESCALARES SÃO QUANTIDADES INVARIANTES SOB ROTAÇÕES

TENSOR DE ORDEM 2 $T_{\alpha\beta}$ SÃO 9 QUANTIDADES QUE SE TRANSFORMAM COMO OS PRODUTOS DAS COMPONENTES DE DOIS VETORES: $v_\alpha w_\beta$

$$v'_\alpha w'_\beta = a_{\alpha\gamma} v_\gamma \, a_{\beta\delta} w_\delta = a_{\alpha\gamma} a_{\beta\delta} \, v_\gamma w_\delta$$

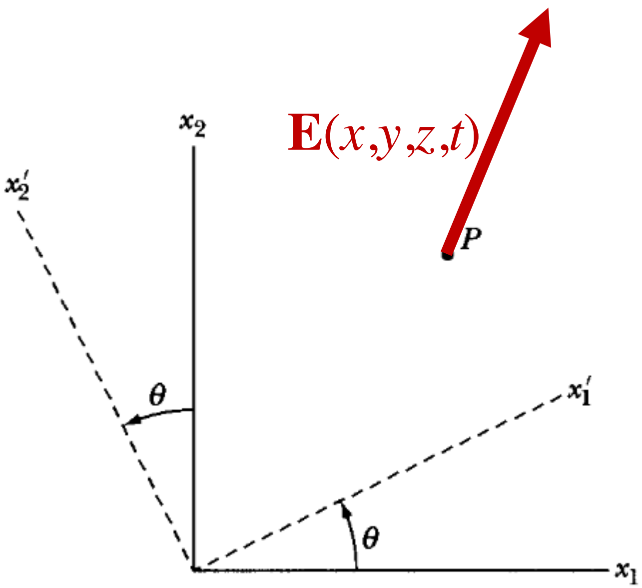
$$T'_{\alpha\beta} = a_{\alpha\gamma} a_{\beta\delta} T_{\gamma\delta} = a_{\alpha\gamma} T_{\gamma\delta} a^T_{\delta\beta} \Rightarrow \boxed{T' = a T a^T}$$

MATRIZES

TENSOR DE ORDEM $\underline{n}$: $T_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n}$

$$T'_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n} = a_{\alpha_1 \beta_1} a_{\alpha_2 \beta_2} \cdots a_{\alpha_n \beta_n} T_{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_n}$$

Campos escalares, vetoriais, tensoriais



CAMPO ESCALAR $\phi(\vec{x})$ É TAL QUE:

$$\phi(x,y,z) = \phi'(x',y',z')$$

CAMPO VETORIAL $\vec{v}(\vec{x})$:

$$v'_\alpha(x',y',z') = a_{\alpha\beta}\, v_\beta(x,y,z)$$

CAMPO TENSORIAL $T_{\alpha\beta}(\vec{x})$:

$$T'_{\alpha\beta}(x',y',z') = a_{\alpha\gamma}\, a_{\beta\delta}\, T_{\gamma\delta}(x,y,z)$$

EXEMPLOS: ESCALARES: $\Phi(\vec{x})$, $\rho(\vec{x})$

VETORIAIS: $\vec{E}(\vec{x})$, $\vec{B}^{*}(\vec{x})$, $\vec{A}(\vec{x})$ * (VER ADIANTE)

TENSORIAL: $T_{\alpha\beta}(\vec{x})$ "TENSOR DE TENSÕES DE MAXWELL"

O operador nabla

NABLA: $\vec{\nabla}$, $\nabla_\alpha = \dfrac{\partial}{\partial x_\alpha}$; O OPERADOR $\vec{\nabla}$ SE TRANSFORMA COMO UM VETOR

$$\frac{\partial}{\partial x'_\alpha} = a_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_\beta}$$ SE $x'_\alpha = a_{\alpha\beta} x_\beta$ (PROVE ISSO)

ISSO QUER DIZER QUE: SE $\phi(\vec{x})$ É UM CAMPO ESCALAR
E $\vec{v}(\vec{x})$ " " " VETORIAL

ENTÃO

$\vec{\nabla}\phi$ É UM CAMPO VETORIAL

$\vec{\nabla}\cdot\vec{v}$ É UM CAMPO ESCALAR

$\vec{\nabla}\times\vec{v}$ É UM CAMPO VETORIAL* (VER ADIANTE)

Vetores, escalares e tensores axiais

SEJA $\vec{A} = \vec{B} \times \vec{C}$ ONDE $\vec{B}$ E $\vec{C}$ SÃO VETORES

$$\Rightarrow \boxed{A_\alpha = \epsilon^{\alpha\beta\gamma} B_\beta C_\gamma} \quad (2)$$

ONDE $\epsilon^{\alpha\beta\gamma}$ É O TENSOR DE LEVI-CIVITA OU TOTALMENTE ANTI-SIMÉTRICO

MOSTRE

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma} = \begin{cases} 0 & \text{SE HÁ ALGUMA REPETIÇÃO NOS ÍNDICES } (\alpha,\beta,\gamma) \\ & (\text{OU SEJA, P. EX., } \epsilon^{001} = 0,\ \epsilon^{111} = 0 \ldots) \\ +1 & \text{SE } (\alpha,\beta,\gamma) = (1,2,3) \text{ OU PERMUTAÇÕES CÍCLICAS} \\ & (2,3,1),\ (3,1,2) \\ -1 & \text{SE } (\alpha,\beta,\gamma) = (2,1,3) \text{ OU PERM. CICL.} \\ & (1,3,2),\ (3,2,1) \end{cases}$$

NOTE QUE $\epsilon^{\alpha\beta\gamma} = -\epsilon^{\beta\alpha\gamma} = \epsilon^{\beta\gamma\alpha}$

$$A'_\alpha = \epsilon^{\alpha\beta\gamma} (a_{\beta\delta} B_\delta)(a_{\gamma\mu} C_\mu) = \epsilon^{\alpha\beta\gamma} a_{\beta\delta}\, a_{\gamma\mu}\, B_\delta C_\mu$$

PODE-SE MOSTRAR (VER NOTAS) QUE:

$$\boxed{A'_\alpha = \det(a)\, a_{\alpha\beta} A_\beta}$$

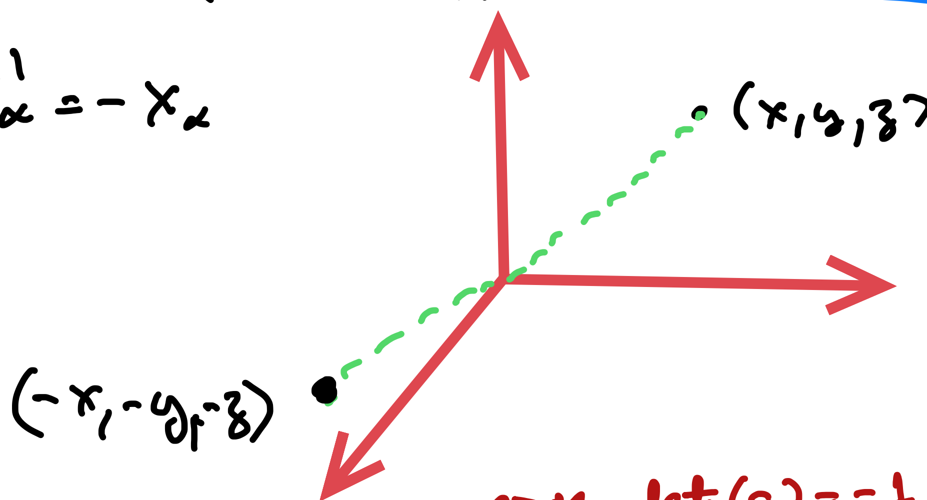
Como vimos $\det(a) = \pm 1$

Exemplo de $a_{\alpha\beta}$ ortogonal com $\det(a) = -1$:

$$a_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow a^T = a^{-1}, \; \det(a) = -1$$

P : inversão espacial ou paridade

$$x'_\alpha = -x_\alpha$$



Toda rotação com $\det(a) = -1$ pode ser escrita, como o produto de P por uma rotação de $\det(a) = +1$

Se $\det(a) = 1 \Rightarrow$ rotação própria (a^P)

$\det(a) = -1 \Rightarrow$ " imprópria (a^I)

$$\Rightarrow \boxed{a^I = P a^P = a^P P}$$

SE $A'_\alpha = \det(a)\, a_{\alpha\beta} A_\beta$, A_α É CHAMADO DE UM VETOR AXIAL OU UM PSEUDO-VETOR

UM ESCALAR É INVARIANTE SOB $\underline{P}$

UM PSEUDO-ESCALAR TROCA O SINAL SOB P:

$$\theta' = -\theta \quad \text{SOB } a^{I}$$

UM TENSOR DE ORDEM 2 NÃO TROCA O SINAL SOB P

UM PSEUDO-TENSOR " " " TROCA O SINAL SOB P

UM TENSOR DE ORDEM $\underline{n}$ É MULTIPLICADO POR $(-1)^n$ SOB $\underline{P}$

UM PSEUDO-TENSOR DE ORDEM $\underline{n}$ É MULTIPLICADO POR $(-1)^{(n+1)}$ SOB $\underline{P}$

Reversão temporal

OPERAÇÃO QUE TROCA $t \to -t$: T

É CLARO QUE $\vec{x}$ É PAR SOB T : $\vec{x}' = T\vec{x} = \vec{x}$

$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$ $\quad$ $\vec{v}' = T\vec{v} = -\vec{v}$ (ÍMPAR)

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}$; $T\vec{L} = -\vec{L}$

Classificação das quantidades eletromagnéticas segundo suas propriedades de transformação

CARGA ELÉTRICA : q É UM ESCALAR VERDADEIRO
PAR SOB T

$\rho(\vec{x}) = \frac{\Delta q(\vec{x})}{\Delta V} \Rightarrow$ É UM CAMPO ESCALAR (VERDADEIRO)
PAR SOB T

$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \Rightarrow$ COMO $\vec{F}$ É VETOR VERDADEIRO, PAR SOB T
SEGUE QUE $\vec{E}$ É UM CAMPO VETORIAL
VERDADEIRO, PAR SOB T

LEI DE GAUSS : $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

AMBOS OS LADOS DA EQUAÇÃO SÃO ESCALARES
VERDADEIROS, PARES SOB T

$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

→ PSEUDO-VETOR, PAR SOB T

⇒ $\vec{B}$ É UM PSEUDO-VETOR, ÍMPAR SOB T

$\vec{J} = \rho \vec{v} \Rightarrow \vec{J}$ É UM VETOR VERDADEIRO, ÍMPAR SOB T

$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, VETOR VERDADEIRO, ÍMPAR SOB T

$\vec{\nabla} \times \vec{B}$, VETOR VERDADEIRO, ÍMPAR SOB T

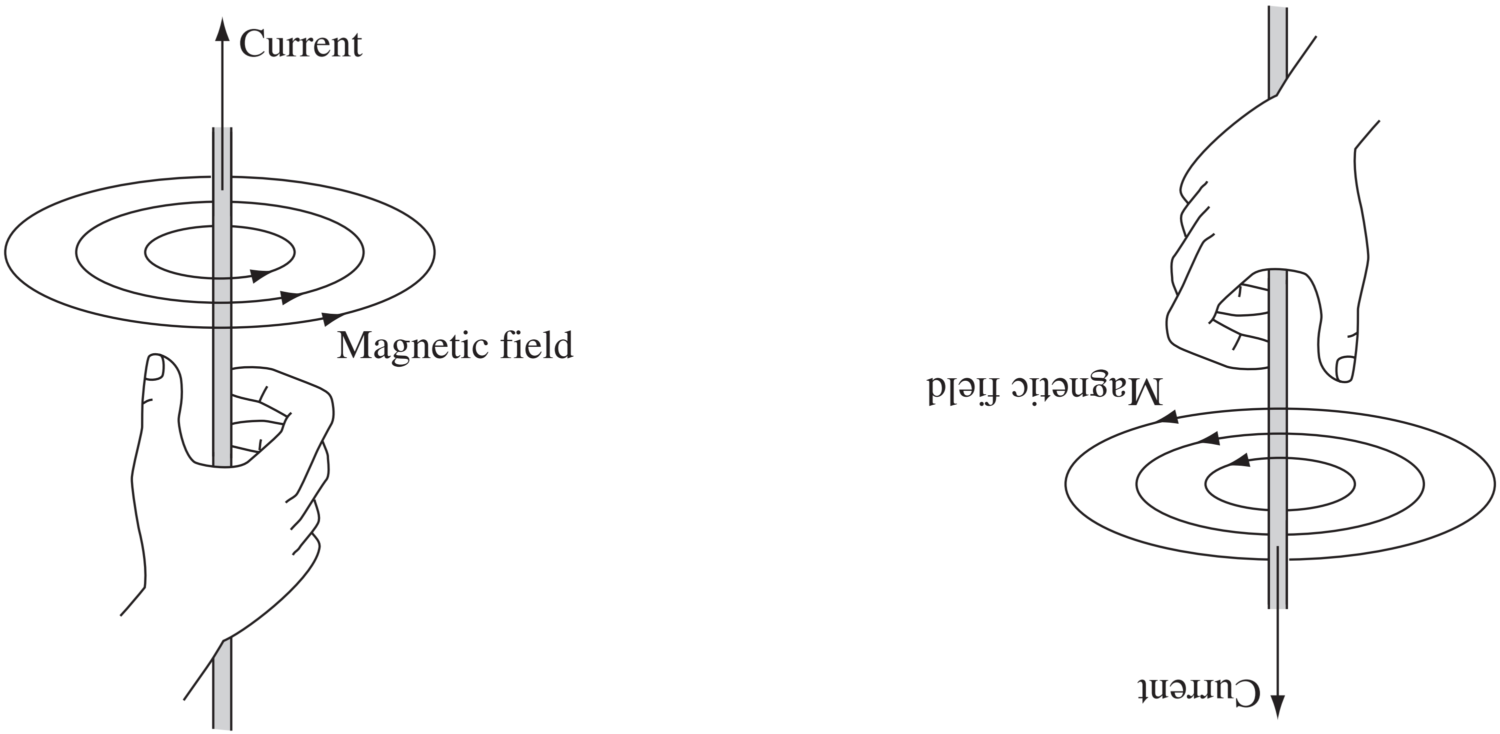
$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ → PSEUDO-ESCALAR, ÍMPAR SOB T

<u>EXERCÍCIO</u>: • SE MANTIVERMOS APENAS DERIVADAS PRIMEIRA DOS CAMPOS $\vec{E}$ E $\vec{B}$

• APENAS TERMOS LINEARES EM $\vec{E}, \vec{B}, \rho, \vec{J}$

⇒ AS FORMAS DAS 4 EQS. DE MAXWELL SÃO AS ÚNICAS POSSÍVEIS COMPATÍVEIS COM COVARIÂNCIA SOB ROTAÇÕES, P E T.

Reversão temporal troca o sentido da corrente e, por isso, o sentido do campo magnético.



FORÇA DE LORENTZ:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

DOS DOIS LADOS, VETORES VERDADEIROS, PARES SOB T

$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \Rightarrow \vec{A}$ É VETOR VERDADEIRO, ÍMPAR SOB T

Φ É ESCALAR VERDADEIRO PAR SOB T $\left(\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)$

Table 6.1 Transformation Properties of Various Physical Quantities under Rotations, Spatial Inversion and Time Reversal[a]

Physical Quantity		**Rotation (rank of tensor)**	P **Space Inversion (name)**	T **Time Reversal**
I. *Mechanical*				
Coordinate	$\mathbf{x}$	1	Odd (vector)	Even
Velocity	$\mathbf{v}$	1	Odd (vector)	Odd
Momentum	$\mathbf{p}$	1	Odd (vector)	Odd
Angular momentum	$\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$	1	Even (pseudovector)	Odd
Force	$\mathbf{F}$	1	Odd (vector)	Even
Torque	$\mathbf{N} = \mathbf{x} \times \mathbf{F}$	1	Even (pseudovector)	Even
Kinetic energy	$p^2/2m$	0	Even (scalar)	Even
Potential energy	$U(\mathbf{x})$	0	Even (scalar)	Even
II. *Electromagnetic*				
Charge density	ρ	0	Even (scalar)	Even
Current density	$\mathbf{J}$	1	Odd (vector)	Odd
Electric field	$\mathbf{E}$			
Polarization	$\mathbf{P}$	1	Odd (vector)	Even
Displacement	$\mathbf{D}$			
Magnetic induction	$\mathbf{B}$			
Magnetization	$\mathbf{M}$	1	Even (pseudovector)	Odd
Magnetic field	$\mathbf{H}$			
Poynting vector	$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$	1	Odd (vector)	Odd
Maxwell stress tensor	$T_{\alpha\beta}$	2	Even (tensor)	Even