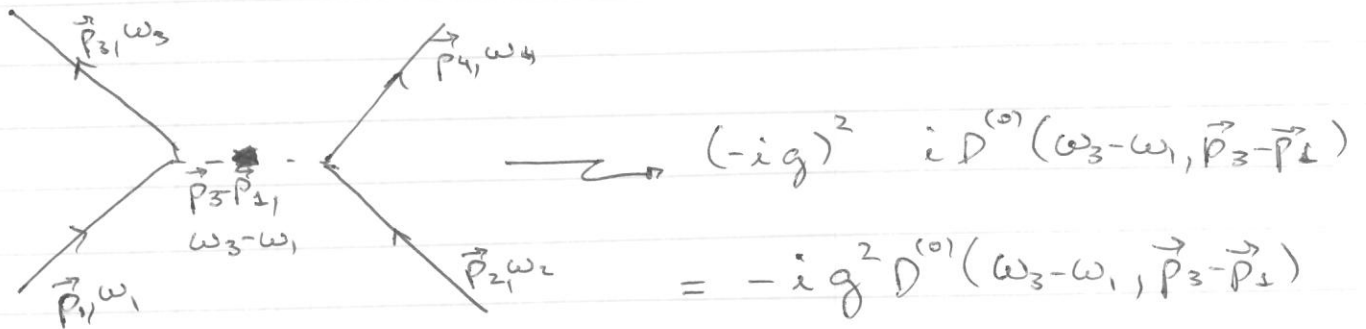


Não vamos nos deter na análise do problema elétron-fônon. Vamos apenas analisar a troca de fônons por 2 elétrons, representada por um vértice efetivo



Note a similaridade com uma interação direta se:

$$U(\omega, \vec{q}) \rightarrow g^2 D^{(0)}(\omega, \vec{q})$$

Uma importante diferença é a forte dependência com a frequência que reflete a natureza retardada da interação. Além disso, quando:

$$|\omega_3 - \omega_1| < \omega_0(\vec{p}_3 - \vec{p}_1) \Rightarrow U(\omega, \vec{q}) \approx -g^2$$

a interação efetiva entre os elétrons é atrativa!

Notem que

$$\omega_0(\vec{p}) = cp \sim \omega_D \sim 10^{-2} E_F$$

Ou seja, as frequências de vibração da rede, da ordem da frequência de Debye ω_D são tipicamente 2 ordens de grandeza menores que a energia de Fermi. Portanto, a interação efetiva é atrativa quando a transferência de energia eletrônica pertence a uma estreita faixa de largura ω_D

Modelo simplificado de interação e-ph

A interação elétron-fônon pode ser descrita num modelo simplificado como:

$$H_{e-ph} = g \int \sum_{\vec{r}} \psi_{\alpha}^{\dagger}(\vec{r}) \psi_{\alpha}(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) d^3r$$

onde g é uma constante de acoplamento e $\varphi(\vec{r})$ é associado ao campo de deslocamento da rede iônica em relação à posição de equilíbrio.

Além disso, $\varphi(\vec{r})$, que é um campo bozônico tem o requinte propagador (função de Green)

$$i D^{(0)}(1,2) = \langle T [\varphi(\vec{r}_1 t_1) \varphi(\vec{r}_2 t_2)] \rangle$$

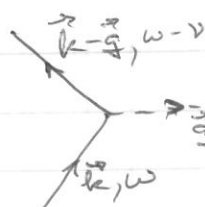
cuja transformada de Fourier é:

$$D^{(0)}(\omega, \vec{k}) = \frac{\omega_0(\vec{k})}{\omega^2 - \omega_0^2(\vec{k}) + i\delta}$$

onde $\omega_0(\vec{k}) = ck$ é a dispersão dos fônons acústicos e c é a velocidade do som.

A interação acima indexa diagramas de Feynman que são facilmente dedutíveis:

----- $\Rightarrow i D^{(0)}(\omega, \vec{k})$ = Função de Green dos fônons
(não-interagente)



$\Rightarrow -ig$ = Vértice da interação elétron-fônon

Vamos assumir um modelo simplificado em que retemos apenas a parte atrativa da interação (assumida constante) entre elétrons cuja energia pertence a uma faixa de largura $2\omega_0$ em torno da superfície de Fermi:

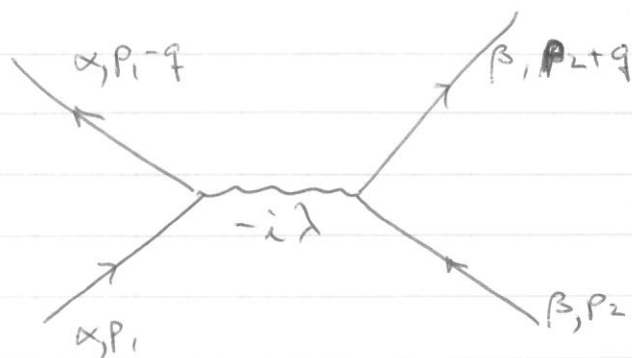
$$H_{int} = + \frac{\lambda}{2} \sum_{\substack{\vec{k}_1, \vec{k}_2 \\ \vec{q} \\ \sigma, \sigma'}} c_{\vec{k}_1 + \vec{q}, \sigma}^+ c_{\vec{k}_2 - \vec{q}, \sigma'}^+ c_{\vec{k}_2, \sigma'} c_{\vec{k}_1, \sigma}$$

$$= + \lambda \int d^3r \psi_{\sigma}^+(\vec{r}) \psi_{\sigma'}^+(\vec{r}) \psi_{\sigma'}(\vec{r}) \psi_{\sigma}(\vec{r})$$

Como vimos, dentro da faixa de energia de largura ω_0 em torno da Superfície de Fermi $\lambda < 0$.
A restrição:

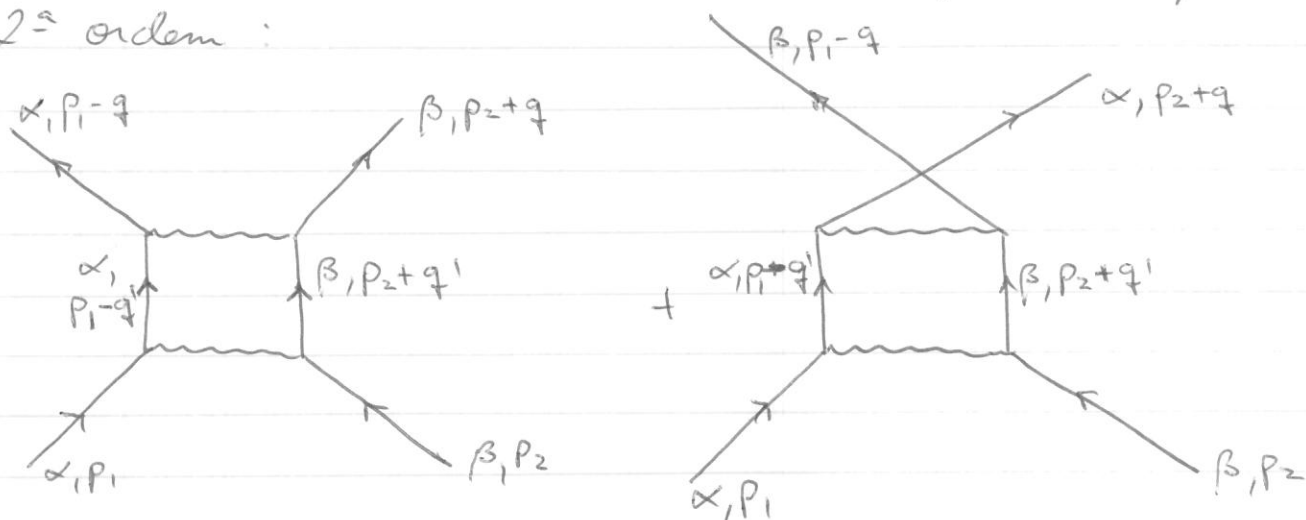
$$\left\{ \begin{array}{l} |E(\vec{k}_1)| < \omega_0 \\ |E(\vec{k}_2)| < \omega_0 \\ |E(\vec{k}_1 + \vec{q})| < \omega_0 \\ |E(\vec{k}_2 - \vec{q})| < \omega_0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{e é implícita no Hamiltoniano} \\ \text{acima} \end{array}$$

Para melhor entender a origem da instabilidade SC vamos analisar perturbativamente a interação e-e. O vértice básico é:



Todos os momentos
 $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_1 - \vec{q}$ e $\vec{p}_2 + \vec{q}$
 satisfazem
 $|\vec{p}_i| < \omega_0$

Vamos nos concentrar no chamado canal partícula-partícula em 2ª ordem:



A contribuição numérica de ambos os diagramas é a mesma, mas o segundo tem um sinal negativo devido à troca das pernas externas finais (exchange). Isso vem das regras para diagramas com 4 pernas externas, que estudamos. A estrutura interna é simples. Se somarmos com a contribuição em 1ª ordem temos:

$$-i\Pi_d^{(2)} = -i\lambda + (-i\lambda)^2 (i)^2 \int G^{(0)}(p_1 - q') G^{(0)}(p_2 + q') \frac{d^4 q'}{(2\pi)^4}$$

$$\Pi_d^{(2)} = \lambda + i\lambda^2 \int G^{(0)}(p_1 - q') G^{(0)}(p_2 + q') \frac{d^4 q'}{(2\pi)^4}$$

O sufixo d indica o diagrama direto. Vamos fazer a seguinte troca de variáveis na integral

$$\begin{aligned} q'_1 &\rightarrow q'_1 - p_2 \\ q'_1 &\rightarrow q \end{aligned} \quad k = p_1 + p_2 \quad \text{onde} \quad \begin{cases} q = (\nu, \bar{q}) \\ k = (\omega, \bar{k}) \end{cases}$$

$$\Gamma_d^{(2)} = \lambda + i \lambda^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} G^{(0)}(q) G^{(0)}(k-q) \equiv \lambda + i \lambda^2 I(k)$$

Usando que: $G^{(0)}(q) = \frac{1}{\cancel{\nu} - \epsilon_{\bar{q}} + i\eta \operatorname{sgn}(q - k_F)}$

$$\begin{aligned} I(k) = & \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \left\{ \theta(k_F - q) \theta(k_F - |\bar{k} - \bar{q}|) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\nu}{2\pi} \frac{1}{(\nu - \epsilon_1 - i\eta)(\omega - \nu - \epsilon_2 - i\eta)} \right. \\ & \left. + \theta(q - k_F) \theta(|\bar{k} - \bar{q}| - k_F) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\nu}{2\pi} \frac{1}{(\nu - \epsilon_1 + i\eta)(\omega - \nu - \epsilon_2 + i\eta)} \right\} \end{aligned}$$

onde $\epsilon_1 = \epsilon(\bar{q})$ e $\epsilon_2 = \epsilon(\bar{k} - \bar{q})$, de tal forma que os pólos $\sigma^\pm$ vão sempre em semi-planos opostos. Fechando a integração por um semi-círculo de raio infinito no semi-plano superior em ambos os casos acima:

$$I(k) = i \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{\theta(k_F - q) \theta(k_F - |\bar{k} - \bar{q}|)}{\omega - \epsilon_1 - \epsilon_2 - i\eta} - \frac{\theta(q - k_F) \theta(|\bar{k} - \bar{q}| - k_F)}{\omega - \epsilon_1 - \epsilon_2 + i\eta} \right\}$$

A integração acima deve também estar restrita pelas condições:

$$|\epsilon(\bar{q})| < \omega_D \quad \text{e} \quad |\epsilon(\bar{k} - \bar{q})| < \omega_D$$

Vamos fazer o cálculo acima no caso:

$$v_F k, \omega \ll \omega_D$$

Nesse caso, considerando que $\omega_D \ll E_F$, podemos nos concentrar na região próxima ao nível de Fermi e escrever:

$$\epsilon(\vec{q}) = \frac{q^2}{2m} - \frac{k_F^2}{2m} \approx \frac{k_F}{m} (q - k_F) = v_F (q - k_F)$$

$$\begin{aligned} \epsilon(\vec{k} - \vec{q}) &= \frac{k^2}{2m} + \frac{q^2}{2m} - \frac{\vec{k} \cdot \vec{q}}{m} - \frac{k_F^2}{2m} \approx v_F (q - k_F) - \frac{\vec{k} \cdot \vec{q}}{m} \\ &= v_F (q - k_F) - v_F k \cos \theta \end{aligned}$$

onde θ é o ângulo entre $\vec{k}$ e $\vec{q}$. As condições ($\mu \equiv \cos \theta$)

$$|\epsilon(\vec{q})| < \omega_D \Rightarrow |v_F (q - k_F)| < \omega_D$$

$$|\epsilon(\vec{k} - \vec{q})| < \omega_D \Rightarrow |v_F (q - k_F) - v_F k \mu| < \omega_D$$

A integração sobre $\vec{q}$ pode ser escrita ($\xi \equiv v_F (q - k_F)$)

$$\int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} = \int \frac{q^2 dq}{(2\pi)^3} 2\pi d(\cos \theta) \approx \frac{k_F^2}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{-1}^{+1} d\mu \approx \frac{k_F^2}{4\pi^2 v_F} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-1}^{+1} d\mu$$

$$= \frac{m k_F}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-1}^{+1} d\mu = \frac{\rho_0(E_F)}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-1}^{+1} d\mu$$

onde $\rho_0(E_F) \stackrel{m k_F / 2\pi^2}{=} \rho_0(E_F)$ é a densidade de estados na energia de Fermi (por projeção de spin)

Assim:

$$\Theta(k_F - q) \Rightarrow \epsilon(\bar{q}) < 0 \Rightarrow \xi < 0$$

$$\Theta(k_F - |\bar{k} - \bar{q}|) \Rightarrow \epsilon(\bar{k} - \bar{q}) < 0 \Rightarrow \xi - v_F k_\mu < 0$$

que, combinadas com $|\xi| < \omega_D$ e $|\xi - v_F k_\mu| < \omega_D$ nos dão

$$-\omega_D < \xi < 0 \quad \text{e} \quad -\omega_D < \xi - v_F k_\mu < 0 \Rightarrow -\omega_D \leq \xi < v_F k_\mu$$

ou seja, $-\omega_D < \xi < \min(0, v_F k_\mu)$

Analogamente: $\Theta(q - k_F) \Rightarrow \xi > 0$; $\Theta(|\bar{k} - \bar{q}| - k_F) \Rightarrow \xi - v_F k_\mu > 0$

$$\Rightarrow 0 < \xi < \omega_D \quad \text{e} \quad 0 < \xi - v_F k_\mu < \omega_D \Rightarrow v_F k_\mu < \xi \leq \omega_D$$

ou seja, $\max(0, v_F k_\mu) < \xi < \omega_D$

Assim:

$$I(k) = i \frac{\rho_0(E_F)}{2} \left\{ \int_{-1}^{+1} d\mu \int_{-\omega_D}^{\min(0, v_F k_\mu)} d\xi \frac{1}{\omega - 2\xi + v_F k_\mu - i\eta} - \int_{-1}^{+1} d\mu \int_{\max(0, v_F k_\mu)}^{\omega_D} d\xi \frac{1}{\omega - 2\xi + v_F k_\mu + i\eta} \right\}$$

$$= \int_0^1 d\mu \int_{-\omega_D}^0 d\xi + \int_{-1}^0 d\mu \int_{-\omega_D}^{v_F k_\mu} d\xi \frac{1}{\omega - 2\xi + v_F k_\mu - i\eta} -$$

$$- \int_0^1 d\mu \int_{v_F k_\mu}^{\omega_D} d\xi - \int_{-1}^0 d\mu \int_0^{\omega_D} d\xi \frac{1}{\omega - 2\xi + v_F k_\mu + i\eta}$$

A primeira e a quarta integrais dão:

$$\int_0^1 d\mu \int_{-\omega_D}^0 d\xi \left[\frac{1}{\omega - 2\xi + v_F k \mu - i\eta} + (\omega \rightarrow -\omega) \right] =$$

$$= \int_0^1 d\mu \int_0^{\omega_D} d\xi \left[\frac{1}{\omega + 2\xi + v_F k \mu - i\eta} + (\omega \rightarrow -\omega) \right]$$

sinal
menor

segunda e a terceira ficam:

$$= - \int_0^1 d\mu \int_{v_F k \mu}^{\omega_D} d\xi \left[\frac{1}{\omega - 2\xi + v_F k \mu + i\eta} + (\omega \rightarrow -\omega) \right] =$$

$$= \int_0^1 d\mu \int_{v_F k \mu}^{\omega_D} d\xi \left[\frac{1}{\omega + 2\xi - v_F k \mu - i\eta} + (\omega \rightarrow -\omega) \right]$$

Fazendo $\xi \rightarrow \xi + v_F k \mu$ na última integral e fazendo $\omega_D - v_F k \mu \simeq \omega_D$

$$= \int_0^1 d\mu \int_0^{\omega_D} d\xi \left[\frac{1}{\omega + 2\xi + v_F k \mu - i\eta} + (\omega \rightarrow -\omega) \right]$$

que é igual à primeira. Assim:

$$I(k) = i \rho_0(E_F) \int_0^1 d\mu \int_0^{\omega_D} d\xi \left[\frac{1}{\omega + 2\xi + v_F k \mu - i\eta} + (\omega \rightarrow -\omega) \right]$$

Vamos calcular as partes real e imaginária. A parte imaginária é:

$$\pi \int_0^1 d\mu \int_0^{\omega_D} d\xi \delta(\omega + 2\xi + v_F k \mu) + (\omega \rightarrow -\omega)$$

A integração sobre ξ dá' ($2\xi = -v_F k \mu - \omega > 0$):

$$\frac{\pi}{2} \int_0^1 d\mu \, \Theta\left(\frac{|\omega|}{v_F k} - \mu\right) \Theta(-\omega) + (\omega \rightarrow -\omega)$$

$$= \frac{\pi}{2} \Theta(-\omega) \min\left(1, \left|\frac{\omega}{v_F k}\right|\right) + (\omega \rightarrow -\omega) = \boxed{\frac{\pi}{2} \min\left(1, \frac{|\omega|}{v_F k}\right)}$$

A parte real fica: (P = parte principal)

$$P \int_0^1 d\mu \int_0^{\omega_D} d\xi \frac{1}{\omega + 2\xi + v_F k \mu} + (\omega \rightarrow -\omega)$$

$$\Rightarrow P \int_0^1 \frac{d\mu}{2} \ln \left| \frac{\omega + 2\omega_D + v_F k \mu}{\omega + v_F k \mu} \right| \approx -P \int_0^1 \frac{d\mu}{2} \ln \left| \frac{\omega + v_F k \mu}{2\omega_D} \right|$$

Usando que $\int d\mu \ln \left| \frac{\omega + v_F k \mu}{2\omega_D} \right| = \frac{1}{v_F k} \left\{ (\omega + v_F k \mu) \ln \left| \frac{\omega + v_F k \mu}{2\omega_D} \right| - v_F k \mu \right\}$

$$= -\frac{1}{2v_F k} \left\{ (\omega + v_F k) \ln \left| \frac{\omega + v_F k}{2\omega_D} \right| - \omega \ln \left| \frac{\omega}{2\omega_D} \right| - v_F k \right\}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2\omega_D}{\omega + v_F k} \right| + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{v_F k} \right) \ln \left| \frac{\omega}{\omega + v_F k} \right|$$

Somando com $(\omega \rightarrow -\omega)$:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(2\omega_D)^2}{\omega^2 - (v_F k)^2} \right| + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{v_F k} \right) \ln \left| \frac{\omega - v_F k}{\omega + v_F k} \right|$$

$$\Rightarrow \boxed{I(k) = i \beta_0(E_F) \left\{ 1 + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(2\omega_D)^2}{\omega^2 - (v_F k)^2} \right| + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{v_F k} \right) \ln \left| \frac{\omega - v_F k}{\omega + v_F k} \right| + i \frac{\pi}{2} \min\left(1, \frac{|\omega|}{v_F k}\right) \right\}}$$

Particularizando para $\vec{k} = 0 \Rightarrow \vec{p}_1 = -\vec{p}_2$

$$I(k) = i \rho_0(E_F) \left\{ \ln \left| \frac{2\omega_D}{\omega} \right| + i \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$\text{pois } \frac{\omega}{v_F k} \ln \left| \frac{\omega - v_F k}{\omega + v_F k} \right| \xrightarrow{k \rightarrow 0} -2 - \frac{2}{3} \left(\frac{v_F k}{\omega} \right)^2 + O\left(\frac{v_F k}{\omega}\right)^4$$

Vemos que $I(k)$ diverge logaritmicamente quando $\omega \rightarrow 0$. Essa divergência nos leva a ter que resumar a série perturbativa:

$$\Gamma_d = \lambda + i \lambda^2 I(k) - \lambda^3 I^2(k) + \dots$$

$$= \lambda \left[1 + i \lambda I(k) - \lambda^2 I^2(k) \right] = \frac{\lambda}{1 - i \lambda I(k)}$$

ou diagramaticamente:



$$\Gamma_d(k) = \frac{\lambda}{1 + \lambda \rho_0(E_F) \left[\ln \left| \frac{2\omega_D}{\omega} \right| + i \frac{\pi}{2} \right]}$$

Se continuarmos analiticamente o vértice de interação para o plano complexo superior $\omega \rightarrow z$

$$\Gamma_d(z, \vec{k}=\vec{0}) = \frac{\lambda}{1 + \lambda \rho_0(E_F) \left[\ln \left| \frac{2\omega_0}{z} \right| + i \frac{\pi}{2} - i \arg(z) \right]}$$

A expressão acima tem um pólo quando $\lambda < 0$ em:

$$\left. \begin{aligned} |z| &= 2\omega_0 \exp \left[-\frac{1}{\rho_0(E_F) |\lambda|} \right] \\ &\equiv \Omega_c \\ \arg(z) &= \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Pólo em } z_0$$

$$z_0 = i \Omega_c$$

Expandindo em torno do pólo temos:

$$\Gamma_d(z, \vec{k}=\vec{0}) \simeq -\frac{1}{\rho(E_F)} \frac{i \Omega_c}{z - i \Omega_c}$$

Lembremos que o vértice de interação está ligado à função de Green de 2 corpos (que não exploramos muito). Um pólo complexo nessa função de Green sinaliza a formação de estados ligados de 2 partículas e a instabilidade do estado fundamental interagente à formação de um novo estado qualitativamente diferente do estado não interagente. A energia Ω_c é uma medida da energia de ligação do par. E o momento total do par $\vec{k} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$ indica que são dois pares ~~que~~ cuja forma será importante:

$$\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$$

Se $\vec{k} \neq \vec{0}$, pode-se mostrar que o pólo se move. Se $v_F k \ll \Omega_c$:

$$\Gamma(z, \vec{k}) = - \frac{1}{\rho(E_F)} \frac{i \Omega_c}{z - i \left(\Omega_c - \frac{v_F^2 k^2}{6 \Omega_c} \right)}$$

o pólo se move na direção do eixo real

Em $k_{\max}$ dado por:

$$v_F k_{\max} = c \Omega_c$$

O pólo encontra o eixo real e desaparece. Assim, apenas os pares:

$$\vec{p}_1 \cong -\vec{p}_2$$

apresentam tendência ao emparelhamento.

Teoria BCS:

A teoria BCS começa por focalizar um Hamiltoniano efetivo com atrações apenas entre elétrons de momentos e spins opostos. ($\lambda > 0$ abaixo)

$$H = \sum_{\vec{p}, \sigma} \left(\frac{p^2}{2m} \right) a_{\vec{p}, \sigma}^{\dagger} a_{\vec{p}, \sigma} - \frac{\lambda}{V} \sum_{\vec{p}, \vec{p}'} a_{\vec{p}', +}^{\dagger} a_{-\vec{p}', -}^{\dagger} a_{-\vec{p}, -} a_{\vec{p}, +}$$

Como vimos no caso do gás de Fermi diluído imperfeito, para uma interação de curtíssimo alcance como supostamente acima (não há dependência nenhuma com a transferência de momento $\vec{p}' - \vec{p}$), a interação se dá apenas entre férmions de spins opostos

$$(\vec{p}, +) \text{ e } (-\vec{p}, -)$$

por causa da anticomutação dos operadores fermiônicos.

O Hamiltoniano é agora tratado em teoria de campo médio. A derivação crucial é que o "parâmetro de ordem" em questão envolve a criação ou a destruição de um par:

$$a_{-\vec{p}, -} a_{\vec{p}, +} \longrightarrow A_{\vec{p}} + \underbrace{(a_{-\vec{p}, -} a_{\vec{p}, +} - A_{\vec{p}})}_{\text{pequeno} = \delta_{\vec{p}}}$$

O parâmetro de ordem $A_{\vec{p}}$ pode ser encarado como sendo o elemento de matriz:

$$A_{\vec{p}} = \langle N-2 | a_{-\vec{p}, -} a_{\vec{p}, +} | N \rangle_0$$

entre os estados fundamentais de N e $N-2$ partículas!

Fisicamente, o estado interagente $|N\rangle$ se caracteriza pela presença de um número macroscópico de pares de estados $(\vec{p}, +)$ $(-\vec{p}, -)$ simultaneamente ocupados. É o chamado CONDENSADO SUPERCONDUCTOR. Por isso, existe um overlap muito grande entre:

$$a_{-\vec{p}-} a_{\vec{p}+} |N\rangle \approx |N-2\rangle.$$

Vamos proceder com os cálculos. Trabalhando agora com $H - \mu N$ (pois o Hamiltoniano não conservará o número total de partículas!):

$$H = \sum_{\vec{p}\sigma} \epsilon(\vec{p}) a_{\vec{p}\sigma}^{\dagger} a_{\vec{p}\sigma} - \frac{\lambda}{V} \sum_{\vec{p}\vec{p}'} \left[(A_{\vec{p}'}^* + \delta_{\vec{p}'}^*) (A_{\vec{p}} + \delta_{\vec{p}}) \right]$$

$$[] \approx A_{\vec{p}'}^* A_{\vec{p}} + A_{\vec{p}} \delta_{\vec{p}'}^{\dagger} + A_{\vec{p}'}^* \delta_{\vec{p}}$$

$$= A_{\vec{p}'}^* A_{\vec{p}} + A_{\vec{p}} (a_{\vec{p}'}^{\dagger} + a_{-\vec{p}'}^{\dagger} - A_{\vec{p}'}^*) + A_{\vec{p}'}^* (a_{-\vec{p}} - a_{\vec{p}+} - A_{\vec{p}})$$

$$= -A_{\vec{p}'}^* A_{\vec{p}} + A_{\vec{p}} a_{\vec{p}'}^{\dagger} + a_{-\vec{p}'}^{\dagger} + A_{\vec{p}'}^* a_{-\vec{p}} - a_{\vec{p}+}$$

$$\Rightarrow H \approx \sum_{\vec{p}\sigma} \epsilon(\vec{p}) a_{\vec{p}\sigma}^{\dagger} a_{\vec{p}\sigma} - \frac{\lambda}{V} \left[\left(\sum_{\vec{p}} A_{\vec{p}} \right) \sum_{\vec{p}'} a_{\vec{p}'}^{\dagger} + a_{-\vec{p}'}^{\dagger} + \left(\sum_{\vec{p}'} A_{\vec{p}'}^* \right) \sum_{\vec{p}} a_{-\vec{p}} - a_{\vec{p}+} \right]$$

$$- \left(\sum_{\vec{p}'} A_{\vec{p}'}^* \right) \left(\sum_{\vec{p}} A_{\vec{p}} \right) \right]$$

Definindo $\Delta = -\frac{\lambda}{V} \sum_{\vec{p}} A_{\vec{p}}$

$$H = \sum_{\vec{p}\sigma} \epsilon(\vec{p}) a_{\vec{p}\sigma}^{\dagger} a_{\vec{p}\sigma} + \sum_{\vec{p}} \left(\Delta^* a_{-\vec{p}} - a_{\vec{p}+} + \text{H.c.} \right) + \frac{\Delta^2 V}{\lambda}$$

Para diagonalizar esse Hamiltoniano é conveniente introduzir uma notação devida a Nambu e Gor'kov.

Definimos:

*: Infelizmente, eu comecei a usar $A_{\vec{k}}$ para o spinor e para $\langle a_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger a_{\vec{k}\uparrow} \rangle$ e só descobri tarde demais 😞

$$A_{\vec{k}} = \begin{pmatrix} a_{\vec{k}\uparrow} \\ a_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger \end{pmatrix}$$

$$A_{\vec{k}}^\dagger = (a_{\vec{k}\uparrow}^\dagger \ a_{-\vec{k}\downarrow})$$

como um spinor no espaço "partícula-buraco". Esse é um espaço 2×2 que não tem nada a ver com o espaço de spin $\frac{1}{2}$.

Queremos usar as matrizes de Pauli para escrever operadores nesse espaço. Para não confundirmos com o espaço de spin, usaremos as matrizes:

$$\tau_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \tau_1 \quad \tau_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \tau_2 \quad \tau_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \tau_3$$

que, juntamente com a matriz unidade $\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, formam a base completa nesse espaço. Assim, podemos escrever:

$$\begin{aligned} H_0 &= \sum_{\vec{k} \in \text{BZ}} \epsilon(\vec{k}) [a_{\vec{k}\uparrow}^\dagger a_{\vec{k}\uparrow} + a_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger a_{-\vec{k}\downarrow}] \\ &= \sum_{\vec{k} \in \text{BZ}} [\epsilon(\vec{k}) a_{\vec{k}\uparrow}^\dagger a_{\vec{k}\uparrow} + \epsilon(-\vec{k}) a_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger a_{-\vec{k}\downarrow}] \\ &= \sum_{\vec{k} \in \text{BZ}} [\epsilon(\vec{k}) a_{\vec{k}\uparrow}^\dagger a_{\vec{k}\uparrow} - \epsilon(\vec{k}) a_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger a_{-\vec{k}\downarrow} + \epsilon(-\vec{k})] \end{aligned}$$

Se $\epsilon(-\vec{k}) = \epsilon(\vec{k})$ (a que é consequência da invariância por reversão temporal)

$$\Rightarrow H_0 = \sum_{\vec{k} \in \text{BZ}} A_{\vec{k}}^\dagger (\epsilon(\vec{k}) \tau_3) A_{\vec{k}} + \sum_{\vec{k} \in \text{BZ}} \epsilon(\vec{k})$$

Além disso:

$$H_1 = \sum_{\vec{k}} [\Delta^* a_{-\vec{k}} - a_{\vec{k}} + \text{H.c.}]$$

Se $\Delta = \Delta' + i\Delta''$ onde $\Delta', \Delta'' \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow H_1 = \sum_{\vec{k}} A_{\vec{k}}^+ (\Delta' z_1 - \Delta'' z_2) A_{\vec{k}} = \sum_{\vec{k}} A_{\vec{k}}^+ \left[\frac{1}{2} (\Delta z^+ + \Delta^* z^-) \right] A_{\vec{k}}$$

onde, como usual, $z^\pm = z_1 \pm iz_2$. Sem perda de generalidade (esse ponto pode ser melhor esclarecido e é bastante importante) podemos supor $\Delta \in \mathbb{R}$ e

$$H_1 = \sum_{\vec{k}} A_{\vec{k}}^+ (\Delta z_1) A_{\vec{k}}$$

Assim:

$$H = H_0 + H_1 + \frac{V}{\lambda} \Delta^2 = \sum_{\vec{k}} A_{\vec{k}}^+ (\epsilon(\vec{k}) z_3 + \Delta z_1) A_{\vec{k}} + \sum_{\vec{k}} \epsilon(\vec{k}) + \frac{V}{\lambda} \Delta^2$$

Assim, vemos que, para cada valor de $\vec{k}$, podemos diagonalizar H através de uma "rotação" no espaço 2×2 de Nambu-Gorkov (partícula-buraco):

$$\underline{H}_{\vec{k}} = \epsilon z_3 + \Delta z_1 = \begin{pmatrix} \epsilon & \Delta \\ \Delta & -\epsilon \end{pmatrix}$$

Se definirmos: $B_{\vec{k}} = \begin{pmatrix} b_{\vec{k}\uparrow} \\ b_{\vec{k}\downarrow}^+ \end{pmatrix} = \underline{S} \begin{pmatrix} a_{\vec{k}\uparrow} \\ a_{-\vec{k}\downarrow}^+ \end{pmatrix} = \underline{S} A_{\vec{k}}$

$$A_{\vec{k}} = \underline{S}^{-1} B_{\vec{k}}$$

onde:
$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} u_{\vec{k}} & v_{\vec{k}} \\ -v_{\vec{k}} & u_{\vec{k}} \end{pmatrix} \quad \text{com} \quad u_{\vec{k}}^2 = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\epsilon(\vec{k})}{E(\vec{k})} \right]$$

$$v_{\vec{k}}^2 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\epsilon(\vec{k})}{E(\vec{k})} \right]$$

$$\tilde{S}^{-1} = \begin{pmatrix} u_{\vec{k}} & -v_{\vec{k}} \\ +v_{\vec{k}} & u_{\vec{k}} \end{pmatrix} = \tilde{S}^{\dagger}$$

$$E(\vec{k}) = \sqrt{\epsilon(\vec{k})^2 + \Delta^2}$$

$$u_{\vec{k}}^2 + v_{\vec{k}}^2 = 1$$

então:

$$\tilde{S}^{-1} H \tilde{S} = \begin{pmatrix} E(\vec{k}) & 0 \\ 0 & -E(\vec{k}) \end{pmatrix} \equiv \tilde{H}$$

$$H = \sum_{\vec{k}} A_{\vec{k}}^{\dagger} H A_{\vec{k}} + C = \sum_{\vec{k}} B_{\vec{k}}^{\dagger} \tilde{S} H \tilde{S}^{-1} B_{\vec{k}} + C$$

$$= \sum_{\vec{k}} B_{\vec{k}}^{\dagger} \tilde{H} B_{\vec{k}} + C = \sum_{\vec{k}} E(\vec{k}) [b_{\vec{k}\uparrow}^{\dagger} b_{\vec{k}\uparrow} - b_{-\vec{k}\downarrow}^{\dagger} b_{-\vec{k}\downarrow}^{\dagger}] + C$$

$$H = \sum_{\vec{k}\sigma} E(\vec{k}) b_{\vec{k}\sigma}^{\dagger} b_{\vec{k}\sigma} + \sum_{\vec{k}} [\epsilon(\vec{k}) - E(\vec{k})] + \frac{V}{\lambda} \Delta^2$$

Note que:

$$\left. \begin{aligned} b_{\vec{k}\uparrow} &= u_{\vec{k}} a_{\vec{k}\uparrow} + v_{\vec{k}} a_{-\vec{k}\downarrow}^{\dagger} \\ b_{-\vec{k}\downarrow}^{\dagger} &= -v_{\vec{k}} a_{\vec{k}\uparrow} + u_{\vec{k}} a_{-\vec{k}\downarrow}^{\dagger} \end{aligned} \right\} \text{Transformação de Bogoliubov fermiônica}$$

e que os operadores $b_{\vec{k}\sigma}^{\dagger}$ são férmions ~~legítimos~~ legítimos.

$$\{b_{\vec{k}\sigma}, b_{\vec{p}\sigma'}^{\dagger}\} = \delta_{\sigma\sigma'} \delta_{\vec{k},\vec{p}}$$

$b_{\vec{k}\sigma}^{\dagger}$ cria uma "quasi-partícula", na linguagem usual.

O estado fundamental do sistema tem

$$b_{\vec{k}\sigma}^+ b_{\vec{k}\sigma} = 0 \quad \forall \vec{k}, \sigma$$

$$\Rightarrow E_0 = \sum_{\vec{k}} [\epsilon(\vec{k}) - E(\vec{k})] + \frac{V}{\lambda} \Delta^2$$

A excitação do sistema corresponde a ocupar os níveis de quasipartículas, que têm energia:

$$E(\vec{k}) = \sqrt{(\epsilon(\vec{k}))^2 + \Delta^2} = \sqrt{\left[\frac{k^2}{2m} - \mu\right]^2 + \Delta^2}$$

para o caso de férmions livres. No caso de haver uma estrutura de bandas, fazemos $\frac{k^2}{2m} \rightarrow \epsilon(\vec{k})$. A menor energia

de excitação corresponde a $k = k_F$ onde.

$E(k_F) = \Delta > 0 \Rightarrow$ Há um "gap" de excitação entre o estado fundamental e o primeiro estado excitado.

O gap corresponde a quebrar um par do condensado, cuja energia de ligação é Δ .

Vamos agora calcular o gap supercondutor.

Sabemos que:

$$A_{\vec{k}} = \langle a_{-\vec{k}\downarrow} a_{\vec{k}\uparrow} \rangle$$

$$\text{Mas: } a_{-\vec{k}\downarrow} = u_{\vec{k}} b_{\vec{k}\uparrow}^+ + v_{\vec{k}} b_{-\vec{k}\downarrow} \text{ e } a_{\vec{k}\uparrow} = u_{\vec{k}} b_{\vec{k}\uparrow} - v_{\vec{k}} b_{-\vec{k}\downarrow}^+$$

$$\Rightarrow A_{\vec{k}} = u_{\vec{k}} v_{\vec{k}} \langle b_{\vec{k}\uparrow}^+ b_{\vec{k}\uparrow} + b_{-\vec{k}\downarrow}^+ b_{-\vec{k}\downarrow} \rangle - u_{\vec{k}} v_{\vec{k}}$$

já que os termos $\langle b_{\vec{k}\uparrow}^+ b_{-\vec{k}\downarrow}^+ \rangle$ e $\langle b_{-\vec{k}\downarrow} b_{\vec{k}\uparrow} \rangle$ são nulos.

Assim: (usando que $u_{\vec{k}} = u_{-\vec{k}}$ e $v_{\vec{k}} = v_{-\vec{k}}$)

$$\Delta = -\frac{\lambda}{V} \sum_{\vec{k}} A_{\vec{k}} = -\frac{\lambda}{V} \sum_{\vec{k}} u_{\vec{k}} v_{\vec{k}} \left[\underbrace{\sum_{\sigma} \langle b_{\vec{k}\sigma}^{\dagger} b_{\vec{k}\sigma} \rangle - 1}_{f(E(\vec{k}))} \right]$$

onde $f(x) = \frac{1}{e^{\beta x} + 1}$ é a distribuição de Fermi-Dirac.

Como $2f(x) - 1 = -\tanh\left(\frac{\beta x}{2}\right)$ e $u_{\vec{k}} v_{\vec{k}} = \frac{\Delta}{2E(\vec{k})}$

$$\Delta = \frac{\lambda}{V} \frac{\Delta}{2} \sum_{\vec{k}} \frac{\tanh\left(\frac{\beta E(\vec{k})}{2}\right)}{E(\vec{k})}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\lambda} = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\tanh\left(\frac{\beta}{2} E(\vec{k})\right)}{E(\vec{k})} \Theta(\omega_D - |E(\vec{k})|)$$

onde reintroduzimos a condição sobre a energia $E(\vec{k})$ para que a interação seja atrativa. ~~Como~~ Como o integrando só depende de $E(\vec{k})$:

$$\frac{2}{\lambda} = \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{\rho_0(\epsilon) d\epsilon}{\sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2}} \tanh\left[\frac{\beta}{2} \sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2}\right]$$

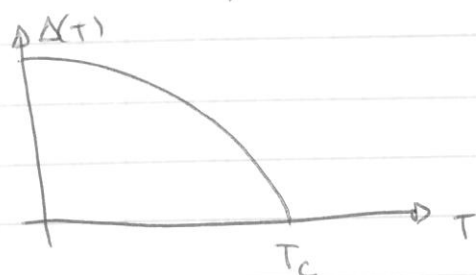
A densidade de estados varia pouco na escala de ω_D , portanto podemos tomá-la como constante e igual ao seu valor na superfície de Fermi: ($\rho_0 = \rho(E_F)$)

$$\boxed{\frac{1}{\rho_0 \lambda} = \int_0^{\omega_D} \frac{d\epsilon}{\sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2(T)}} \tanh\left[\frac{\beta}{2} \sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2(T)}\right]}$$

"Equação do gap supercondutor"

onde explicitamos que Δ é função da temperatura

O comportamento do gap é:



Podemos calculá-lo a $T=0$: $\Delta(T) = \Delta_0$.

$$\frac{1}{\beta_0 \lambda} = \int_0^{\omega_D} \frac{d\epsilon}{\sqrt{\epsilon^2 + \Delta_0^2}} = \sinh^{-1} \left(\frac{\omega_D}{\Delta_0} \right) \Rightarrow \Delta_0 = \frac{\omega_D}{\sinh(\frac{1}{\beta_0 \lambda})}$$

$$\text{Se } \beta_0 \lambda \ll 1 \Rightarrow \boxed{\Delta_0 \approx 2\omega_D e^{-\frac{1}{\beta_0 \lambda}}}$$

Até $T \rightarrow T_c$, $\Delta(T) \rightarrow 0$. Assim, podemos calcular T_c :

$$\frac{1}{\beta_0 \lambda} = \int_0^{\omega_D} \frac{d\epsilon}{\epsilon} \tanh\left(\frac{\beta_c \epsilon}{2}\right) = \int_0^{\beta_c \omega_D} \frac{dx}{x} \tanh\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\int \frac{dx}{x} \tanh\left(\frac{x}{2}\right) = \ln x \tanh\left(\frac{x}{2}\right) \Big|_0^\wedge - \frac{1}{2} \int_0^\wedge \frac{dx \ln x}{\cosh^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Como veremos, se $\lambda \beta_0 \ll 1$, $\omega_D \gg T_c \Rightarrow \beta_c \omega_D \gg 1$. Assim:

$$\frac{1}{\beta_0 \lambda} \approx \ln(\beta \omega_D) - \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dx \ln x}{\cosh^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \ln(\beta \omega_D) - \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) + \gamma = \ln\left(\frac{2e^\gamma \omega_D}{\pi T_c}\right)$$

onde $\gamma = 0.577$ = Constante de Euler

$$\Rightarrow \boxed{T_c \approx \left(\frac{2e^\gamma}{\pi}\right) \omega_D e^{-\frac{1}{\beta_0 \lambda}} = \frac{e^\gamma}{\pi} \Delta(0) = 0.57 \Delta_0}$$

Cálculo do calor específico

Como vimos, o estado BCS é caracterizado pela ocupação térmica dos níveis de energia dados por:

$$E(\vec{k}) = [(\hbar^2 k^2 / 2m - \mu)^2 + \Delta^2(T)]^{1/2}$$

segundo a distribuição de Fermi-Dirac. O "gap" supercondutor é uma função da temperatura T dada implicitamente por:

$$\frac{1}{g_0 \lambda} = \int_0^{\omega_D} \frac{dE}{\sqrt{E^2 + \Delta^2(T)}} \tanh \left[\frac{\sqrt{E^2 + \Delta^2(T)}}{2T} \right].$$

A distribuição de Fermi-Dirac nos dá a ocupação média do nível $\vec{k}$:

$$\langle n_{\vec{k}} \rangle = \langle b_{\vec{k}\sigma}^\dagger b_{\vec{k}\sigma} \rangle = f(E(\vec{k})) = \frac{1}{e^{\beta E_{\vec{k}}} + 1}$$

Como cada nível $\vec{k}$ (com projeção de spin σ) pode ter ocupação 0 ou 1, segue que:

$$\langle n_{\vec{k}} \rangle = 1 \times P_{\vec{k}}^1 + 0 \times P_{\vec{k}}^0 = P_{\vec{k}}^1$$

onde $P_{\vec{k}}^1$ é a probabilidade do nível estar ocupado e $P_{\vec{k}}^0$ é a probabilidade dele estar vazio. Obviamente

$$P_{\vec{k}}^1 + P_{\vec{k}}^0 = 1$$

A saber:

$$P_{\vec{k}}^1 = f[E(\vec{k})] \quad \text{e} \quad P_{\vec{k}}^0 = 1 - f[E(\vec{k})] = 1 - P_{\vec{k}}^1$$

A entropia total do sistema é dada por

$$S(T) = -k_B \sum_i P_i \ln P_i$$

onde P_i é a probabilidade do sistema estar no estado i . Portanto, no estado BCS (fazendo $k_B = 1$, como de hábito) :

$$S(T) = -2 \sum_{\vec{k}} \left[P_{\vec{k}}^0 \ln P_{\vec{k}}^0 + P_{\vec{k}}^1 \ln P_{\vec{k}}^1 \right]$$

onde o fator de 2 vem da degenerescência de spin. Logo: $[f(E_{\vec{k}}) \equiv f_{\vec{k}}]$

$$S(T) = -2 \sum_{\vec{k}} \left[f_{\vec{k}} \ln f_{\vec{k}} + (1 - f_{\vec{k}}) \ln (1 - f_{\vec{k}}) \right]$$

O calor específico a volume constante pode ser obtido de:

$$C_V(T) = T \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_{V, \mu} = - \beta \left. \frac{\partial S}{\partial \beta} \right|_{V, \mu}$$

Mas cuidado. A derivada em relação a T (ou a β) tem contribuição explícita, pois $f(E_{\vec{k}})$ depende explicitamente de β , e implícita pois Δ depende da temperatura. Portanto

$$C_V(T) = 2\beta \sum_{\vec{k}} \left[\ln f_{\vec{k}} + 1 - \ln(1 - f_{\vec{k}}) - 1 \right] \frac{\partial f_{\vec{k}}}{\partial \beta}$$

$$C_V(T) = 2\beta \sum_{\vec{k}} \ln \left(\frac{f_{\vec{k}}}{1 - f_{\vec{k}}} \right) \frac{\partial f}{\partial x} \bigg|_{x=\beta E_{\vec{k}}} \frac{\partial (\beta E_{\vec{k}})}{\partial \beta}$$

onde $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{e^x + 1} \right] = - \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$

Além disso:

$$1 - f_{\vec{k}} = 1 - \frac{1}{e^{\beta E_{\vec{k}} + 1}} = \frac{e^{\beta E_{\vec{k}}}}{e^{\beta E_{\vec{k}}} + 1}$$

$$\frac{f_{\vec{k}}}{1 - f_{\vec{k}}} = e^{-\beta E_{\vec{k}}} \Rightarrow \ln\left(\frac{f_{\vec{k}}}{1 - f_{\vec{k}}}\right) = -\beta E_{\vec{k}}$$

$$\frac{\partial(\beta E_{\vec{k}})}{\partial \beta} = E_{\vec{k}} + \beta \frac{\partial E_{\vec{k}}}{\partial \beta} = E_{\vec{k}} + \frac{\beta}{E_{\vec{k}}} \Delta \frac{\partial \Delta}{\partial \beta}$$

Juntando tudo:

$$C_V(T) = +2\beta^2 \sum_{\vec{k}} E_{\vec{k}} \left[\frac{e^{\beta E_{\vec{k}}}}{(e^{\beta E_{\vec{k}}} + 1)^2} \right] \left[E_{\vec{k}} + \frac{\Delta}{E_{\vec{k}}} \beta \frac{\partial \Delta}{\partial \beta} \right]$$

~~Fazendo~~ Fazendo agora $\sum_{\vec{k}} = V \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} = \int \rho_0(\epsilon) d\epsilon$, obtemos

o calor específico:

$$C_V(T) = 2\beta^2 \int \rho_0(\epsilon) d\epsilon E(\epsilon) \left[\frac{e^{\beta E(\epsilon)}}{(e^{\beta E(\epsilon)} + 1)^2} \right] \left[E(\epsilon) + \frac{\Delta}{E(\epsilon)} \beta \frac{\partial \Delta}{\partial \beta} \right]$$

onde $E(\epsilon) = \sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2(T)}$. Essa expressão tem que ser calculada numericamente. Entretanto, quando $T \rightarrow T_c$, o 1º termo tende a:

$$C_V^{(1)}(T) \approx 2\beta_c^2 \rho_0 \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \epsilon^2 \frac{e^{\beta_c \epsilon}}{(e^{\beta_c \epsilon} + 1)^2} = 2\rho_0 T_c \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x^2}{(e^x + 1)(e^{-x} + 1)}$$

De Ashcroft e Mermin (Apêndice C) a integral é $\pi^2/3$.

$$C_V^{(1)}(T_c) \approx \frac{2\pi^2}{3} \rho_0 T_c$$

que é o valor obtido para o gás ideal de férmions em 3D. Portanto, corresponde ao calor específico no

estado normal. O segundo termo, entretanto, é descontínuo em T_c , pois $\Delta = 0$ se $T > T_c$ e

$$\begin{aligned}\Delta C_V^{(2)}(T_c) &\approx 2\beta_c^2 \Delta \beta_0 \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \frac{e^{\beta_c \epsilon}}{(e^{\beta_c \epsilon} + 1)^2} \beta_c \frac{\partial \Delta}{\partial \beta_0} \Big|_{\beta = \beta_c} \\ &= -2\beta_c \beta_0 \Delta \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \frac{e^{\beta_c \epsilon}}{(e^{\beta_c \epsilon} + 1)^2} \frac{\partial \Delta}{\partial T} \Big|_{T=T_c} \\ &= -\beta_0 \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} \frac{\partial \Delta^2}{\partial T} \Big|_{T=T_c}\end{aligned}$$

A integral acima é:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{(-1)}{e^x + 1} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0 - (-1) = 1$$

$$\Delta C_V^{(2)}(T_c) = -\beta_0 \frac{\partial \Delta^2}{\partial T} \Big|_{T=T_c}$$

Assim, precisamos do comportamento do "gap" quando $T \rightarrow T_c$. Pode-se mostrar que:

$$\Delta^2(T) \approx T_c^2 \frac{8\pi^2}{7\zeta(3)} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)$$

(ver Landau, "Statistical Physics", part 2, § Sec. 40) onde $\zeta(x)$ é a função zeta de Riemann. Logo:

$$-\frac{\partial \Delta^2}{\partial T} \Big|_{T=T_c} = \frac{8\pi^2}{7\zeta(3)} T_c$$

$$\Rightarrow \Delta C_V^{(2)}(T_c) = \frac{8\pi^2}{7\zeta(3)} \beta_0 T_c$$

Finalmente, a previsão BCS para a razão entre o salto do calor específico e o seu valor no estado normal em T_c é:

$$\frac{\Delta C_v(T_c)}{C_n(T_c)} = \frac{\Delta C_v^{(2)}(T_c)}{C_v^{(1)}(T_c)} = \frac{8\pi^2}{75(3)} \frac{3}{2\pi^2} = \frac{12}{75(3)} \approx 1.43.$$

Este valor é bem próximo dos valores observados nos supercondutores clássicos.

Efeito Meissner

O efeito Meissner foi explicado fenomenologicamente pelos irmãos London (F. e H. London) em 1935, que notaram que, se assumíssemos:

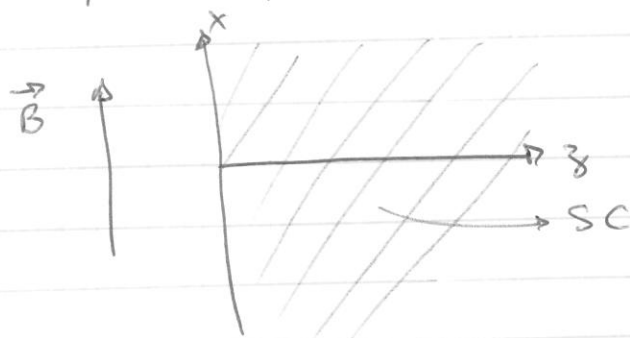
$$\nabla \times \vec{j} = -\frac{1}{c} \nabla^2 \vec{B}$$

então, da equação de Ampère - Maxwell estática:

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \frac{4\pi}{c} \nabla \times \vec{j} = -\frac{4\pi}{c} \nabla^2 \vec{B}$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla^2 \vec{B} = -\frac{4\pi}{c} \nabla \times \vec{j}} \quad (\text{usando } \nabla \cdot \vec{B} = 0)$$

Se supusermos um semi-espaço^{SC} infinito em $z > 0$ com um campo $\vec{B}$ aplicado (uniforme) para $z < 0$:



$$\vec{B} = B_0 \hat{x} \quad \text{re } z < 0$$

então, como a variação se dá, por simetria, apenas com

$$\frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} = -\frac{4\pi}{c} B_x \Rightarrow B_x = B_0 e^{-z/\lambda} \quad z > 0$$

$$\text{onde } \lambda^2 = \frac{c}{4\pi n} \Rightarrow \lambda = \text{comprimento de penetração no SC}$$

Assim, $\vec{B}$ decai exponencialmente dentro do SC e só é não nulo numa (fina) camada de espessura λ .

A equação de London pode ser obtida, no gauge $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, através de:

$$\boxed{\vec{j} = -\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{A}} \quad \text{"Equação de London"}$$

Assim, podemos obter o efeito Meissner a partir da Equação de London. No espaço de Fourier temos:

$$\vec{j}(\vec{k}) = -\frac{1}{\mu} \vec{k} \times \vec{A}(\vec{k}) \quad \text{onde} \quad \vec{k} \cdot \vec{A}(\vec{k}) = 0$$

A relação acima é válida quando $\vec{k} \rightarrow 0$; quando $k \gg \frac{T_c}{v_F}$ ela tem que ser modificada. Vamos simplificar a

discussão e assumir $\vec{k} = \vec{0}$ e calcular a corrente no SC com a aplicação de um ^{potencial} vetor $\vec{A}(\vec{0})$

A introdução de $\vec{A}$ é feita através do acoplamento mínimo: ($e > 0$)

$$\frac{\vec{\nabla}}{i} \rightarrow \frac{\vec{\nabla}}{i} + \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{0}) \rightarrow \vec{k} + \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{0})$$

$$\epsilon(\vec{k}) = \frac{k^2}{2m} - \mu \rightarrow \epsilon(\vec{k}) + \frac{e}{mc} \vec{A} \cdot \vec{k} + \frac{e^2}{2mc^2} \vec{A}^2$$

$$\vec{j} = -\frac{e}{m} \frac{\vec{\nabla}}{i} \rightarrow -\frac{e}{m} \left(\frac{\vec{\nabla}}{i} + \frac{e}{c} \vec{A} \right) \rightarrow -\frac{e}{m} \vec{k} - \frac{e^2}{mc} \vec{A}$$

Na notação de Nambu:

$$\epsilon(\vec{k}) \tau_3 \rightarrow \epsilon(\vec{k}) \tau_3 + \frac{e}{mc} \vec{A} \cdot \vec{k} + \frac{e^2}{2mc^2} \vec{A}^2 \tau_3$$

$$\vec{j} \rightarrow -\frac{e}{m} \vec{k} - \frac{e^2}{mc} \vec{A} \tau_3$$

já que $\vec{k}$ é ímpar sob a inversão ($\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$). Assim

$$H \rightarrow H = \sum_{\vec{k}} A_{\vec{k}}^{\dagger} \left[\epsilon(\vec{k}) \tau_3 + \frac{e}{mc} \vec{A} \cdot \vec{k} + \frac{e^2}{2mc^2} \vec{A}^2 \tau_3 + \Delta \tau_1 \right] A_{\vec{k}} + \frac{V}{\lambda} \Delta^2$$

$$\begin{aligned} V \langle j_i \rangle &= \sum_{\vec{k}} \langle A_{\vec{k}}^{\dagger} \left(-\frac{e}{m} k_i - \frac{e^2}{mc} A_i \tau_3 \right) A_{\vec{k}} \rangle \\ &= -\frac{e}{m} \sum_{\vec{k}} k_i \langle A_{\vec{k}}^{\dagger} A_{\vec{k}} \rangle - \frac{e^2}{mc} A_i \sum_{\vec{k}} \langle A_{\vec{k}}^{\dagger} \tau_3 A_{\vec{k}} \rangle \end{aligned}$$

~~Se~~ Vamos calcular $\langle j_i \rangle$ em primeira ordem em $\vec{A}$. O segundo termo já é de primeira ordem em $\vec{A}$. Portanto, o valor médio

$$\langle A_{\vec{k}}^{\dagger} \tau_3 A_{\vec{k}} \rangle$$

pode ser calculado no sistema não perturbado por $\vec{A}$. Já o 1º termo tem que ser calculado em resposta linear a $\vec{A}$. Para isso, podemos desprezar o termo em $\vec{A}^2$ no Hamiltoniano. Portanto, a perturbação é:

$$H_{\text{ext}} = \frac{e}{mc} \sum_{\vec{k}} A_j k_j A_{\vec{k}}^{\dagger} A_{\vec{k}}$$

e queremos:

$$\langle j_i^p \rangle = -\frac{e}{mV} \sum_{\vec{k}} k_i \langle A_{\vec{k}}^{\dagger} A_{\vec{k}} \rangle$$

É fácil ver que $\sum_{\vec{k}} \langle A_{\vec{k}}^{\dagger} \tau_3 A_{\vec{k}} \rangle = \sum_{\vec{k} \in \text{FS}} a_{\vec{k}0}^{\dagger} a_{\vec{k}0} = N = \text{número total de elétrons}$

$$\Rightarrow \langle j_i^d \rangle = -\frac{e^2}{mcV} A_i \sum_{\vec{k}} \langle A_{\vec{k}}^{\dagger} \tau_3 A_{\vec{k}} \rangle = -\frac{N e^2}{mcV} A_i$$

Note que a perturbação é proporcional à matriz unidade no espaço de Nambu. Logo, ela não altera a diagonalização de H :

$$H = \sum_{\vec{k}} B_{\vec{k}}^+ \left[\hbar \vec{k} + \delta E \underline{1} \right] B_{\vec{k}} \quad \delta E = \frac{e}{mc} A_j k_j$$

$$= \sum_{\vec{k}} \left\{ E(\vec{k}) + \delta E(\vec{k}) \right\} b_{\vec{k}\sigma}^+ b_{\vec{k}\sigma}$$

Assim:

$$\begin{aligned} V \langle j_i^p \rangle &= - \frac{e}{m} \sum_{\vec{k}} k_i \langle A_{\vec{k}}^+ A_{\vec{k}} \rangle = - \frac{e}{m} \sum_{\vec{k}} k_i \langle B_{\vec{k}}^+ B_{\vec{k}} \rangle \\ &= - \frac{e}{m} \sum_{\vec{k}\sigma} k_i \langle b_{\vec{k}\sigma}^+ b_{\vec{k}\sigma} \rangle = - \frac{e}{m} \sum_{\vec{k}\sigma} k_i f(E(\vec{k}) + \delta E(\vec{k})) \end{aligned}$$

Expandindo em $\delta E(\vec{k}) \propto O(\vec{A})$

$$\begin{aligned} V \langle j_i^p \rangle &= V \langle j_i^p \rangle (\vec{A} = \vec{0}) - \frac{e}{m} \sum_{\vec{k}\sigma} k_i \delta E(\vec{k}) f'(E(\vec{k})) \\ &= - \frac{e^2}{m^2 c} A_j \sum_{\vec{k}\sigma} k_i k_j f'(E(\vec{k})) \end{aligned}$$

$$\text{Assim: } \langle j_i \rangle = \langle j_i^p \rangle + \langle j_i^a \rangle = - \frac{Ne^2}{mcV} \left[\delta_{ij} + \frac{1}{Nm} \sum_{\vec{k}\sigma} k_i k_j f'(E) \right]$$

Por simetria, $\sum_{\vec{k}\sigma} k_i k_j f'(E) = \delta_{ij} \sum_{\vec{k}\sigma} k_i^2 f'(E) = \frac{\delta_{ij}}{3} \sum_{\vec{k}\sigma} k^2 f'(E) =$

$$= \frac{2}{3} \delta_{ij} \sum_{\vec{k}} k^2 f'(E) = \frac{4\pi m V}{3} \delta_{ij} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left(\frac{k^2}{2m} \right) f'(E(\vec{k})) = (*)$$

A integral acima só depende de valores próximos a k_F . Assim:

$$(*) = \frac{4}{3} m V \delta_{ij} E_F \int dE f'(E(E)) \quad \text{Mas } E_F \rho_0 = \frac{k_F^2}{2m} \frac{mk_F}{2\pi^2} = \frac{k_F^3}{4\pi^2} = \frac{3}{4} \frac{1}{V}$$

Logo:

$$\langle \vec{j} \rangle = - \frac{N_s e^2}{m c V} \vec{A} ; N_s(T) = \frac{N}{V} \left[1 + \frac{4}{3} \frac{m V}{\hbar^2} \frac{3}{4} \frac{N}{V} \int d\epsilon f'(\epsilon) \right]$$

$$N_s(T) = N \left[1 + \int d\epsilon f'(\epsilon) \right]$$

$$\lambda^{-2} = \frac{4\pi\Gamma}{c} = + \frac{4\pi N_s(T) e^2}{m c^2 V} = \frac{4\pi m_s(T) e^2}{m c^2}$$

Quando $T \rightarrow 0$: $f'(x) \rightarrow -\delta(x)$ e $\int d\epsilon \delta[\sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2}] = 0$

$$\Rightarrow N_s(T) \rightarrow n = \frac{N}{V} \text{ e } \lambda^{-2} \rightarrow \frac{\omega_p^2}{c^2} \Rightarrow \boxed{\lambda(T=0) = \frac{c}{\omega_p}}$$

Quando $T \rightarrow T_c$; $\Delta \rightarrow 0$ e $\int d\epsilon f'(\epsilon) \rightarrow \int d\epsilon f'(\epsilon) = f(\epsilon) \Big|_{-\infty}^{\infty} = -1$

e $N_s(T) \rightarrow 0$ $\lambda(T \rightarrow T_c) \rightarrow \infty \Rightarrow$ não há mais efeito Meissner

