Transformações canônicas

O método de transformações canônicas tem um papel importante numa série de sistemas, entre eles, sistemas superfluidos e supercondutores. Vamos ilustrá-lo em um sistema bosônico diluído (superfluido) que foi uma de suas primeiras aplicações.

O problema principal de se tratarem sistemas bosônicos interagentes provém da existência de um "condensado", ou seja, da ocupação de um dos estados do sistema por um número macroscópico de partículas: no limite termodinâmico ($N \to +\infty$, $V \to +\infty$, $N/V = $ const.) uma fração N_c de N ocupa um dos estados de uma partícula e N_c também tende a $+\infty$ quando $N \to +\infty$. O estado ocupado no equilíbrio é geralmente o estado de $\vec{k}=0$. Tal situação, obviamente, não acontece em sistemas fermiônicos (Há, no entanto, em supercondutores e ^3He um outro tipo de condensado). É preciso, portanto, modificar o tratamento usual para se lidar com a presença do condensado.

A presença do condensado já se manifesta no sistema bosônico NÃO-INTERAGENTE. O estado fundamental deste sistema é escrito como:

$$|\Phi_0(N)\rangle = |N,0,0,0\ldots\rangle = \frac{(a_0^+)^N}{\sqrt{N!}}|0\rangle$$

onde N bósons ocupam o estado de $\vec{k}=\vec{0}$ e nenhum outro estado é ocupado. A dificuldade de se lidar com esse tipo de sistema fica evidente quando se nota que:

$$a_0|\Phi_0\rangle = \sqrt{N}\,|(N-1),0,0,\cdots\rangle = \sqrt{N}\,|\Phi_0(N-1)\rangle$$

$$a_0^+|\Phi_0\rangle = \sqrt{N+1}\,|(N+1),0,0,\cdots\rangle = \sqrt{N+1}\,|\Phi_0(N+1)\rangle$$

Vê-se que nem a_0 nem a_0^+ aniquilam o estado fundamental não-interagente. Portanto, a separação dos operadores em partes de criação e de aniquilação, essencial para a prova do teorema de Wick, não é possível.

Usa-se, entretanto, um truque para se evitar esse problema. A observação crucial é que

$$\xi_0 \equiv \frac{a_0}{\sqrt{V}} \qquad e \qquad \xi_0^+ \equiv \frac{a_0^+}{\sqrt{V}}$$

(essa redefinição torna $\xi_0\, \xi_0^+$ variáveis intensivas) são tais que:

$$\xi_0 |\Phi_0(N)\rangle = \left(\frac{N}{V}\right)^{1/2} |\Phi_0(N-1)\rangle$$

$$\xi_0^+ |\Phi_0(N)\rangle = \left(\frac{N+1}{V}\right)^{1/2} |\Phi_0(N+1)\rangle$$

$$e \quad [\xi_0, \xi_0^+] = \frac{1}{V}[a_0, a_0^+] = \frac{1}{V}$$

No limite termodinâmico a ação de ξ_0 e ξ_0^+ equivale à multiplicação por um número finito (além da modificação do número de partículas) mas o seu comutador tende a zero. Ou seja, ξ_0 e ξ_0^+ passam a

agir como variáveis clássicas e seu caráter quântico pode ser desprezado. Esse é um exemplo típico de um "PARÂMETRO DE ORDEM", que é importante no estudo de sistemas onde há quebra espontânea de simetria.

O procedimento usual consiste em se separa o operador ξ_0 (e ξ_0^+) de seus parceiros para $\vec{k}\neq\vec{0}$ (a_k^+, a_k), mantendo o caráter quântico dos últimos mas tratando os primeiros como variáveis essencialmente clássicas. Por exemplo:

$$\psi(\vec{r}) = \sum_{k} \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{\sqrt{V}} a_k \simeq \xi_0 + \sum_{k\neq 0} \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{\sqrt{V}} a_k$$

onde $\xi_0 \simeq \sqrt{n} = \sqrt{\dfrac{N}{V}}$.

A ocupação do estado $\vec{k}=\vec{0}$ é igual ao número total de partículas em um sistema não-interagente. Entretanto, quando interações são incluídas, esse resultado se modifica pois as interações tendem a reduzir a ocupação do estado de $\vec{k}=\vec{0}$. Portanto, escreveremos:

$$\xi_0 \equiv \sqrt{\frac{N_0}{V}} = \xi_0^+$$

onde N_0 deve ser determinado a posteriori. O operador número total de partículas torna-se:

$$\hat{N} = N_0 + \sum_k{}' a_k^+ a_k$$

onde $\sum_k{}' \sim \sum_{k\neq 0}$

Uma vez feita essa separação, podem-se aplicar os métodos derivados anteriormente. Em particular, o teorema de Wick passa a ser válido para os operadores a_k, a_k^+ ($\vec{k}\neq 0$) pois:

$$a_k |\Phi_0(N)\rangle = 0 \qquad (\vec{k}\neq 0)$$

Utilizaremos, entretanto, um método diferente para tratar o sistema de bósons diluído. Como vimos no caso dos férmions, para um sistema diluído, podemos simplificar o hamiltoniano e considerar apenas interações de pequenos momentos e:

$$H = \sum_{k} \epsilon_k a_k^+ a_k + H_{int} \quad ; \quad \epsilon_k = \frac{k^2}{2m}$$

$$H_{int} = \frac{1}{2V} \sum_{\substack{k_1,k_2 \\ \vec{q}}} U(\vec{q})\, a^+_{\bar{k}_1+\bar{q}}\, a^+_{\bar{k}_2-\bar{q}}\, a_{\bar{k}_2}\, a_{\bar{k}_1}$$

$$\simeq \frac{U(0)}{2V} \sum_{\substack{k_1,k_2 \\ k_3 k_4}} a^+_{k_1} a^+_{k_2} a_{k_3} a_{k_4}\, \delta(\bar{k}_1+\bar{k}_2, \bar{k}_3+\bar{k}_4)$$

Chamaremos $U(0)$ de $U_0 = \int d^3r\, V(\vec{r})$

Faremos agora $a_0 = \sqrt{N_0}$ em H_{int}. O termo em N_0^2 é

$$H^{(0)}_{int} = \frac{U_0}{2V} N_0^2 = \frac{U_0}{2V} a_0^+ a_0^+ a_0 a_0$$

Não há termos em $N_0^{3/2}$ pois eles não conservam momento. O próximo termo é:

$$H^{(2)}_{int} = \frac{U_0}{2V} N_0 \Big\{ \sum_k{}' a_k^+ a_{-k}^+ + \sum_k{}' a_k^+ a_k + \sum_k{}' a_k^+ a_k + \sum_k{}' a_k^+ a_k + \sum_k{}' a_k^+ a_k$$

$$+ \sum_k{}' a_k a_{-k} \Big\}$$

$$= \frac{U_0 N_0}{2V} \Big\{ 4 \sum_k{}' a_k^+ a_k + \sum_k{}' (a_k^+ a_{-k}^+ + a_k a_{-k}) \Big\}$$

Vamos desprezar os termos posteriores por eles serem de ordem $O\left(\frac{\sqrt{N_0}\,U_0}{2V}\right) < O\left(\frac{N_0 U_0}{2V}\right)$.

Como:

$$N_0 = \hat{N} - \sum_k{}' a_k^+ a_k \simeq N - \sum_k{}' a_k^+ a_k$$

podemos expressar H_{int} em termos de N, eliminando assim N_0. Trabalhando consistentemente até ordem N:

$$H_{int}^{(0)} = \frac{U_0}{2V} N_0^2 \simeq \frac{U_0}{2V}\left[N^2 - 2N \sum_k{}' a_k^+ a_k\right]$$

$$H_{int}^{(2)} = \frac{U_0 N}{2V}\left\{4 \sum_k{}' a_k^+ a_k + \sum_k{}' (a_k^+ a_{-k}^+ + h.c.)\right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{H_{int} = \frac{U_0 N^2}{2V} + \frac{U_0 N}{2V}\left\{2 \sum_k{}' a_k^+ a_k + \sum_k{}' (a_k^+ a_{-k}^+ + h.c.)\right\}}$$

Procedendo como no sistema fermiônico, substituiremos U_0 pelo comprimento de espalhamento $\underline{a}$. Vimos que até a segunda aproximação de Born:

$$\frac{4\pi a}{m} = U_0 - \frac{U_0^2 m}{V} \sum_{\vec{p}}{}' \frac{1}{|\vec{p}|^2} = U_0 - m U_0^2 \int' \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{p^2}$$

(ver secção 11 do Fetter e Walecka)

onde tomamos $\vec{k} \simeq \vec{k}' = 0$ na amplitude de espalhamento $f(\vec{k}, \vec{k}')$. Até segunda ordem:

$$U_0 = \frac{4\pi a}{m}\left[1 + \frac{4\pi a}{V} \sum_p{}' \frac{1}{p^2}\right]$$

A divergência de $\sum' \frac{1}{p^2}$ quando $p \to +\infty$ é espúria e cancela no resultado final.

Antecipando o resultado final da energia do estado fundamental usamos o resultado em primeira ordem no termo em N mas retemos a correção de 2ª ordem no termo em N^2.

$$H_{int} = \frac{2\pi a N^2}{mV}\left[1 + \frac{4\pi a}{V}\sum_p{}' \frac{1}{p^2}\right] + \frac{2\pi a N}{mV}\left\{2\sum_k{}' a_k^+ a_k + \sum_k{}' (a_k^+ a_{-k}^+ + h.c.)\right\}$$

O Hamiltoniano total pode ser agora diagonalizado mediante a seguinte transformação canônica (chamada transformação de Bogoliubov)

$$a_k = u_k b_k + v_k b_{-k}^+ \qquad b_k = u_k a_k - v_k a_{-k}^+$$

$$a_k^+ = u_k b_k^+ + v_k b_{-k} \qquad b_k^+ = -v_k a_{-k} + u_k a_k^+$$

A transformação só é canônica se b_k e b_k^+ satisfazem as relações de comutação usuais de bósons:

$$[b_k, b_{k'}] = [b_k^+, b_{k'}^+] = 0$$

$$[b_k, b_{k'}^+] = \delta_{k,k'}$$

que é garantido se:

$$u_k^2 - v_k^2 = 1$$

Substituindo-se as relações acima em H:

$$H = A_0 + \sum_k{}' \left[(\epsilon_k + 2\lambda) a_k^+ a_k + \lambda (a_k^+ a_{-k}^+ + h.c.)\right]$$

$$A_0 = \frac{2\pi a N^2}{mV}\left[1 + \frac{4\pi a}{V}\sum_p{}' \frac{1}{p^2}\right] \quad e \quad \lambda = \frac{2\pi a N}{mV}$$

$$a_k^+ a_k = u_k^2 b_k^+ b_k + u_k v_k (b_k^+ b_{-k}^+ + h.c.) + v_k^2 b_{-k} b_{-k}^+$$

$$a_k^+ a_{-k}^+ = u_k^2 b_k^+ b_{-k}^+ + v_k^2 b_{-k} b_{+k} + u_k v_k (b_k^+ b_k + b_k b_{-k}^+)$$

(Assumimos que $u_{-k} = u_k$ e $v_{-k} = v_k$. Isso pode ser confirmado a posteriori).

$$H = A_0 + \sum_k{}' \Big\{ (\epsilon_k + 2\lambda)\left[u_k^2 b_k^+ b_k + v_k^2 b_{-k} b_{-k}^+ + u_k v_k (b_k^+ b_{-k}^+ + h.c.)\right]$$

$$+ \lambda \left[(u_k^2 + v_k^2)(b_k^+ b_{-k}^+ + b_{-k} b_k) + 2 u_k v_k (b_k^+ b_k + b_{-k} b_{-k}^+)\right] \Big\}$$

A forma diagonal é obtida, ajustando-se u_k e v_k de modo a nos livrarmos dos "termos anômalos" $b_k^+ b_{-k}^+$ etc. Para isso é conveniente introduzir a parametrização:

$$u_k = \cosh \varphi_k \qquad (\varphi_{-k} = \varphi_k)$$
$$v_k = \sinh \varphi_k$$

que garante $u_k^2 - v_k^2 = 1$ automaticamente.

$$\Rightarrow (\epsilon_k + 2\lambda) u_k v_k + \lambda (u_k^2 + v_k^2) = 0$$

$$2 u_k v_k = \sinh 2\varphi_k \quad e \quad u_k^2 + v_k^2 = \cosh 2\varphi_k$$

$$\Rightarrow \boxed{\tanh 2\varphi_k = \frac{-2\lambda}{\epsilon_k + 2\lambda}}$$

$$\cosh^2 \varphi_k = \frac{1}{2}(\cosh 2\varphi_k + 1)$$

$$\sinh^2 \varphi_k = \frac{1}{2}(\cosh 2\varphi_k - 1)$$

$$u_k^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{\epsilon_k + 2\lambda}{E_k} + 1\right] \qquad v_k^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{\epsilon_k + 2\lambda}{E_k} - 1\right] \qquad \text{onde}$$

$$E_k = \sqrt{(\epsilon_k + 2\lambda)^2 - 4\lambda^2} \qquad v_k < 0$$

Segue que:

$$H = A_0 + \sum_k{}' \left\{ \left[(\epsilon_k + 2\lambda) u_k^2 + 2\lambda u_k v_k \right] b_k^+ b_k + \left[(\epsilon_k + 2\lambda) v_k^2 + 2\lambda u_k v_k \right] b_{-k} b_{-k}^+ \right\} = A_0 + \sum_k{}' \left[(\epsilon_k + 2\lambda) v_k^2 + 2 u_k v_k \lambda \right] +$$

$$+ \sum_k{}' \left[(\epsilon_k + 2\lambda)(u_k^2 + v_k^2) + 4\lambda u_k v_k \right] b_k^+ b_k$$

Usando que:

$$u_k^2 + v_k^2 = \frac{\epsilon_k + 2\lambda}{E_k} \quad ; \quad 2 u_k v_k = -\frac{2\lambda}{E_k}$$

$$\Rightarrow (\epsilon_k + 2\lambda)(u_k^2 + v_k^2) + 4\lambda u_k v_k = \frac{(\epsilon_k + 2\lambda)^2}{E_k} - \frac{4\lambda^2}{E_k} = E_k$$

e

$$\frac{(\epsilon_k + 2\lambda)}{2} \left[\frac{\epsilon_k + 2\lambda}{E_k} - 1 \right] - \frac{2\lambda^2}{E_k} = \frac{(\epsilon_k + 2\lambda)^2 - 4\lambda^2}{2E_k} - \frac{(\epsilon_k + 2\lambda)}{2}$$

$$= \frac{E_k - (\epsilon_k + 2\lambda)}{2} = - v_k E_k$$

$$H = A_0 + \frac{1}{2} \sum_k{}' \left[E_k - \epsilon_k - 2\lambda \right] + \sum_k{}' E_k b_k^+ b_k$$

$$= N\lambda \left[1 + \frac{2\lambda m}{N} \sum_k{}' \frac{1}{k^2} \right] + \frac{1}{2} \sum_k{}' \left[E_k - \epsilon_k - 2\lambda \right] + \sum_k{}' E_k b_k^+ b_k$$

$$\boxed{H = N\lambda + \frac{1}{2} \sum_k{}' \left[E_k - \epsilon_k - 2\lambda + \frac{4m\lambda^2}{k^2} \right] + \sum_k{}' E_k b_k^+ b_k}$$

que é o Hamiltoniano na forma diagonal que procurávamos.

Note que, como $\tanh 2\varphi_k \in [-1, 1]$, $2\lambda > 0$, ou seja, só há solução para $a > 0$ (potenciais repulsivos), O vácuo do sistema interação agora corresponde a estado que:

$$b_k |0\rangle = 0 \qquad (\bar{k} \neq 0)$$

ou:

$$u_k a_k |0\rangle = v_k a^+_{-k} |0\rangle$$

que é uma relação complicada em termos de a_k e a^+_k, embora simples na nova base.

O estado fundamental têm $\langle 0| b^+_k b_k |0\rangle = 0$, logo:

$$E_0 = N\lambda + \frac{1}{2} \sum_k{}' \left[E_k - \epsilon_k - 2\lambda + \frac{4\lambda^2 m}{k^2} \right]$$

Veja que, como:

$$E_k = \sqrt{\epsilon_k^2 + 4\lambda\epsilon_k} = \epsilon_k \left[1 + \frac{4\lambda}{\epsilon_k} \right]^{1/2} = \epsilon_k \left[1 + \frac{2\lambda}{\epsilon_k} - \frac{2\lambda^2}{\epsilon_k^2} + \frac{4\lambda^3}{\epsilon_k^3} + O\left(\frac{\lambda^4}{\epsilon_k^4}\right) \right]$$

$$= \epsilon_k + 2\lambda - \frac{2\lambda^2}{\epsilon_k} + \frac{4\lambda^3}{\epsilon_k^2} + O\left(\frac{\lambda^4}{\epsilon_k^3}\right) \qquad \text{quando } \epsilon_k \gg \lambda$$

o termo entre colchetes vai como:

$$\frac{4\lambda^2 m}{k^2} - \frac{2\lambda^2}{\epsilon_k} + \frac{4\lambda^3}{\epsilon_k^2} = \frac{16\lambda^3 m^2}{k^4} \qquad \text{quando } k^2 \to +\infty$$

Portanto a integração em $\vec{k}$ converge quando $k^2 \to +\infty$

$$\sum_k{}' [\;] \to \sim \int \frac{k^2 dk}{k^4} \sim \int \frac{dk}{k^2} < +\infty$$

Deve-se notar que a retenção da expressão de V_0 em termos de $\underline{a}$ até segunda ordem foi indispensável para a convergência da integral

Segue agora que:

$$E_0 = N\lambda + \frac{V}{2}\int \frac{k^2 dk}{2\pi^2}\left[\sqrt{\left(\frac{k^2}{2m}\right)^2 + \frac{4\lambda k^2}{2m}} - \frac{k^2}{2m} - 2\lambda + \frac{4\lambda^2 m}{k^2}\right]$$

Fazendo $k = \sqrt{2\lambda m}\, y$

$$E_0 = N\lambda + \frac{\lambda V (2\lambda m)^{3/2}}{4\pi^2} \underbrace{\int_0^\infty y^2 dy \left[\sqrt{y^4 + 4y^2} - y^2 - 2 + \frac{2}{y^2}\right]}_{= \frac{64}{15}}$$

Usando:

$$\lambda = \frac{2\pi a n}{m} \qquad \text{onde } n = \frac{N}{V}$$

$$\boxed{\frac{E_0}{N} = \frac{2\pi a n}{m}\left[1 + \frac{128}{15}\left(\frac{n a^3}{\pi}\right)^{1/2}\right]}$$

que dá a energia do estado fundamental até ordem 1 em $\sqrt{n a^3}$.

Do Hamiltoniano:

$$H = E_0 + \sum_k{}' E_k \, b_k^+ b_k$$

vemos que E_k corresponde às excitações elementares do sistema, que são bosônicas. Temos que

$$E_k \cong \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2\lambda k^2}{m}} = \sqrt{\dfrac{2\lambda}{m}}\, k = \left(\dfrac{4\pi a n}{m^2}\right)^{1/2} k & ; \quad k \to 0 \\ \\ \dfrac{k^2}{2m} + 2\lambda = \dfrac{k^2}{2m} + \dfrac{4\pi a n}{m} & ; \quad k \to +\infty \end{cases}$$

Para $\vec{k}$ grande as excitações correspondem ao espectro de partícula livre, mas quando $k \to 0$ o espectro é típico de ondas sonoras com velocidade:

$$c = \sqrt{\frac{4\pi a n}{m^2}}$$

As excitações elementares de mais baixa energia no gás de bósons interagente são ondas sonoras. Esse resultado é geral.

Para o sistema em equilíbrio à temperatura T, o número de excitações é dado pelo fator de Bose (ESTATÍSTICA DE PLANCK)

$$n(\vec{p}) = \frac{1}{e^{E_p \,[\text{illegible}]} - 1} \qquad (\vec{p} \neq 0)$$

O fator N_0 pode ser encontrado de

$$N = N_0 + \sum_k{}' \langle a_k^+ a_k \rangle$$

$$= N_0 + \sum_k{}' \langle \left[u_k^2 b_k^+ b_k + v_k^2 b_k^+ b_k + v_k^2 \right] \rangle$$

$$\Rightarrow N = N_0 + \sum_k{}' \left\{ \left(\frac{\epsilon_k + 2\lambda}{E_k} \right) \langle b_k^+ b_k \rangle + \frac{1}{2} \left[\frac{\epsilon_k + 2\lambda}{E_k} - 1 \right] \right\}$$

Como vimos $\langle b_k^+ b_k \rangle = 0$ a $T = 0$ e:

$$N_0 = N - \frac{1}{2} \sum_k{}' \left(\frac{\epsilon_k + 2\lambda - E_k}{E_k} \right)$$

Como o segundo termo é não-nulo, vemos a confirmação de que realmente, quando interações são introduzidas, $N_0 \neq N$. A fração de redução da ocupação do nível $\vec{k} = \vec{0}$ é:

$$r = \frac{N - N_0}{N} = \frac{1}{2n} \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{2\pi^2} \left[\frac{k^2/2m + 2\lambda - \sqrt{(k^2/2m)^2 + \frac{4\lambda k^2}{2m}}}{\sqrt{(k^2/2m)^2 + 4\lambda k^2/2m}} \right]$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 n} (2\lambda m)^{3/2} \underbrace{\int_0^\infty y^2 dy \left[\frac{y^2 + 2}{\sqrt{y^4 + 4y^2}} - 1 \right]}_{\frac{4}{3}}$$

$$= \frac{(2\lambda m)^{3/2}}{3\pi^2 n} = \boxed{\frac{8}{3} \left(\frac{m a^3}{\pi} \right)^{1/2} = r}$$

Para baixas temperaturas, apenas excitações de baixas energias são excitadas e elas têm

$$E_k \sim c\,k \quad ; \quad c = \sqrt{\frac{4\pi a n}{m}}$$

Podemos calcular a energia interna então através de :

$$U = \langle H \rangle = U_0 + \sum_k{}' E_k \langle b_k^+ b_k \rangle$$

$$U \simeq U_0 + \sum_k{}' \frac{ck}{e^{\beta ck} - 1}$$

$$= U_0 + V \int \frac{k^2 dk}{2\pi^2} \frac{ck}{e^{\beta ck} - 1}$$

Fazendo $\beta ck = \frac{ck}{T} = x$

$$U = U_0 + \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{T}{c}\right)^3 T \underbrace{\int \frac{x^3\,dx}{e^x - 1}}_{\pi^4/15}$$

$$\Rightarrow \Delta U \simeq \frac{V}{2\pi^2 c^3}\frac{\pi^4 T^4}{15} = \frac{\pi^2 V}{30 c^3} T^4$$

$$\boxed{C_V = \frac{\partial \Delta U}{\partial T} \sim T^3}$$

que é análoga ao calor específico de um sólido à baixas temperaturas

Depleção do condensado a $T \neq 0$:

Se $N_0^{(T=0)} = N - \sum_k' v_k^2 = N - \sum_k' \frac{1}{2}\left[\frac{\epsilon_k + 2\lambda}{E_k} - 1\right]$

então para $T > 0$:

$$N_0(T) = N_0(0) - \sum_k' (u_k^2 + v_k^2) \langle b_k^+ b_k \rangle$$

$$= N_0(0) - \sum_k \left[\left(\frac{\epsilon_k + 2\lambda}{E_k}\right) \langle b_k^+ b_k \rangle\right]$$

Quando $T << T_c$: $\frac{\epsilon_k + 2\lambda}{E_k} \simeq \frac{2\lambda}{ck}$; $\langle b_k^+ b_k \rangle = \frac{1}{e^{\beta E_k} - 1} \cong \frac{1}{\beta ck}$

$$\Rightarrow N(T) = N_0(0) - V \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{2\lambda}{ck} \frac{T}{ck}$$

Em geral, em D dimensões

$$N(T) = N_0(0) - \frac{2\lambda T V}{(2\pi)^D c^2} \int \frac{\Gamma_D k^{(D-1)} dk}{k}$$

$$= N_0(0) - \frac{2\lambda T V \Gamma_D}{(2\pi)^D c^2} \int_0 k^{(D-3)} dk$$

onde Γ_D é a superfície da esfera em D dimensões. A integral é divergente no IV se $D \leq 2$ = dimensão crítica inferior. Flutuações térmicas destroem a ordem em $d \leq 2$ (Teorema de Mermin-Wagner-Hohenberg).

A depleção em $T=0$ é:

$$\frac{1}{2}\sum_{k}{}' \left[\frac{\epsilon_k + 2\lambda}{E_k} - 1\right] \propto \frac{\lambda V}{c}\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D}\,\frac{1}{k}$$

que também diverge em $D \leq 1$. A ordem é destruída por flutuações quânticas em $D \leq 1$.

Pressão em gases de Fermi e Bose.

Como vimos, em ordem dominante:

$$\frac{E_F^0}{N} = \frac{3}{5}\frac{k_F^2}{2m} = \frac{3}{10m}\left(3\pi^2 n\right)^{2/3}$$

e

$$\frac{E_B^0}{N} = \frac{2\pi a\hbar^2 n}{m}$$

Noten que, para o caso n-interagente, $E_B^0 = 0$ mas $E_F^0 \neq 0$.

Segue que, usando $P = -\left.\frac{\partial E}{\partial V}\right|_N$,

$$P_F = \frac{\hbar^2}{5m}\left(3\pi^2\right)^{2/3} n^{5/3} \quad e \quad P_B = \frac{2\pi\hbar^2 a\,(n^2)}{m}$$

$$\Rightarrow \frac{P_F}{P_B} = \frac{(3\pi^2)^{2/3}}{10\pi}\,\frac{1}{(na^3)^{1/3}} \gg 1 \quad \text{se } na \ll 1$$

$$\simeq \frac{0{,}30}{(na^3)^{1/3}}$$