

Resposta linear

Suponha que um sistema seja descrito por um hamiltoniano que é a soma de dois termos:

$$\hat{H}_T = \hat{H} + \hat{H}_{ext}(t)$$

onde \hat{H} é independente do tempo (e, de modo geral, independente) e $H_{ext}(t)$ é uma perturbação externa, geralmente dependente do tempo. Há vários exemplos de $H_{ext}(t)$:

(i) Campo magnético aplicado

(ii) Campo óptico aplicado

(iii) Onda ~~de~~ eletromagnética incidente

(iv) Deformação elástica

⋮

Em qualquer caso, estamos interessados no valor de algum observável do sistema, na presença de alguma perturbação externa. Suponhamos que $H_{ext}(t)$ é "ligado" em $t = t_0$ (que pode ser tomado como $t_0 = -\infty$).

Na ausência de $H_{ext}(t)$, o sistema é descrito por um vetor de estado que satisfaz:

$$i\partial_t |\Psi(t)\rangle = \hat{H} |\Psi(t)\rangle$$

$$\Rightarrow |\Psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t} |\Psi(0)\rangle$$

na representação de Schrödinger. Na presença do campo externo:

$$i\partial_t |\bar{\Psi}(t)\rangle = [\hat{H} + \hat{H}_{\text{ext}}(t)] |\bar{\Psi}(t)\rangle$$

Por analogia com a representação de interação, procuraremos soluções para $|\bar{\Psi}(t)\rangle$ na forma

$$|\bar{\Psi}(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t} \hat{U}(t) |\bar{\Psi}(0)\rangle$$

Segue que:

$$\begin{aligned} i\partial_t |\bar{\Psi}(t)\rangle &= e^{-i\hat{H}t} [\hat{H}\hat{U} + i\partial_t \hat{U}(t)] |\bar{\Psi}(0)\rangle \\ &= [\hat{H} + \hat{H}_{\text{ext}}(t)] e^{-i\hat{H}t} \hat{U} |\bar{\Psi}(0)\rangle \end{aligned}$$

$$\Rightarrow i\partial_t \hat{U}(t) = e^{i\hat{H}t} \hat{H}_{\text{ext}}(t) e^{-i\hat{H}t} \hat{U}(t)$$

$$\boxed{i\partial_t \hat{U}(t) = \hat{H}_{\text{extH}}(t) \hat{U}(t)}$$

onde $\hat{H}_{\text{extH}}(t)$ é a RH de $\hat{H}_{\text{ext}}(t)$. A condição inicial satisfeita por $\hat{U}(t)$ é:

$$\hat{U}(t) = \hat{1} \quad t < t_0$$

pois a perturbação externa só é ligada em $t = t_0$.

Já vimos que a equação acima tem a solução:

$$\hat{U}(t) = \hat{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^{\infty} dt_1 \dots dt_n T[\hat{H}_{\text{extH}}(t_1) \dots \hat{H}_{\text{extH}}(t_n)]$$

Só estaremos interessados, entretanto, nos efeitos de primeira ordem em $H_{\text{ext}}(t)$ (resposta linear):

$$\hat{U}^{(1)}(t) = \hat{1} - i \int_{t_0}^t dt_1 \hat{H}_{\text{extH}}(t_1)$$

Segue que o vetor de estado é modificado em 1ª ordem da seguinte maneira:

$$|\overline{\Psi}^{(1)}(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t} \left[1 - i \int_{t_0}^t dt_1 \hat{H}_{\text{extH}}(t_1) \right] |\Psi(0)\rangle$$

e os elementos de matriz de um operador qualquer \hat{B} ficam:

$$\begin{aligned} \langle \overline{\Psi}'(t) | \hat{B} | \overline{\Psi}(t) \rangle &\cong \langle \Psi'(0) | \left[1 + i \int_{t_0}^t dt_1 \hat{H}_{\text{extH}}(t_1) \right] e^{i\hat{H}t} \hat{B} e^{-i\hat{H}t} \\ &\times \left[1 - i \int_{t_0}^t dt'_1 \hat{H}_{\text{ext}}(t'_1) \right] |\Psi(0)\rangle \\ &\cong \langle \Psi'_H(0) | \hat{B}_H(t) | \Psi_H(0) \rangle + i \int_{t_0}^t dt_1 \langle \Psi'_H(0) | [\hat{H}_{\text{extH}}(t_1), \hat{B}_H(t)] | \Psi_H(0) \rangle \end{aligned}$$

onde usamos que $|\Psi_H(0)\rangle = |\Psi_S(0)\rangle$. A resposta de \hat{B} à perturbação externa é definida como a diferença de valores esperados em um determinado estado entre o sistema com e sem perturbação externa:

$$\delta \langle \hat{B} \rangle(t) = i \int_{t_0}^t dt_1 \langle \Psi'_H(0) | [\hat{H}_{\text{extH}}(t_1), \hat{B}_H(t)] | \Psi_H(0) \rangle$$

Esse é um resultado muito importante. Em primeira ordem na perturbação, podemos achar a resposta do sistema à mesma calculando-se apenas elementos de matriz no sistema NÃO PERTURBADO.

Suponha que a perturbação externa possa ser escrita como:

$$\hat{H}_{\text{ext}}(t) = \varphi(t) \hat{A}$$

onde \hat{A} é um operador qualquer e $\varphi(t)$ uma função dependente do tempo. ($\varphi(t) = 0$ para $t < t_0$)

$$\Rightarrow \delta \langle \hat{B} \rangle(t) = i \int_{t_0}^t dt_1 \varphi(t_1) \langle \Psi_H(0) | [\hat{A}_H(t), \hat{B}_H(t)] | \Psi_H(0) \rangle$$

Se definirmos:

$$i D_{BA}^R(t, t') = \theta(t-t') \langle \Psi_0 | [\hat{B}_H(t), \hat{A}_H(t')] | \Psi_0 \rangle$$

é claro que:

$$\delta \langle \hat{B} \rangle(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' D_{BA}^R(t, t') \varphi(t')$$

Note que a função $\theta(t-t')$ garante que a integral acima seja feita até t e o fato de que $\varphi(t') = 0$ se $t' < t_0$ garante que ela começa em t_0 . O superíndice R em D vem do fato de que esta é uma função retardada ou causal, onde o efeito da perturbação é posterior à aplicação da mesma.

De modo geral, podemos medir um observável em \vec{x} (densidade, densidade de spin, densidade de corrente) e o campo externo pode se acoplar a uma outra densidade em \vec{x}' . Segue que:

$$\hat{H}_{ext}(t) = \int d^3x \varphi(\vec{x}, t) \hat{A}(\vec{x})$$

$$\Rightarrow \delta \langle \hat{B}(\vec{x}) \rangle(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \int d^3x' D_{BA}^R(x, x') \varphi(\vec{x}', t')$$

$$i D_{BA}^R(x, x') = \theta(t-t') \langle \Psi_0 | [\hat{B}_H(\vec{x}, t), \hat{A}_H(\vec{x}', t')] | \Psi_0 \rangle$$

Num sistema homogêneo:

$$\varphi(\vec{k}, \omega) = \int d^3x dt e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} e^{i\omega t} \varphi(\vec{x}, t)$$

$$\delta\langle \hat{B}(\vec{k}, \omega) \rangle = \int d^3x dt e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} e^{i\omega t} \delta\langle \hat{B}(\vec{x}, t) \rangle$$

$$D_{BA}^R(\vec{k}, \omega) = \int d^3(\vec{x}-\vec{x}') d(t-t') e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} e^{i\omega(t-t')} D_{BA}^R(\vec{x}-\vec{x}', t-t')$$

$$\Rightarrow \delta\langle \hat{B}(\vec{k}, \omega) \rangle = D^R(\vec{k}, \omega) \varphi(\vec{k}, \omega)$$

A função $D^R(\vec{k}, \omega)$ é uma susceptibilidade generalizada:

$$\chi(\vec{q}, \omega) = D^R(\vec{q}, \omega) = \frac{\delta\langle \hat{B}(\vec{k}, \omega) \rangle}{\varphi(\vec{k}, \omega)}$$

A questão agora é como calcular $D^R(\vec{k}, \omega)$. Sua estrutura causal não permite que se desenvolva uma série perturbativa, pois o teorema de Wick só se aplica a valores operados de produtos ~~de~~ ordenados temporalmente de operadores. Por isso, definimos:

$$iD_{BA}(x, x') = \langle \Psi_0 | T[\hat{B}(\vec{x}, t) \hat{A}(\vec{x}', t')] | \Psi_0 \rangle$$

que é análoga à função de Green de um corpo.

A relação entre D_{BA} e D_{BA}^R é dada pela representação de Lehmann. Com efeito, numa derivação totalmente análoga à feita para $G(\vec{k}, \omega)$ obtemos

$$D_{BA}(\vec{k}, \omega) = V \sum_n \left[\frac{\langle \Psi_0 | \hat{B}(0) | n\vec{k} \rangle \langle n\vec{k} | \hat{A}(0) | \Psi_0 \rangle}{\omega - (E_n - E_0) + i\eta} - \frac{\langle \Psi_0 | \hat{A}(0) | n\vec{k} \rangle \langle n\vec{k} | \hat{B}(0) | \Psi_0 \rangle}{\omega + (E_n - E_0) - i\eta} \right]$$

$$D_{BA}^R(\vec{k}, \omega) = V \sum_n \left[\frac{\langle \Psi_0 | \hat{B}(0) | n\vec{k} \rangle \langle n\vec{k} | \hat{A}(0) | \Psi_0 \rangle}{\omega - (E_n - E_0) + i\eta} - \frac{\langle \Psi_0 | \hat{A}(0) | n\vec{k} \rangle \langle n\vec{k} | \hat{B}(0) | \Psi_0 \rangle}{\omega + (E_n - E_0) + i\eta} \right]$$

onde os estados $|\underline{n}, \vec{k}\rangle$ têm N partículas e são ligados a $|\Phi_0\rangle$ por elementos de matriz não-nulos de $\hat{B}(0)$ e $\hat{A}(0)$. Isso porque, de modo geral, $A(0)$ e $B(0)$ são quadrados de um corpo, quadráticos em operadores de criação e aniquilação e conservam, portanto, o número de partículas. Segue que $E_n - E_0 > 0$ são as excitações do sistema de N partículas. Logo:

$$\text{Re } D_{BA}(\vec{k}, \omega) = \text{Re } D_{BA}^R(\vec{k}, \omega)$$

$$\text{Im } D_{BA}(\vec{k}, \omega) = \begin{cases} \text{Im } D_{BA}^R(\vec{k}, \omega) & \text{re } \omega > 0 \\ -\text{Im } D_{BA}^R(\vec{k}, \omega) & \text{re } \omega < 0 \end{cases}$$

$$\text{ou } \text{Im } D_{BA}(\vec{k}, \omega) = \text{sgn } \omega \text{ Im } D_{BA}^R(\vec{k}, \omega);$$

que nos dão as relações procuradas entre $D_{BA}(\vec{k}, \omega)$ e $D_{BA}^R(\vec{k}, \omega)$.

Portanto, a estratégia é calcular $D_{BA}(\vec{k}, \omega)$ perturbativamente, utilizando-se para isso o teorema de Wick e alguma aproximação e depois achar $D_{BA}^R(\vec{k}, \omega)$ com as equações acima. Note que $D_{BA}^R(\vec{k}, \omega)$ é a grandeza física diretamente mensurável e $D_{BA}(\vec{k}, \omega)$ é a quantidade mais susceptível de cálculo teórico.

Consideremos, como exemplo, uma carga elétrica colocada num metal uniforme. Nesse caso:

$$\varphi(\bar{x}) = -\frac{e^2}{x} \quad \text{e} \quad \hat{A}(\bar{x}) = \hat{u}(\bar{x}) = \sum_{\alpha} \psi_{\alpha}^{\dagger}(\bar{x}) \psi(\bar{x})$$

$$\varphi(\bar{q}, \omega) = -8\pi^2 e^2 \delta(\omega)$$

onde $t_0 \rightarrow -\infty$ e usamos $\int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t} = 2\pi \delta(\omega)$. Se medirmos a densidade induzida pela carga temos:

$$\delta \langle \hat{u}(\bar{x}) \rangle = \int \frac{d^3k d\omega}{(2\pi)^4} e^{i\vec{k} \cdot \bar{x}} e^{-i\omega t} D_{mm}^R(\vec{k}, \omega) \varphi(\vec{k}, \omega)$$

$$\text{onde } iD_{mm}^R(x, x') = \langle \Psi_0 | [\hat{u}_H(\bar{x}, t), \hat{u}_H(\bar{x}', t')] | \Psi_0 \rangle \theta(t-t')$$

$$\delta \langle \hat{u}(\bar{x}) \rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k} \cdot \bar{x}} \left(\frac{-4\pi e^2}{k^2} \right) D_{mm}^R(\vec{k}, 0) = - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k} \cdot \bar{x}} U_0(\vec{k}) D_{mm}^R(\vec{k}, 0)$$

Da nossa discussão para o gás de elétrons uniforme, podemos achar a expressão para $D_{mm}^R(\vec{k}, \omega)$ na aproximação RPA ($r_s \ll 1$). Para isso, redefina $D_{mm}(x, x')$ usando $\tilde{u} \equiv \hat{u}(\bar{x}) - n_0 = \hat{u}(x) - \frac{N}{V}$.

$$iD_{mm}^R(x, x') = \theta(t-t') \langle \Psi_0 | [\tilde{u}_H(\bar{x}, t), \tilde{u}_H(\bar{x}', t')] | \Psi_0 \rangle$$

$$iD_{mm}(x, x') = \langle \Psi_0 | T[\tilde{u}_H(\bar{x}, t), \tilde{u}_H(\bar{x}', t')] | \Psi_0 \rangle$$

A função $D_{mm}^{(0)}$ não-interagente é:

$$iD_{mm}^{(0)}(x, x') = \langle \Psi_0 | T[\psi_{\alpha}^{\dagger}(\bar{x}, t) \psi_{\alpha}(\bar{x}, t) \psi_{\beta}^{\dagger}(\bar{x}', t') \psi_{\beta}(\bar{x}', t')] | \Psi_0 \rangle - n^2$$

$$= (-2) iG^{(0)}(x, x') iG^{(0)}(x', x) = +2 G^{(0)}(x, x') G^{(0)}(x', x)$$

que é graficamente escrita como:



Essa gráfica aparece nas inserções de polarização e é óbvio que, em primeira ordem:

$$U^R(x, x') \cong U_0(x, x') + \int d^4x_1, d^4x'_1 U_0(x, x_1) \Pi^{(0)}(x_1, x'_1) U_0(x'_1, x')$$

$$\text{e } \Pi^{(0)}(x_1, x'_1) = D^{(0)}(x_1, x'_1)$$

Essa estrutura persiste em ordens superiores e temos:

$$D(x, x') = \tilde{\Pi}(x, x')$$

Note como a subtração de u de $\tilde{u}(\bar{x})$ ~~cancela~~ cancela todos os diagramas onde há uma parte ligada a x e outra separada ligada a x' :



Da equação de Dyson para $\tilde{\Pi}(\bar{q}, \omega)$:

$$U_0(\tilde{\Pi}(\bar{q})) = \text{diagram} = \text{diagram} + \text{diagram} + \dots = \text{diagram} [U_0 \Pi + U_0^2 \Pi^2 + \dots]$$

$$= \frac{1}{1 - U_0 \Pi} - 1 = \frac{U_0 \Pi}{1 - U_0 \Pi} = \Pi U^R$$

Logo:

$$U_0 D^R(\vec{k}, 0) = U_0 \tilde{\Pi}^R(\vec{k}, 0) = U^R(\vec{k}, 0) \tilde{\Pi}^R(\vec{k}, 0)$$

$$= \frac{U_0(\vec{k}) \tilde{\Pi}^R(\vec{k}, 0)}{1 - U_0(\vec{k}) \tilde{\Pi}^R(\vec{k}, 0)}$$

Em RPA; $\Pi^R(k) \cong \Pi^{R(0)}(\vec{k})$. Pode-se mostrar que:
(Fetter + Walecka pp. 158-163)

$$\Pi^{(0)}(\vec{k}, 0) = \Pi^{R(0)}(\vec{k}, 0) = -\frac{m k_F}{2\pi^2} g(k/k_F) \in \mathbb{R}$$

$$\text{onde } g(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2x} \left(\frac{1-x^2}{4} \right) \ln \left| \frac{1-x/2}{1+x/2} \right|$$

Logo:

$$\delta \langle \hat{n}(\vec{x}) \rangle = + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \frac{(4\alpha r_s / \pi) g(k/k_F)}{\left(\frac{k}{k_F}\right)^2 + \frac{4\alpha r_s}{\pi} g(k/k_F)}$$

$$\text{onde } \alpha = \left(\frac{4}{9\pi} \right)^{1/3}$$

Se tomarmos $g(\vec{x}) \cong g(0) = 1$ acima obtemos:

$$\delta \langle \hat{n}(\vec{x}) \rangle = \frac{q_{TF}^2}{4\pi x} e^{-q_{TF} x}$$

que é a blindagem à la Thomas-Fermi já vista anteriormente. Entretanto, devido à não-analiticidade de $g(k/k_F)$ devido aos logaritmos, um cálculo mais detalhado (Fetter + Walecka, pp. 178-180) revela que $\delta \langle \hat{n}(\vec{x}) \rangle$ decai mais lentamente que a forma exponencial

$$\delta \langle \hat{n}(\vec{x}) \rangle \sim - \frac{2\zeta/\pi}{(4+\zeta)} \frac{\cos(2k_F x)}{x^3}$$

$$\zeta = \frac{g_{TF}^2}{2k_F}$$

O decaimento é oscilatório e cai com a potência $\frac{1}{x^3}$. A oscilação é dada pelo vetor de onda de

Fermi k_F . Essas são as chamadas oscilações de Friedel. Elas ocorrem por causa da presença de uma superfície de Fermi bem-definida.

A representação de Lehmann nos dá imediatamente que os polos de $D(\vec{k}, \omega)$ ocorrem nas energias de excitações do sistema de N partículas. Na aproximação RPA, esses polos são facilmente encontrados:

$$D(\vec{k}, \omega) = \Pi(\vec{k}, \omega) \cong \Pi^{RPA}(\vec{k}, \omega) = \frac{\Pi^{(0)}(\vec{k}, \omega)}{1 - U_0(\vec{k})\Pi^{(0)}(\vec{k}, \omega)}$$

que tem polos quando:

$$U_0(\vec{k})\Pi^{(0)}(\vec{k}, \omega) = 1$$

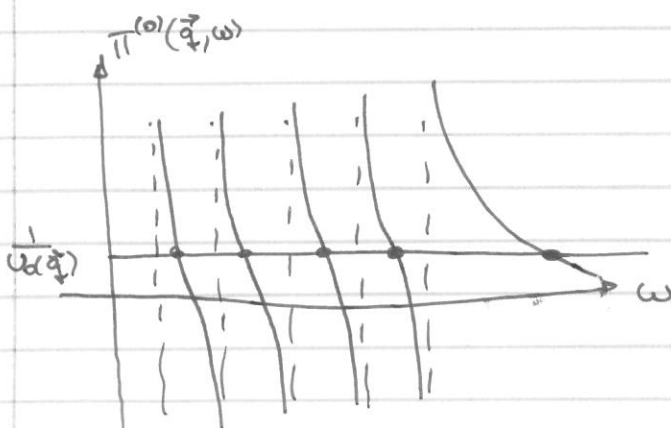
De modo geral, o polo é complexo com uma parte imaginária que dá a atenuação do ~~modo~~ excitação. A equação acima pode ser resolvida graficamente. Para um sistema com uma separação finita entre os níveis e $\omega > 0$

$$\Pi^{(0)}(\vec{q}, \omega) = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \left[\frac{\theta(k_F - k)\theta(|\vec{k} + \vec{q}| - k_F)}{\omega + E_k - E_{k+q} + i\eta} - \frac{\theta(k - k_F)\theta(k_F - |\vec{k} + \vec{q}|)}{\omega + E_k - E_{k+q} + i\eta} \right]$$

vê-se que $\Pi^{(0)}$ tem polos quando

$$\omega = E_{k+q} - E_k \quad \text{se} \quad \begin{matrix} k \in \text{SF} & k \notin \text{SF} \\ k+q \notin \text{SF} & \text{ou} & k+q \in \text{SF} \end{matrix}$$

SF = superfície de Fermi



As linhas tracejadas são os polos $\omega = E_{k+q} - E_k$ para os vários valores de k . A função $\Pi^{(0)}(\vec{q}, \omega)$ é decrescente entre os polos acima.

A solução gráfica:

$$\tilde{\Pi}^{(0)}(\vec{q}, \omega) = \frac{1}{U_0(\vec{q})}$$

é simplesmente dada pela interseção da linha horizontal

$$\omega = \frac{1}{U_0(\vec{q})}$$

com $\tilde{\Pi}^{(0)}(\vec{q}, \omega)$, como na figura. Vê-se que há vários modos próximos a

$$\omega = E_{k+q} - E_k$$

que correspondem às excitações de pares partícula-buraco, e que formam um contínuo no limite termodinâmico.

Além disso, há um modo que se separa desse contínuo, correspondente à interseção de $\frac{1}{U_0(\vec{q})}$ com a parte de $\tilde{\Pi}^{(0)}(\vec{q}, \omega)$ que decai como $\frac{1}{\omega^2}$ e é separada dos pólos $\omega = E_{k+q} - E_k$. Para $q \ll k_F$ e ω fixo: (Fetter + Walecka, p. 182):

$$\tilde{\Pi}^{(0)}(\vec{q}, \omega) \approx \frac{k_F^3}{3\pi^2} \frac{q^2}{m\omega^2} \left[1 + \frac{3}{5} \left(\frac{k_F q}{m\omega} \right)^2 + \dots \right]$$

$$\Rightarrow \text{pólo em } \frac{q^2}{4\pi e^2} \approx \frac{k_F^3}{3\pi^2} \frac{q^2}{m\omega_p^2} \Rightarrow \omega_p^2 = \frac{4\pi e^2}{m} \left(\frac{k_F^3}{3\pi^2} \right) = \frac{4\pi m e^2}{m}$$

que é a frequência clássica de plasma. Para $q \neq 0$:

$$\omega_q \approx \omega_p \left[1 + \frac{3}{10} \left(\frac{q}{q_{TE}} \right)^2 + \dots \right] \quad \text{"Dispersão do plasmon"}$$

As oscilações de plasmon podem ser obtidas classicamente pois ω_p não contém \hbar . Seja uma desvio na densidade eletrônica $n_e(\vec{x}, t)$ a partir da densidade de equilíbrio, que cancela a densidade positiva de fundo n_0 :

$$n_e(\vec{x}, t) = \delta n_e(\vec{x}, t) + n_0$$

A densidade de carga correspondente é:

$$\delta \rho(\vec{x}, t) = -e [n_e(\vec{x}, t) - n_0] = -e \delta n_e(\vec{x}, t)$$

que determina o campo elétrico através da lei de Gauss

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \delta \rho = -4\pi e \delta n_e$$

O campo elétrico, por sua vez, atua na densidade eletrônica segundo a 2ª lei de Newton:

$$m \frac{d(m_e \vec{v})}{dt} = -e m_e \vec{E}$$

que pode ser linearizada (considerando $-e \delta n_e$ e \vec{v} como quantidades pequenas), lembrando que $\frac{d}{dt}$ acima

é a derivada convectiva: $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}$, pois é a

aceleração de um elemento de volume medida por um observador que se desloca com o elemento:

$$m \frac{d(m_e \vec{v})}{dt} = m \left[\frac{\partial (m_e \vec{v})}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} (m_e \vec{v}) \right]$$

$$\approx m n_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + O(v^2, \delta n_e v)$$

$$e m_e \vec{E} \approx e n_0 \vec{E}$$

$$\Rightarrow m n_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -e n_0 \vec{E} \Rightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{e}{m} \vec{E}$$

nos dá: A equação da continuidade linearizada

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n_e \vec{v}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \delta n_e}{\partial t} + n_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

Tomando-se $\frac{\partial}{\partial t}$ da última equação:

$$\frac{\partial^2 \delta n_e}{\partial t^2} = -n_0 \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) = \frac{e n_0}{m} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$

e, da lei de Gauss:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \delta n_e}{\partial t^2} &= \frac{e n_0}{m} (-4\pi e) \delta n_e = -\frac{4\pi n_0 e^2}{m} \delta n_e \\ &= -\omega_p^2 \delta n_e \end{aligned}$$

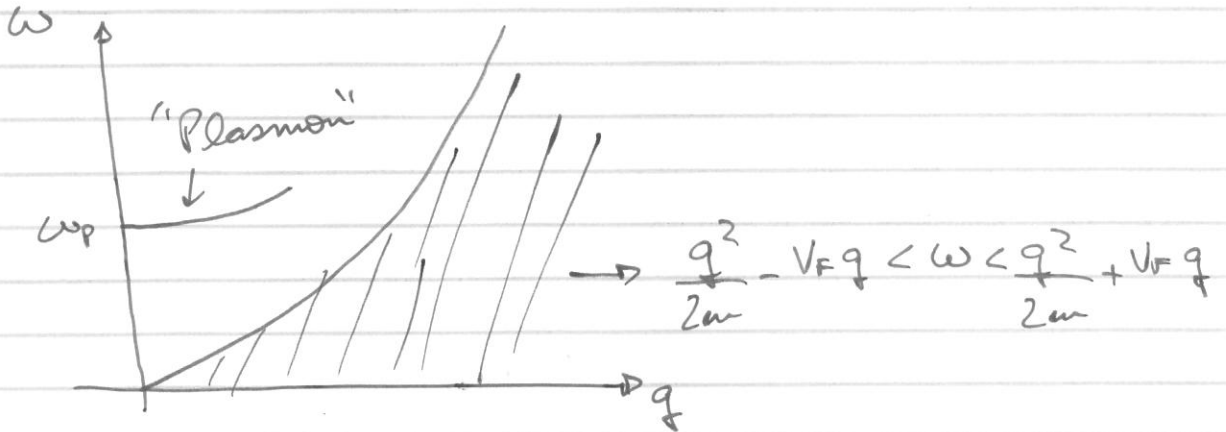
Para uma oscilação harmônica:

$$\delta n_e(\vec{x}, t) \propto e^{-i\omega_p t}$$

onde $\omega_p^2 = \frac{4\pi n_0 e^2}{m}$ é a frequência de plasma clássica

obtida em RPA.

Note que $\text{Im} \Pi^{(0)}(\vec{q}, \omega) = 0$ na ~~região~~ região do pólo, nessa aproximação, e o plasmon é não-ataenuado. Correções de ordem superior introduzem atenuação. É fácil ver que o plasmon se situa longe do contínuo de partícula-buraco e, por isso, não decai nessas excitações, ou RPA:



Note que $\omega_p(\vec{q}) \xrightarrow{q \rightarrow 0} \omega_p \neq 0$. Isso decorre

da natureza de longo alcance da interação Coulombiana que faz com que $U(\vec{q}) \sim \frac{1}{q^2}$, $q \rightarrow 0$. Se

$\lim_{q \rightarrow 0} U(q) = U_0 = \text{finito}$, a dispersão é do tipo $\omega \sim c_0 q$.

Isso é análogo à análise dos bósons de Goldstone APESAR DE NÃO SE TRATAR DE QUEBRA DE SIMETRIA NO PRESENTE CASO.

Para uma análise completa, é interessante analisar o caso em que $U(q \rightarrow 0) = U_0 = \text{finito}$, embora a simples aproximação RPA não seja justificada nesse caso. Nesse caso, antecipando que $\frac{\omega}{q} \xrightarrow{q \rightarrow 0} \text{finito}$

tomamos o limite $\omega \rightarrow 0$, $q \rightarrow 0$, $\frac{\omega}{q} = \text{finito} \equiv V_F S$ de $\Pi^{(0)}(\vec{q}, \omega)$ (Fetter + Walecka, p. 185)

$$\Pi^{(0)R}(\vec{q}, \omega) = \frac{m k_F}{\pi^2} \left[\frac{S}{2} \ln \left| \frac{1+S}{1-S} \right| - 1 - \frac{i\pi}{2} S \Theta(1-|S|) \right]$$

Nesse caso,

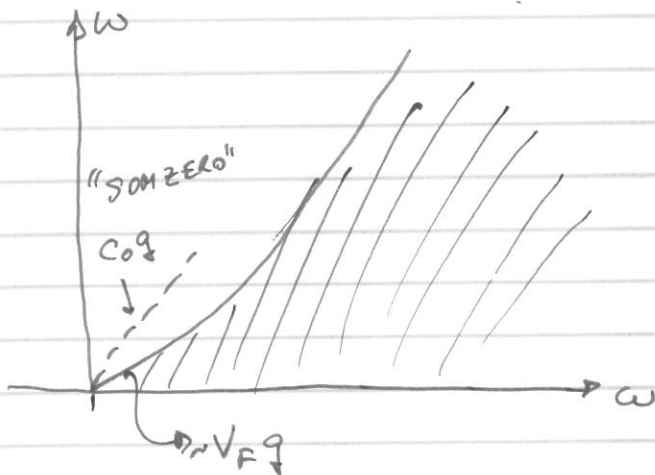
$$\frac{1}{U_0} = \frac{mk_F}{\pi^2} \left[\frac{S}{2} \ln \left| \frac{1+S}{1-S} \right| - 1 \right] \quad \text{re } S > 1$$

Devido à singularidade logarítmica, a equação acima tem solução para qualquer $U_0 > 0$.

Definindo $\lambda \equiv U_0 \frac{mk_F}{\pi^2}$ temos os resultados assintóticos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega = C_0 q \\ C_0 \cong V_F \left[1 + 2e^{-\frac{2}{\lambda} - 2} \right] \quad \lambda \ll 1 \\ C_0 \cong V_F \left(\frac{\lambda}{3} \right)^{1/2} \quad \lambda \gg 1 \end{array} \right.$$

Essa excitação é chamada de SOM ZERO e é observada em líquidos de Fermi neutros como ^3He . Ela também é separada do contínuo de pares partícula-buraco e não decai em RPA (mas sim em ordem superior) porque $C_0 > V_F$:



Essa excitação é DIFERENTE do som comum (chamado "primeiro som") pois ela acontece num regime sem colisões e é induzida pelas interações entre os férmions.

Considere agora a função de correlação densidade-densidade:

$$D_{\rho\rho}^R(\vec{q}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt(t-t') e^{i\omega(t-t')} \langle \Psi_0 | \rho(\vec{q}, t), \rho(+\vec{q}, t') | \Psi_0 \rangle \theta(t-t')$$

Sua representação de Lehmann é facilmente achada:

$$D_{\rho\rho}^R(\vec{q}, \omega) = \sum_n \left[\frac{\langle \Psi_0 | \rho(\vec{q}) | \Psi_n \rangle \langle \Psi_n | \rho(+\vec{q}) | \Psi_0 \rangle}{\omega - (E_n - E_0) + i\delta} - \frac{\langle \Psi_0 | \rho(+\vec{q}) | \Psi_n \rangle \langle \Psi_n | \rho(\vec{q}) | \Psi_0 \rangle}{\omega + (E_n - E_0) + i\delta} \right]$$

Segue que:

$$\text{Im } D_{\rho\rho}^R(\vec{q}, \omega) = -\pi \sum_n \left[\langle \Psi_0 | \rho(\vec{q}) | \Psi_n \rangle \langle \Psi_n | \rho(+\vec{q}) | \Psi_0 \rangle \delta(\omega - (E_n - E_0)) - \langle \Psi_0 | \rho(+\vec{q}) | \Psi_n \rangle \langle \Psi_n | \rho(\vec{q}) | \Psi_0 \rangle \delta(\omega + (E_n - E_0)) \right]$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \omega \text{Im } D_{\rho\rho}^R(\vec{q}, \omega) = -\pi \sum_n (E_n - E_0) \left[\langle \Psi_0 | \rho(\vec{q}) | \Psi_n \rangle \langle \Psi_n | \rho(+\vec{q}) | \Psi_0 \rangle + \langle \Psi_0 | \rho(+\vec{q}) | \Psi_n \rangle \langle \Psi_n | \rho(\vec{q}) | \Psi_0 \rangle \right] = (*)$$

Mas: ~~...~~

$$(*) = -\pi \sum_n \left[\langle \Psi_0 | \rho(-\vec{q}) | \Psi_n \rangle \langle \Psi_n | [H, \rho(\vec{q})] | \Psi_0 \rangle + \langle \Psi_0 | [H, \rho(\vec{q})] | \Psi_n \rangle \langle \Psi_n | \rho(-\vec{q}) | \Psi_0 \rangle \right]$$

$$= -\pi \langle \Psi_0 | \left\{ \rho(-\vec{q}) [H, \rho(\vec{q})] - [H, \rho(\vec{q})] \rho(-\vec{q}) \right\} | \Psi_0 \rangle$$

$$= +\pi \langle \Psi_0 | [[H, \rho(\vec{q})], \rho(-\vec{q})] | \Psi_0 \rangle$$

Entretanto, $\rho(\vec{q})$ comuta com $\hat{V} = \frac{1}{2} \sum_{\vec{q}} v(\vec{q}) \rho(-\vec{q}) \rho(\vec{q})$

$$\text{e } [H, \rho(\vec{q})] = [K, \rho(\vec{q})] = \frac{q^2}{2m} \rho(\vec{q}) + \frac{1}{m} \sum_{\vec{p}} (\vec{q} \cdot \vec{p}) c_{\vec{p}+\vec{q}, \sigma}^\dagger c_{\vec{p}, \sigma}$$

onde K = energia cinética

$$\left[[H, \rho(\vec{q})], \rho(-\vec{q}) \right] = - \frac{q^2}{2m} \sum_{\vec{p} \neq 0} c_{\vec{p}0}^+ c_{\vec{p}0}$$

$$\Rightarrow \langle \Phi_0 | \left[[H, \rho(\vec{q})], \rho(-\vec{q}) \right] | \Phi_0 \rangle = - \frac{Nq^2}{2m}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \omega \operatorname{Im} D_{\rho\rho}^R(\vec{q}, \omega) = - \frac{\pi Nq^2}{2m}$$

Regra de soma-f
("f-sum rule")

Note agora o seguinte. Em RPA temos:

$$D_{\rho\rho}(\vec{q}, \omega) = V \frac{\pi^{(0)}}{1 - U_0(\vec{q}) \pi^{(0)}}$$

Quando $q \rightarrow 0$, vemos que:

$$\pi^{(0)}(\vec{q}, \omega) \rightarrow \frac{m}{m} \frac{q^2}{\omega^2} = \frac{k_F^3}{3\pi^2 m} \frac{q^2}{\omega^2}$$

$$\Rightarrow D_{\rho\rho}(\vec{q}, \omega) = V \frac{\frac{m}{m} \frac{q^2}{\omega^2}}{1 - \frac{4\pi e^2 m}{m \omega^2} \frac{1}{m \omega^2}} = \frac{Nq^2}{m} \frac{1}{\omega^2 - \omega_p^2}$$

onde $\omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 m}{m} \Rightarrow$ frequência de plasma.

$$D_{\rho\rho}(\vec{q}, \omega) = \frac{Nq^2}{m} \frac{1}{2\omega_p} \left[\frac{1}{\omega - \omega_p} - \frac{1}{\omega + \omega_p} \right]$$

Para acharmos a $D_{\rho\rho}(\vec{q}, \omega)$ retardada, basta fazer $\omega \rightarrow \omega + i\delta$

$$D_{\rho\rho}^R(\vec{q}, \omega) = - \frac{\pi Nq^2}{2m\omega_p} \left[\delta(\omega - \omega_p) - \delta(\omega + \omega_p) \right]$$

Segue que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \omega \operatorname{Im} D_{\beta\beta}^k(\vec{q}, \omega) = -\frac{\pi N q^2}{m}$$

que é a regra de soma EXATA! Vamos, portanto, que quando $q \rightarrow 0$, RPA se torna exata. Outra maneira de se ver isso é reconhecer que o plasma "regota" a regra de soma f no limite $q \rightarrow 0$, ou seja, quaisquer outras excitações têm peso nulo quando $q \rightarrow 0$.