

II. O GÁS DILUÍDO IMPERFEITO

Outro modelo de interesse consiste em supormos um gás diluído de férmions, cuja interação seja de CURTO ALCANCE, de forma que o estado líquido não seja instável à solidificação. Esse modelo é de maior interesse pela aplicação das técnicas de muitos corpos do que por ser realista. Tanto ^3He líquido quanto a matéria nuclear, possíveis candidatos a serem descritos por esse modelo são densos demais. Além disso, os cálculos a serem feitos ilustram uma realização da chamada teoria dos líquidos de Fermi de Landau, que é um dos pilares da teoria de matéria condensada.

O Hamiltoniano do sistema é:

$$H = \sum_{\vec{k}, \sigma} \frac{k^2}{2m} a_{\vec{k}, \sigma}^\dagger a_{\vec{k}, \sigma} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{\vec{k}_1, \vec{k}_2 \\ \sigma_1, \sigma_2}} \overline{a_{\vec{k}_1, \sigma_1}^\dagger} \overline{a_{\vec{k}_2, \sigma_2}^\dagger} a_{\vec{k}_2, \sigma_2} a_{\vec{k}_1, \sigma_1} \times$$

$$\times \langle \vec{k}_1, \vec{k}_2 | U | \vec{k}, \vec{k}_2 \rangle \delta_{\vec{k}_1 + \vec{k}_2, \vec{k} + \vec{k}_2}$$

Como vamos supor que o gás é diluído ele se caracterizará por um valor pequeno de $k_F \sim \left(\frac{N}{V}\right)^{1/3}$.
A questão é: Pequeno em relação a quê?

A resposta a essa pergunta é crucial para a solução perturbativa do problema. A resposta é que o potencial U de interação é parametrizado para ~~para~~ pequenos vetores de onda de espalhamento $\vec{k}$ por uma única quantidade, o "comprimento de espalhamento" a :

$$\delta_\ell(k) \sim - (ka)^{2\ell+1}$$

(Suponhamos que o potencial é puramente repulsivo sem nenhum estado ligado e esfericamente simétrico). Além disso, quando $k \rightarrow 0$, só a onda parcial s é importante:

$$\delta_0(k) \sim -ka$$

Portanto, o parâmetro pequeno de expansão perturbativa é:

$$ka \ll 1$$

Note que o potencial U pode ser forte, desde que o critério acima seja satisfeito.

Suponhamos agora que usamos um outro potencial U_{AUX} tal que o ~~o~~ parâmetro ~~o~~ a_{AUX} seja o mesmo que o de U

$$a = a_{AUX}$$

mas tal que se possa fazer teoria de perturbações em U_{AUX} . Como as propriedades de espalhamento só dependem de a , obteremos as mesmas propriedades físicas usando U_{AUX} ao invés de U .

Como os momentos são pequenos podemos fazer

$$\begin{aligned} \langle \vec{k}_1, \vec{k}_2 | U_{AUX} | \vec{k}_1, \vec{k}_2 \rangle &\approx \langle \vec{0}, \vec{0} | U_{AUX} | \vec{0}, \vec{0} \rangle = \int \frac{d^3 r}{V} U_{AUX}(r) \\ &\equiv \frac{U_0}{V} \end{aligned}$$

O Hamiltoniano se torna: (Omitimos a função delta $\delta_{\vec{k}_1 + \vec{k}_2, \vec{k}'_1 + \vec{k}'_2}$)

$$H = \hat{T} + \frac{U_0}{2V} \sum_{\substack{\vec{k}_1, \vec{k}_2 \\ \vec{k}'_1, \vec{k}'_2 \\ \sigma_1, \sigma_2}} a_{\vec{k}_1, \sigma_1}^\dagger a_{\vec{k}'_1, \sigma_1}^\dagger a_{\vec{k}_2, \sigma_2} a_{\vec{k}'_2, \sigma_2}$$

Além disso, devemos ter $\sigma_1 \neq \sigma_2$, pois, se $\sigma_1 = \sigma_2$ a soma

$$\sum_{\substack{\vec{k}_1, \vec{k}_2 \\ \sigma_1}} a_{\vec{k}_2, \sigma_1}^\dagger a_{\vec{k}_1, \sigma_1}^\dagger = - \sum_{\substack{\vec{k}_1, \vec{k}_2 \\ \sigma_1}} a_{\vec{k}_1, \sigma_1} a_{\vec{k}_2, \sigma_1} = - \sum_{\substack{\vec{k}_1, \vec{k}_2 \\ \sigma_1}} a_{\vec{k}_2, \sigma_1} a_{\vec{k}_1, \sigma_1}$$

$\Rightarrow$ igual a zero (trocas $\vec{k}_1 \leftrightarrow \vec{k}_2$ na última igualdade)

Fisicamente, isso ocorre porque, para ondas s , $l=0$ e a função de onda de spin s tem que ser anti-simétrica ($s=0$). Fisicamente

$$H = \hat{T} + \frac{U_0}{2V} \sum_{\substack{\vec{k}_1, \vec{k}_2 \\ \vec{k}_1', \vec{k}_2' \\ \sigma_1}} a_{\vec{k}_1, \sigma_1}^+ a_{\vec{k}_2, \sigma_1}^+ a_{\vec{k}_2, -\sigma_1} a_{\vec{k}_1, \sigma_1}$$

$$H = \hat{T} + \frac{U_0}{V} \sum_{\substack{\vec{k}_1, \vec{k}_2 \\ \vec{k}_1', \vec{k}_2'}} a_{\vec{k}_1, +}^+ a_{\vec{k}_2, -}^+ a_{\vec{k}_2, -} a_{\vec{k}_1, +}$$

~~Vamos agora calcular a~~

Vamos calcular a correção de 1ª ordem, devido à interação, para a energia do estado fundamental. O cálculo é trivial:

$$\langle \hat{V} \rangle_0 = \frac{U_0}{V} \sum_{\substack{\vec{k}_1', \vec{k}_2' \\ \vec{k}_1, \vec{k}_2}} \langle a_{\vec{k}_1, +}^+ a_{\vec{k}_2, -}^+ a_{\vec{k}_2, -} a_{\vec{k}_1, +} \rangle$$

$$= \frac{U_0}{V} \sum_{\substack{\vec{k}_1, \vec{k}_2 \\ \vec{k}_1', \vec{k}_2'}} \delta_{\vec{k}_1, \vec{k}_1'} \delta_{\vec{k}_2, \vec{k}_2'} \langle a_{\vec{k}_1, +}^+ a_{\vec{k}_1, +} a_{\vec{k}_2, -}^+ a_{\vec{k}_2, -} \rangle$$

$$= \frac{U_0}{V} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2} n_{\vec{k}_1, +} n_{\vec{k}_2, -}$$

Note que a expressão acima é válida também para estados excitados do sistema.

No estado fundamental:

$$\sum_{\vec{k}} n_{\vec{k}\sigma} = N_{\sigma} = \frac{N}{2}$$

$$\Rightarrow \langle \hat{V} \rangle_0 = \frac{U_0}{V} \frac{N^2}{4} = N \frac{U_0}{4} \frac{k_F^3}{3\pi^2}$$

Devemos agora expressar a resposta em função do comprimento de espalhamento a . Em 1ª ordem em U_{AUX} : ($\hbar=1$)

$$a = \frac{m U_0}{4\pi}$$

$$\Rightarrow \frac{\langle \hat{V} \rangle_0}{N} = \frac{\pi a}{m} \frac{k_F^3}{3\pi^2} = \frac{k_F^2}{3\pi m} (k_F a)$$

$$\text{Como } \frac{\langle \hat{T} \rangle_0}{N} = \frac{3}{5} \frac{k_F^2}{2m}$$

$$\Rightarrow \frac{\langle \hat{T} + \hat{V} \rangle_0}{N} = \frac{3}{5} \frac{k_F^2}{2m} + \frac{k_F^2}{3\pi m} (k_F a) = \frac{3}{5} \frac{k_F^2}{2m} \left[1 + \frac{10}{3\pi} (k_F a) \right]$$

O que demonstra que o parâmetro $(k_F a)$ é um bom parâmetro de perturbação. Em ordem superiores:

$$\frac{E_0}{N} = \frac{3}{5} \frac{k_F^2}{2m} \left[1 + \frac{10}{3\pi} (k_F a) + \frac{4(11-2\pi^2)}{21\pi^2} (k_F a)^2 + 0.38 (k_F a)^3 + \dots \right]$$