Tempo contínuo

taxa de natalidade b cte → Nº médio de filhos/Δ/unidade de tempo

taxa de mortalidade d cte → Nº médio de mortes/Δ/unidade de tempo

$$N(t+\Delta t) = N(t) + b\,N(t)\,\Delta t - d\,N(t)\,\Delta t$$

$$N(t+\Delta t) = N(t) + \underbrace{(b-d)}_{k}\,\Delta t\,N(t)$$

$$N(t+\Delta t) - N(t) = k\,\Delta t\,N(t)$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} k\,N(t)$$

$$\boxed{\frac{dN(t)}{dt} = k\,N(t)}$$

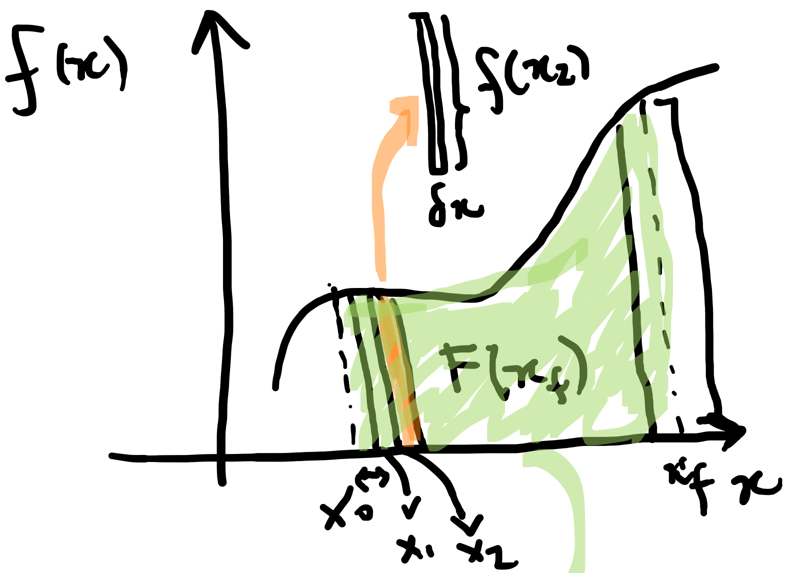
Eq diferencial

$$N(t) = f(t)$$

Breve Revisão:

$F(x)$

Integral de $f(x) = F$ entre x_0 e x_f mede a área entre a função e o eixo x



$$\delta x = \frac{(x_f - x_0)}{N}$$

x_0

$x_1 = x_0 + \delta x$

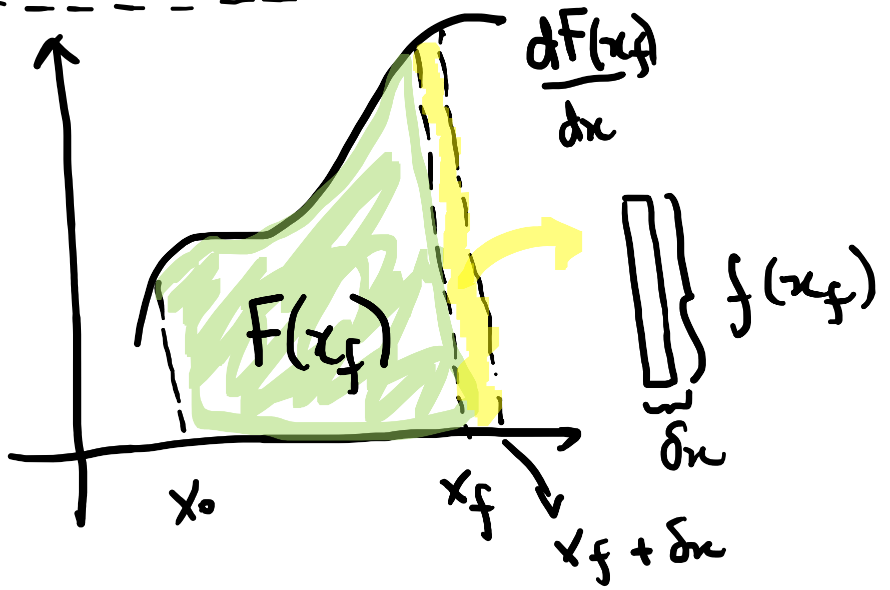
$x_2 = x_0 + 2\delta x$

$\vdots$

$x_N = x_0 + N\delta x$

Área dos retangulinhos é

$$\delta x\, f(x_k)$$



$$F(x_f) = \sum_k \delta x\, \underbrace{f(x_k)} = \int_{x_0}^{x_f} f(x)\, dx$$

$$\frac{dF(x_f)}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{F(x_f + \delta x) - F(x_f)}{\delta x}$$

$$\frac{dF(x_f)}{dx} \cancel{\delta x} = \underbrace{F(x_f + \delta x)}_{\text{Am + verde}} - \underbrace{F(x_f)}_{\text{verde}} = \underbrace{\cancel{\delta x} f(x_f)}_{\text{amarela}}$$

$$\frac{dF(x_f)}{dx} = f(x_f)$$

$$F = \int_{x_0}^{x_f} f(x)\, dx = F(x_f) - F(x_0)$$

$$\begin{cases} \dfrac{dF(x)}{dx} = f(x) \\ F(x) = \displaystyle\int f(x)\, dx \end{cases}$$

Crescimento exponencial:

$$\frac{dN(t)}{dt} = k N(t)$$

$$N(t) = C \exp(kt)$$
$$= \underbrace{C}_{N(0)} e^{kt}$$

$$N(t) = C e^{kt}$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = C k e^{kt} = k N(t)$$

$k>0$ cresc. exp.
$k<0$ decresc exp

função exponencial:

$$\frac{d e^{ax}}{dx} = a e^{ax}$$

$$x_n = R^n x_0 = e^{(\ln R)n} x_0$$

$R>1 \to$ cresc expon.

$R<1 \to$ decresc expo.

Crescimento Logístico

→ incluir capacidade suporte

$C(t)$ - recursos no tempo t

$$C(t) = \underbrace{\overset{\text{máximo}}{C_0} - \alpha N(t)}$$

↳ qtidade de recurso que cada Δ consome

$$\alpha N(t) = \frac{C_0}{\alpha} \Rightarrow C(t) = 0$$

A população cresce a uma taxa proporcional à qtidade de recursos

$$\rho = \beta C(t)$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = \rho N(t) = \beta \underset{\sim}{C(t)} N(t) = \beta\left(C_0 - \alpha N(t)\right) N(t) = C_0 \beta \left(\frac{C_0 - \alpha N(t)}{C_0}\right) N(t)$$

$$= C_0 \beta \left(1 - \frac{\alpha}{C_0} N(t)\right) N(t)$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = \underbrace{\beta C_0}_{r}\left(1 - \underbrace{\frac{\alpha}{C_0}}_{\frac{1}{K}} N(t)\right) N(t) = r\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)N(t)$$

$$= r\,N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

$$r = \beta C_0 \qquad K = \frac{C_0}{\alpha}$$

$$\frac{dN}{dt} = r\,N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) \qquad N(t) = \frac{K N_0}{N_0 + \underbrace{(K - N_0)e^{-rt}}_{\to 0}}$$

Si $r > 0$, $t \to \infty$ $N(t) = \frac{K N_0}{N_0} = K$

Si $r < 0$, $t \to \infty$ $N(t) = 0$