

# Compartimentalização

Flávia Maria Darcie Marquitti

[flamarquitti@gmail.com](mailto:flamarquitti@gmail.com)

DFMC-IFGW, Unicamp

[www.ifi.unicamp.br/~flaviam](http://www.ifi.unicamp.br/~flaviam)

# Como encontrar grupos em redes?

---

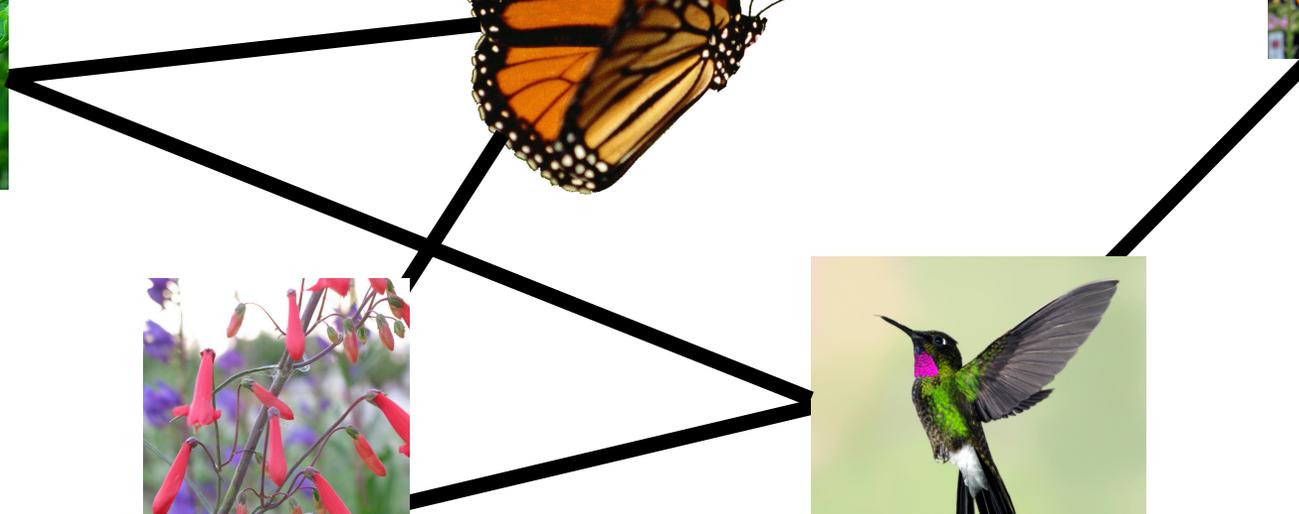
- Dadas as interações entre indivíduos ou espécies, como podemos separá-los em grupos?



# Como encontrar grupos em redes?

---

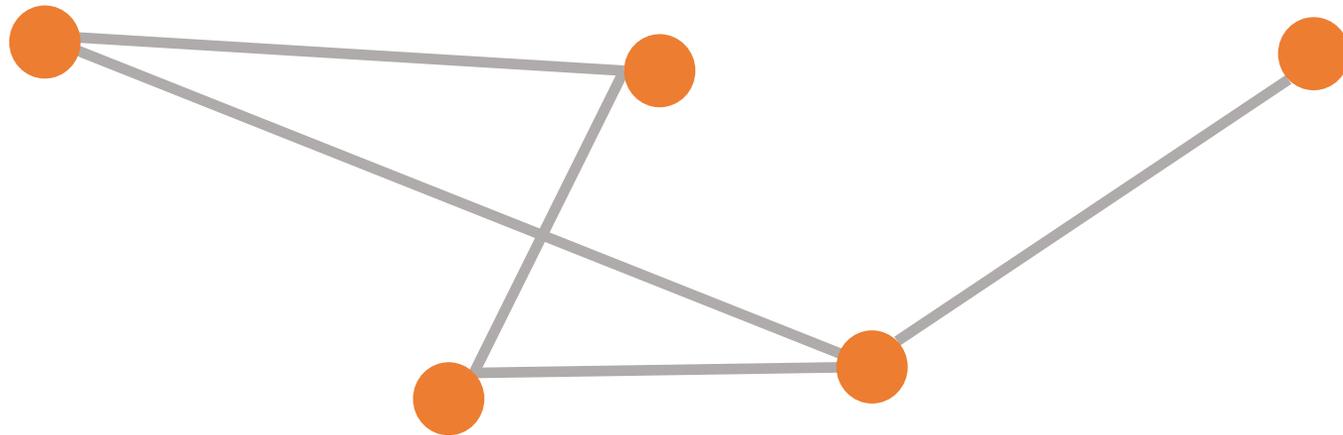
- Dadas as interações entre indivíduos ou espécies, como podemos separá-los em grupos?



# Como encontrar grupos em redes?

---

- Dadas as interações entre indivíduos ou espécies, como podemos separá-los em grupos?





# Conteúdo

---

- 1) Componentes ou Compartimentos
- 2) Cliques
- 3) Clustering
- 4) Modularidade ou Comunidades
- 5) Exemplos
- 6) Resumo

# Conteúdo

---

- 1) Componentes ou compartimentos
- 2) Cliques
- 3) Clustering
- 4) Modularidade
- 5) Exemplos
- 6) Resumo

# Componentes

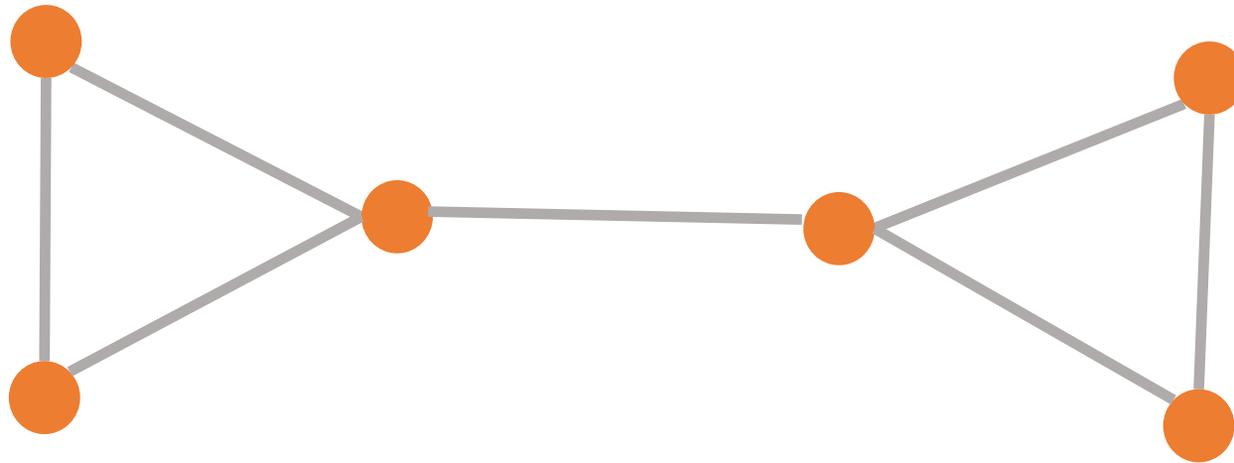
---

- Sub-grafos ou sub-redes conexos
  - **Conexo**: se entre qualquer par de nós  $(i,j)$  há um caminho possível na rede
  - **Desconexo**: se para algum par de nós  $(i,j)$  não há nenhum caminho na rede
- Se a rede só possui **um componente**, então dizemos que a **rede é conexa**

# Componentes

---

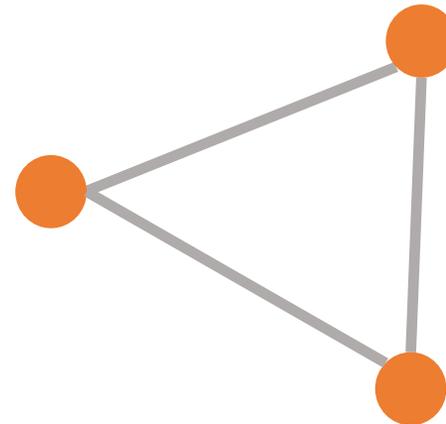
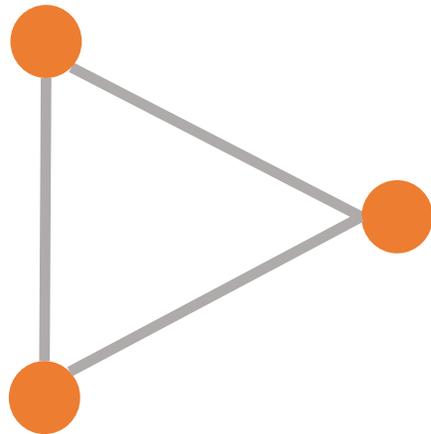
- Exemplos:



# Componentes

---

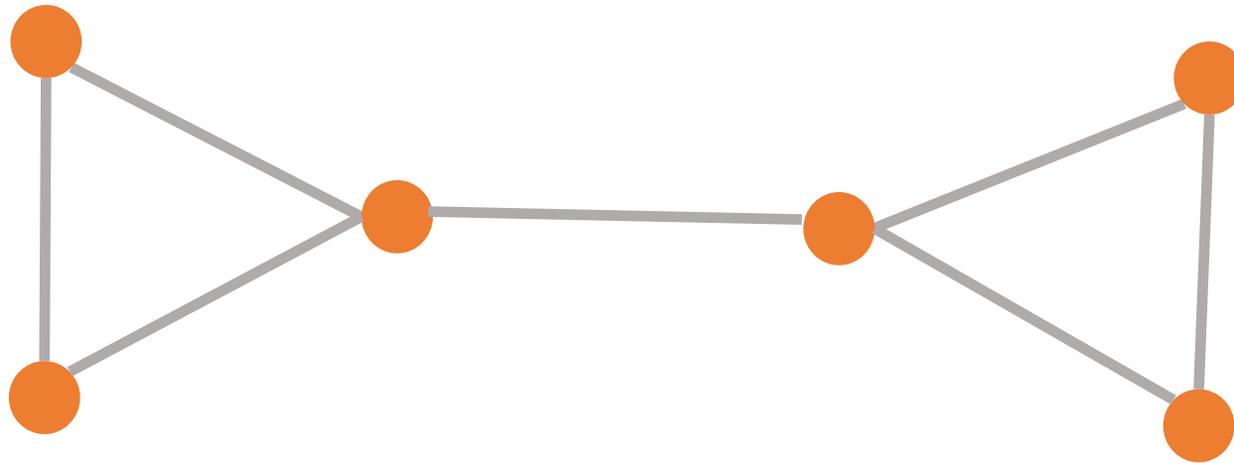
- Exemplos:



# Componentes

---

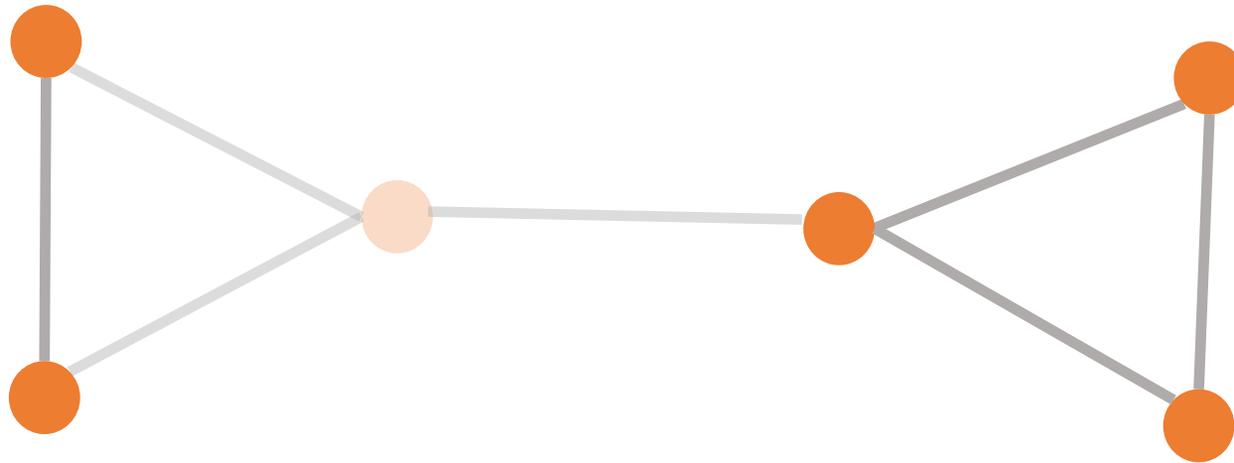
- **Conectividade:** número mínimo de nós/vértices que quando removidos ou cortados da rede a transformam em uma rede desconexa



# Componentes

---

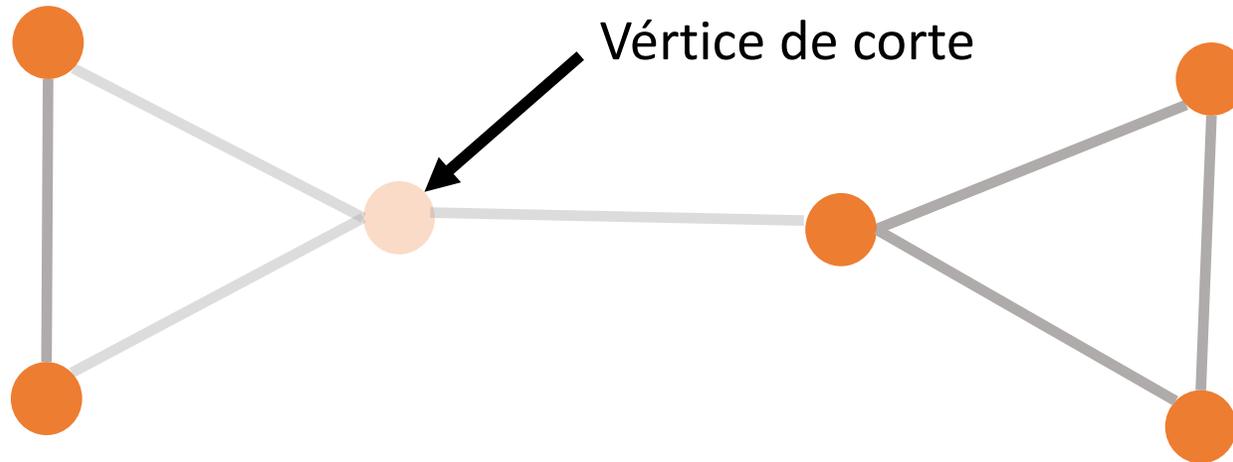
- **Conectividade:** número mínimo de nós/vértices que quando removidos ou cortados da rede a transformam em uma rede desconexa



# Componentes

---

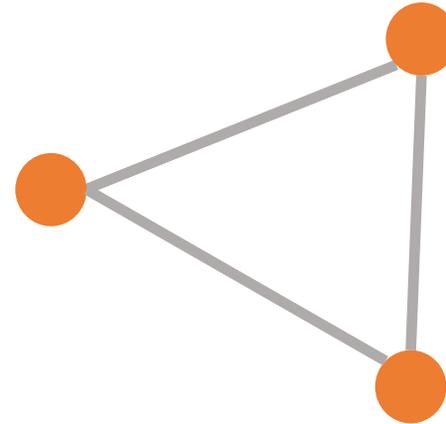
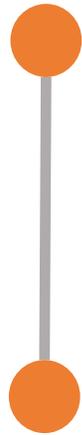
- **Conectividade:** número mínimo de nós/vértices que quando removidos ou cortados da rede a transformam em uma rede desconexa



# Componentes

---

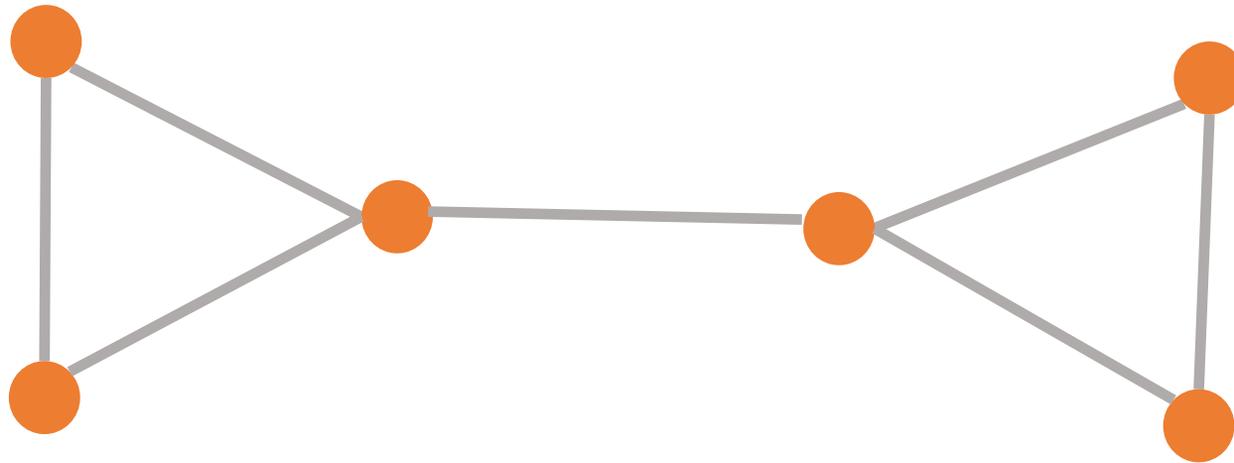
- **Conectividade:** número mínimo de nós/vértices que quando removidos ou cortados da rede a transformam em uma rede desconexa



# Componentes

---

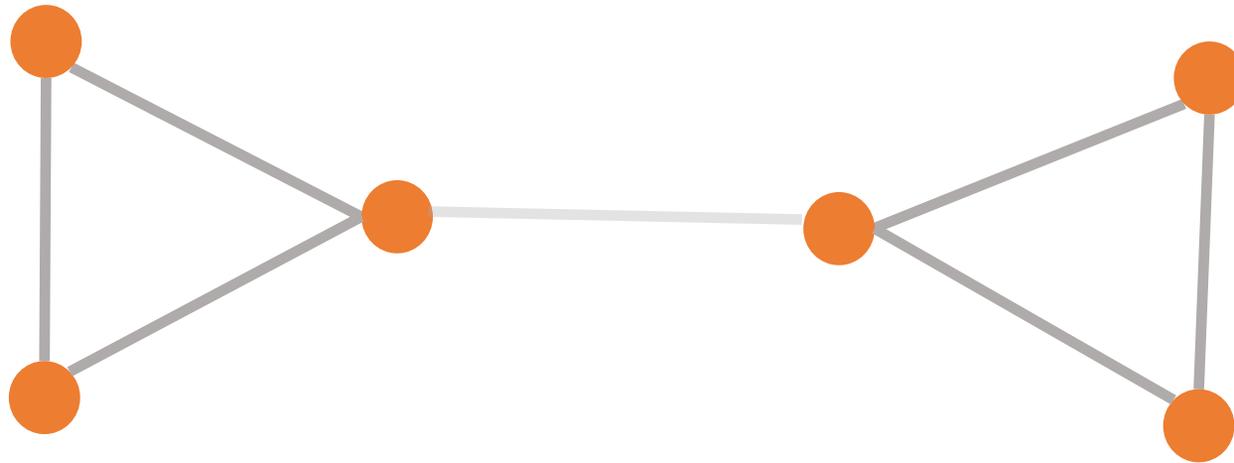
- **Conectividade de aresta:** número mínimo de links/arestas que quando removidas ou cortadas da rede a transformam em uma rede desconexa



# Componentes

---

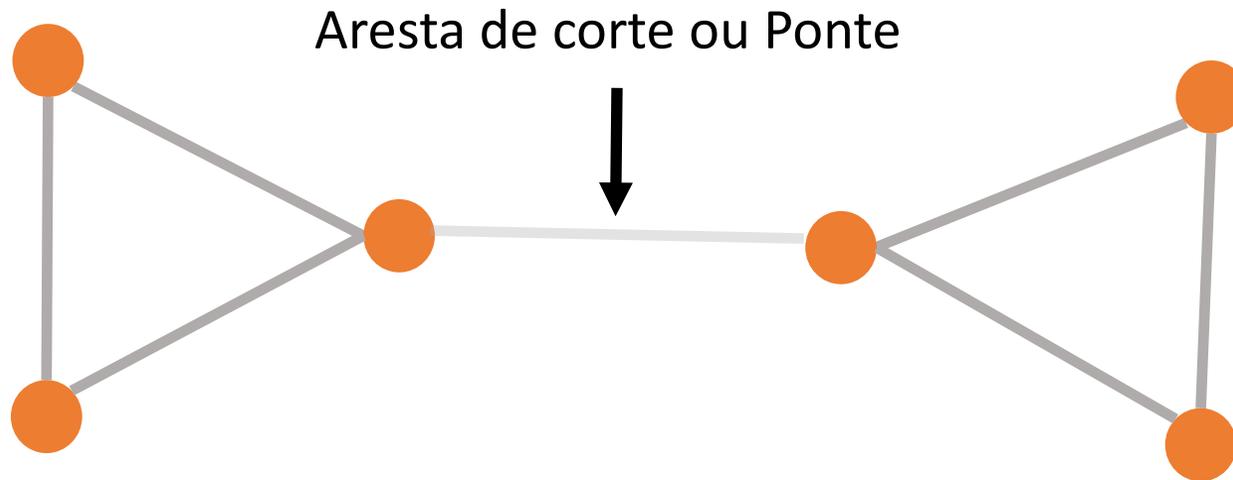
- **Conectividade de aresta:** número mínimo de links/arestas que quando removidas ou cortadas da rede a transformam em uma rede desconexa



# Componentes

---

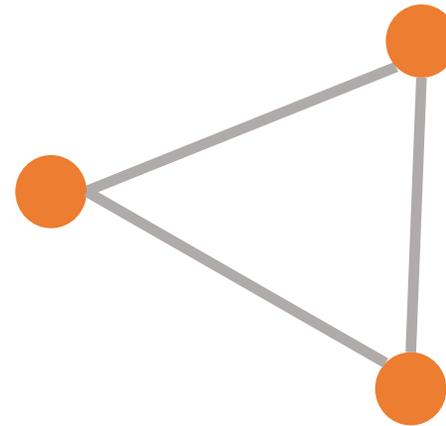
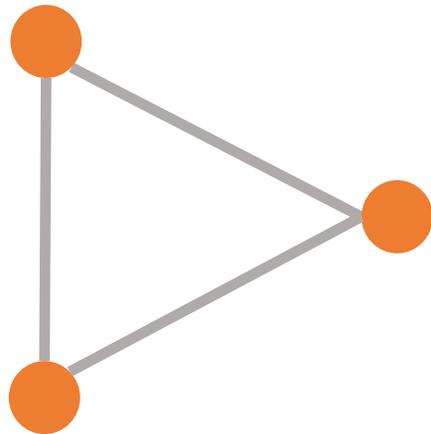
- **Conectividade de aresta:** número mínimo de links/arestas que quando removidas ou cortadas da rede a transformam em uma rede desconexa



# Componentes

---

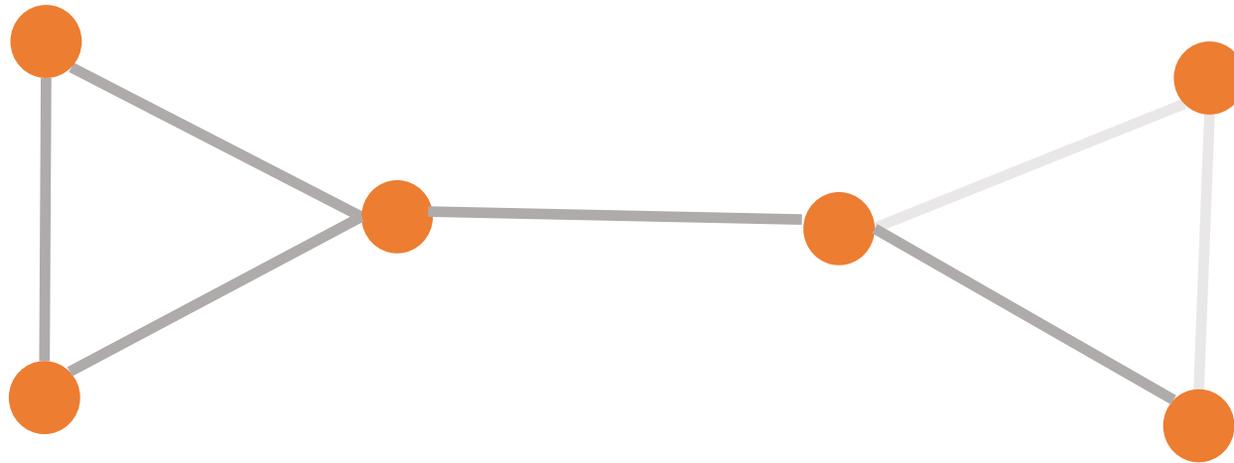
- **Conectividade de aresta:** número mínimo de links/arestas que quando removidas ou cortadas da rede a transformam em uma rede desconexa



# Componentes

---

- **Conectividade de aresta:** número mínimo de links/arestas que quando removidas ou cortadas da rede a transformam em uma rede desconexa

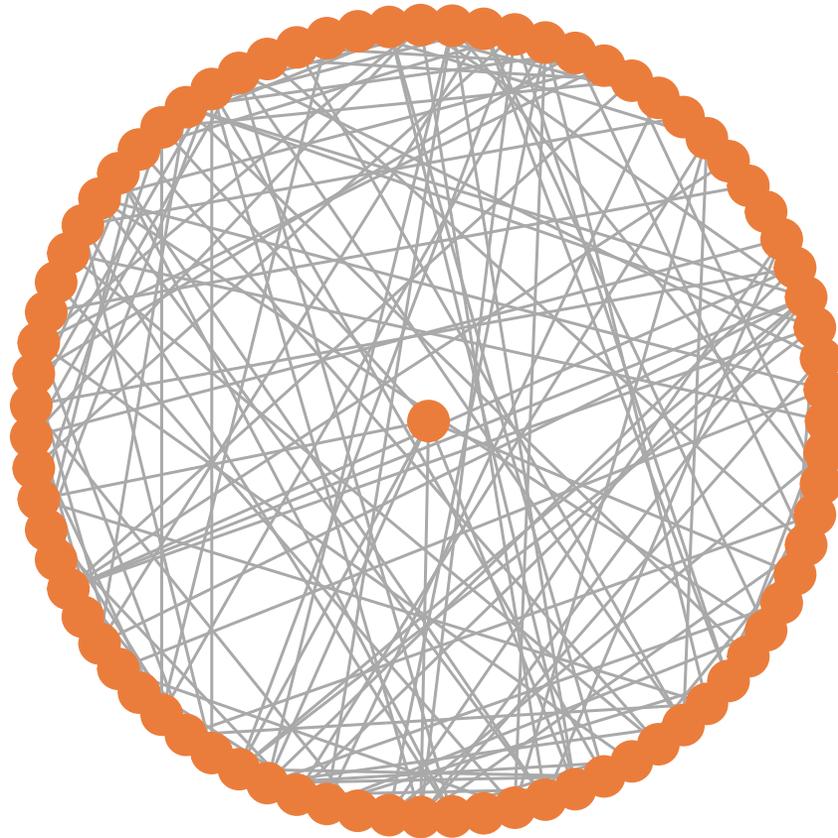


Não é mínimo!

# Componentes

---

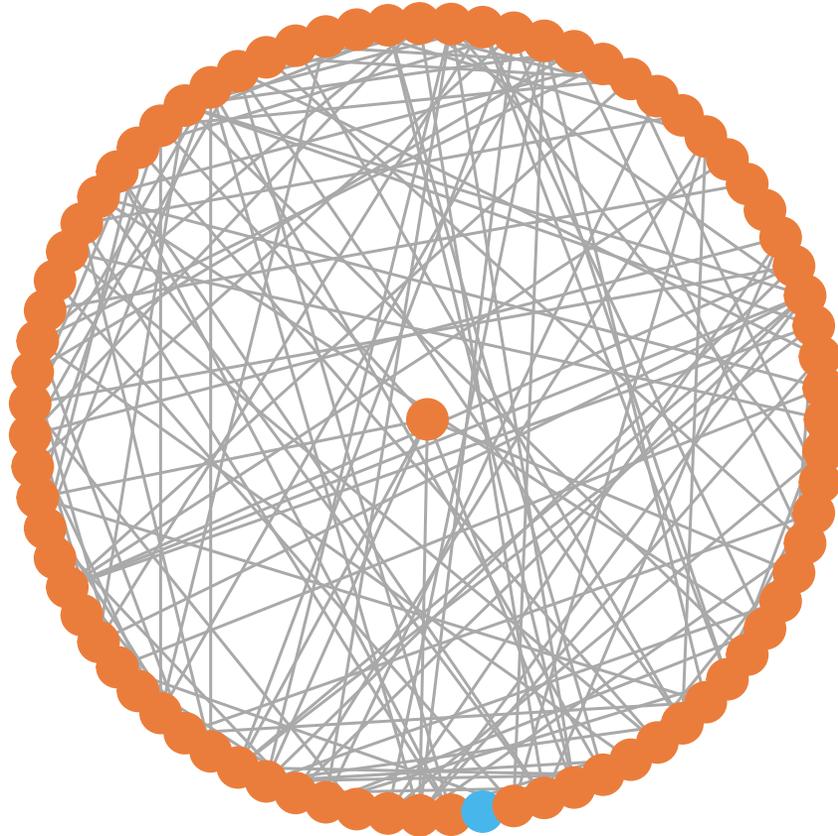
- Como descobrir número de componentes da rede?



# Componentes

---

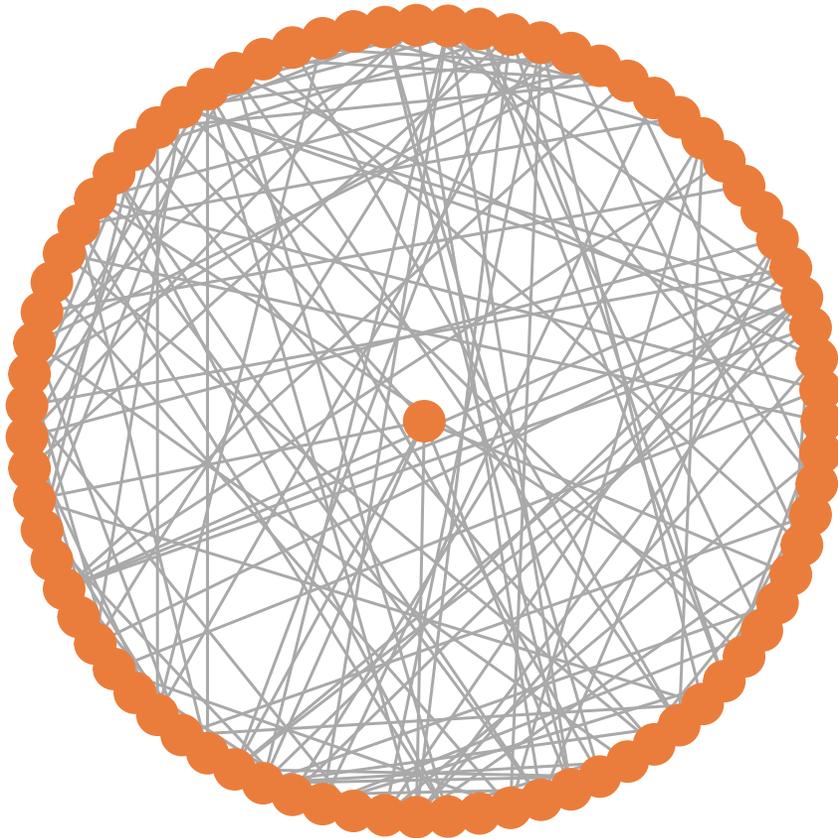
- Como descobrir número de componentes da rede?



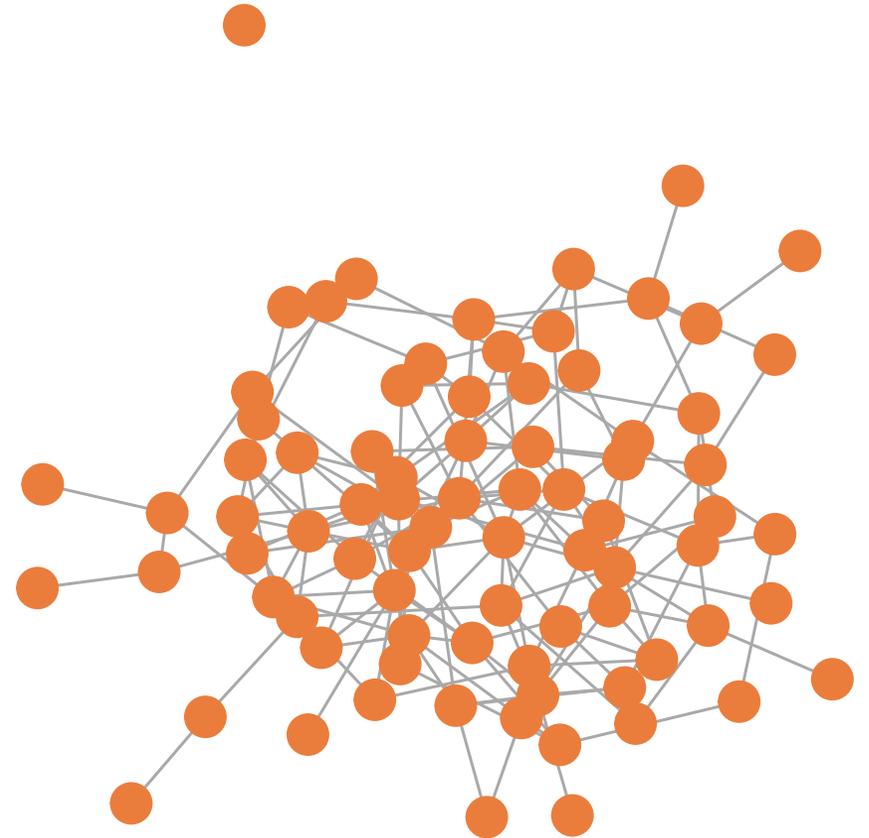
# Componentes

---

- Como descobrir número de componentes da rede?



=



# Componentes

---

- Como descobrir número de componentes da rede?  
Espectro da matriz Laplaciana

**Matriz Laplaciana:  $L = D - A$**



Matriz com os graus dos nós

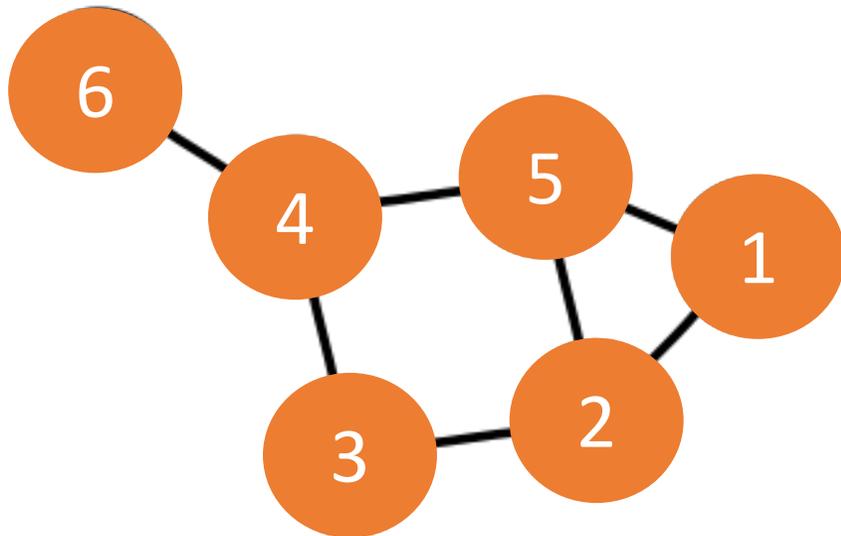
Matriz de adjacência ou  
Matriz de interações

# Componentes

---

- Como descobrir número de componentes da rede?  
Espectro da matriz Laplaciana

**Matriz Laplaciana:  $L = D - A$**



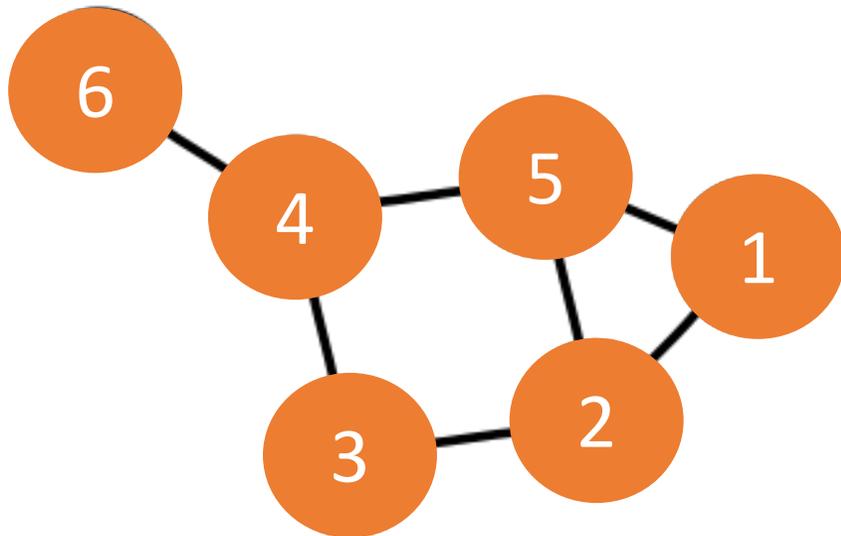
$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Componentes

---

- Como descobrir número de componentes da rede?  
Espectro da matriz Laplaciana

**Matriz Laplaciana:  $L = D - A$**



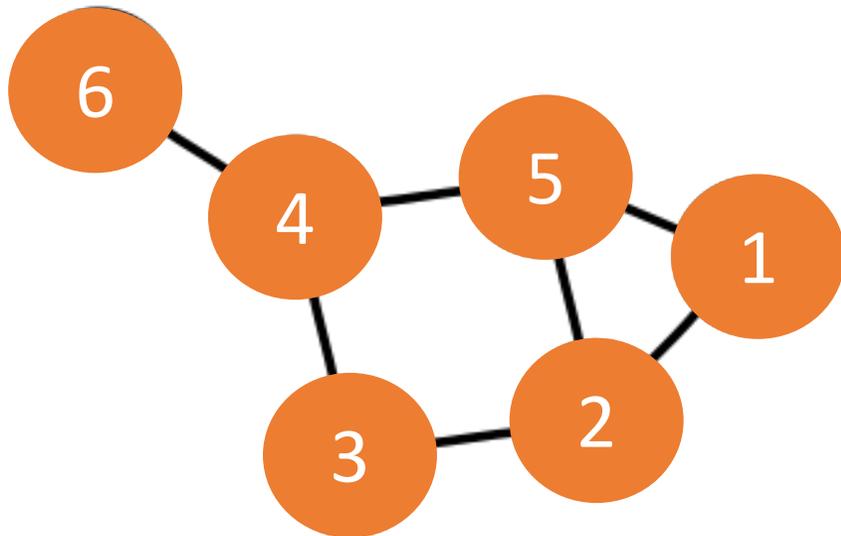
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# Componentes

---

- Como descobrir número de componentes da rede?  
Espectro da matriz Laplaciana

**Matriz Laplaciana:  $L = D - A$**



**=**

$A =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# Componentes

---

- Como descobrir número de componentes da rede?

Espectro da matriz Laplaciana

**Matriz Laplaciana:  $L = D - A$**

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Componentes

---

- Como descobrir número de componentes da rede?

Espectro da matriz Laplaciana

$$L = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Componentes

---

- Como descobrir número de componentes da rede?

**Espectro** da matriz Laplaciana



Conjunto de autovalores de uma matriz

$$L = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Componentes

---

- Como descobrir número de componentes da rede?

## Espectro da matriz Laplaciana

Conjunto de **autovalores** de uma matriz

Números que capturam propriedades de uma matriz

$$L = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Componentes

---

- Como descobrir número de componentes da rede?

**Espectro** da matriz Laplaciana

$$L = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Spec}(L) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6\}$$

# Componentes

---

- Como descobrir número de componentes da rede?

## Espectro da matriz Laplaciana

$$L = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Spec}(L) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6\}$$

$$0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4 \leq \lambda_5 \leq \lambda_6$$

# Componentes

---

- Como descobrir número de componentes da rede?

## Espectro da matriz Laplaciana

$$L = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Spec}(L) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6\}$$

$$0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4 \leq \lambda_5 \leq \lambda_6$$

**Multiplicidade do autovalor nulo** corresponde  
ao **número de componentes** de uma rede

# Componentes

---

- Como descobrir número de componentes da rede?

## Espectro da matriz Laplaciana

$$L = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Spec}(L) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6\}$$

$$0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4 \leq \lambda_5 \leq \lambda_6$$

$$\text{Spec}(L) = \{3.55\text{e-}15, 0.72, 1.68, 3.00, 3.70, 4.89\}$$

# Componentes

---

- Como descobrir número de componentes da rede?

## Espectro da matriz Laplaciana

$$L = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Spec}(L) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6\}$$

$$0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4 \leq \lambda_5 \leq \lambda_6$$

$$\text{Spec}(L) = \{0.00, 0.72, 1.68, 3.00, 3.70, 4.89\}$$

# Conteúdo

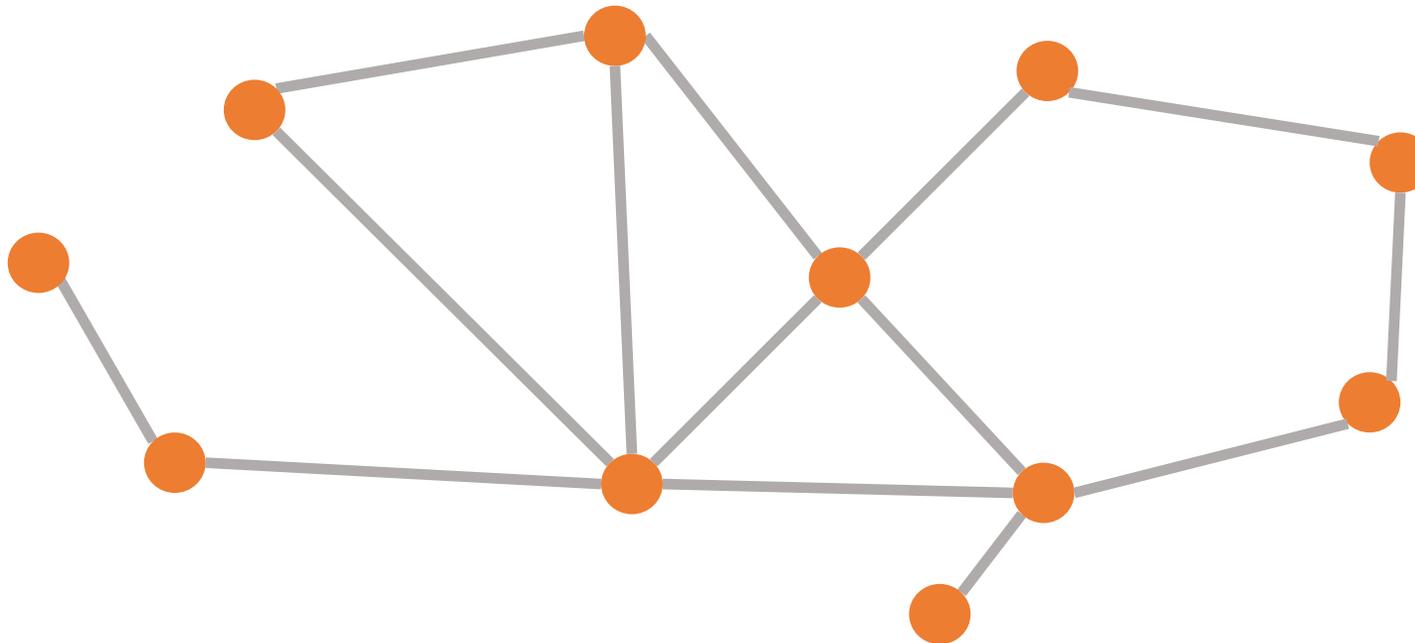
---

- 1) Componentes ou Compartimentos
- 2) Cliques
- 3) Clustering
- 4) Modularidade ou Comunidades
- 5) Exemplos
- 6) Resumo

# Cliques

---

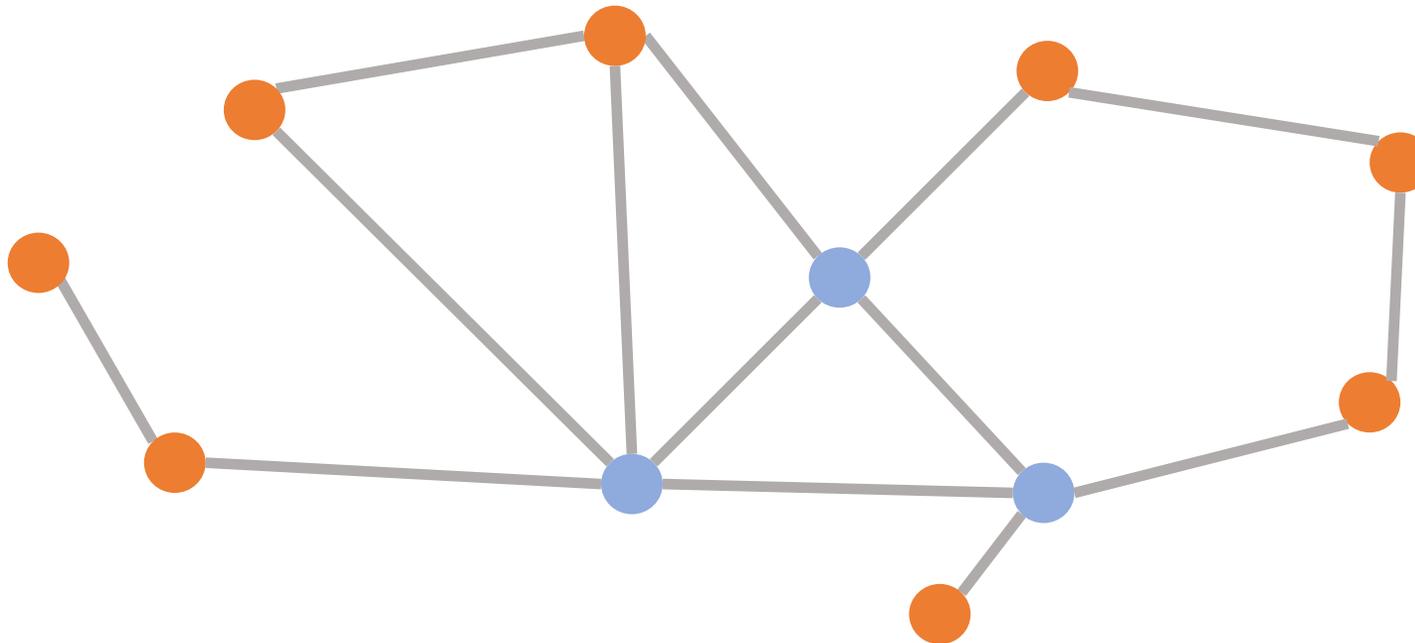
- **Cliques** são sub-grafos/sub-redes **totalmente conectados**, ou **sub-grafos completos**.
- **Cliques** são **subconjuntos** de vértices/nós tal que qualquer vértice/nó  $i$  deste subconjunto é ligado a todos os vértices/nós  $j$  deste subconjunto.



# Cliques

---

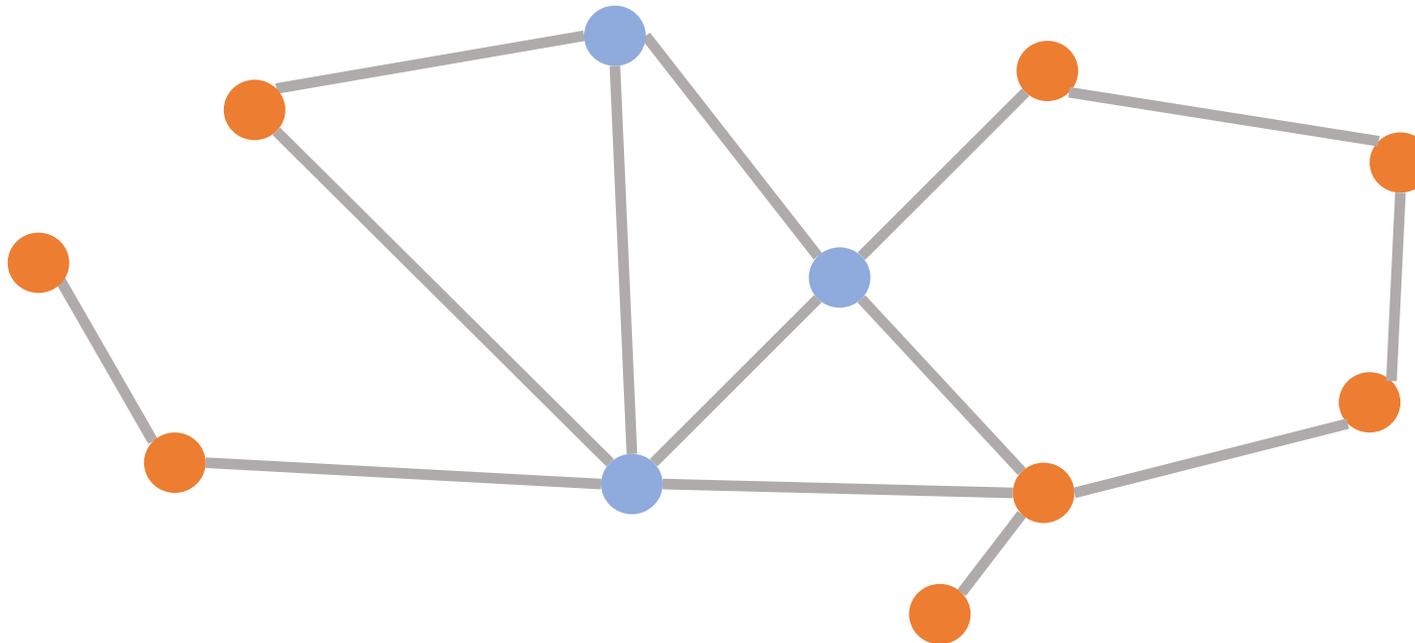
- **Cliques** são sub-grafos/sub-redes **totalmente conectados**, ou **sub-grafos completos**.
- **Cliques** são **subconjuntos** de vértices/nós tal que qualquer vértice/nó  $i$  deste subconjunto é ligado a todos os vértices/nós  $j$  deste subconjunto.



# Cliques

---

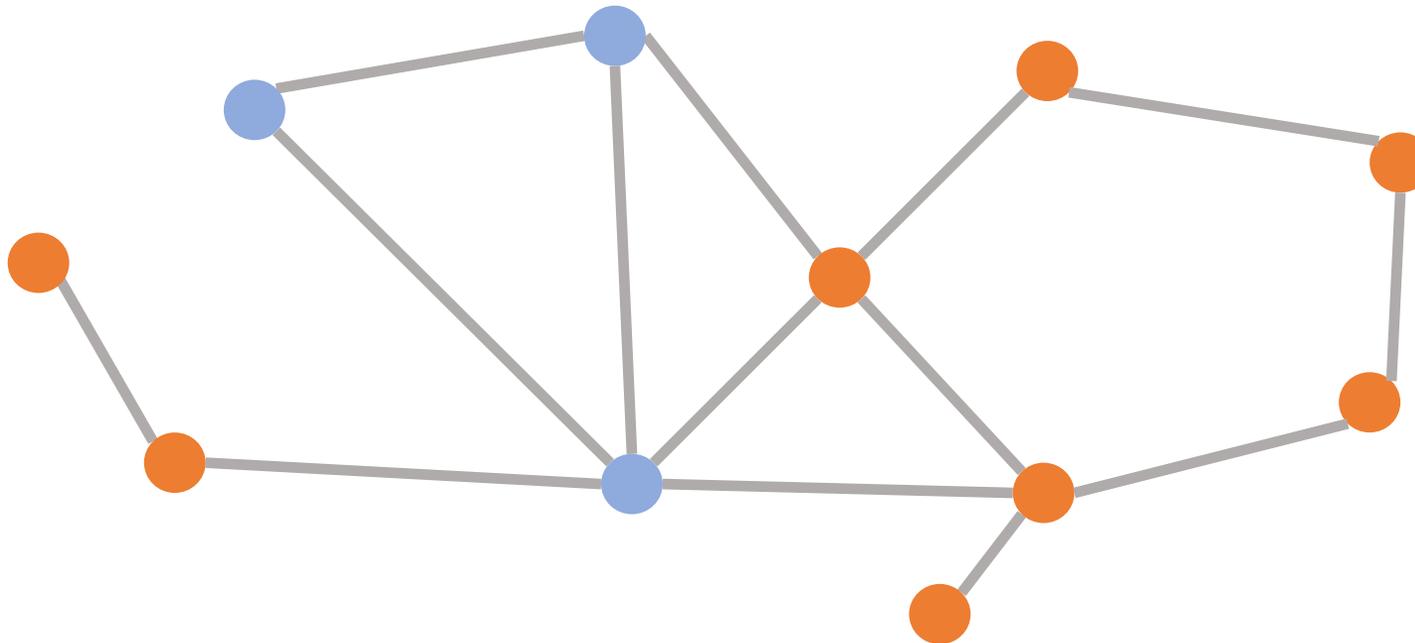
- **Cliques** são sub-grafos/sub-redes **totalmente conectados**, ou **sub-grafos completos**.
- **Cliques** são **subconjuntos** de vértices/nós tal que qualquer vértice/nó  $i$  deste subconjunto é ligado a todos os vértices/nós  $j$  deste subconjunto.



# Cliques

---

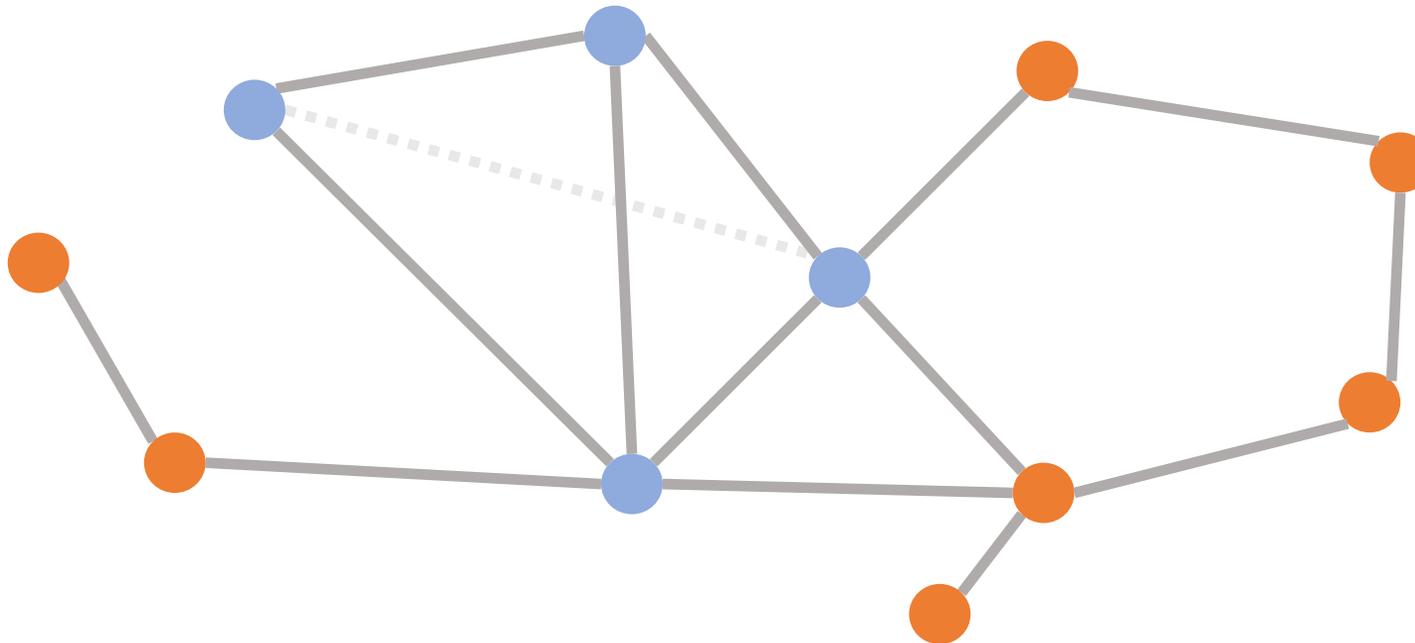
- **Cliques** são sub-grafos/sub-redes **totalmente conectados**, ou **sub-grafos completos**.
- **Cliques** são **subconjuntos** de vértices/nós tal que qualquer vértice/nó  $i$  deste subconjunto é ligado a todos os vértices/nós  $j$  deste subconjunto.



# Cliques

---

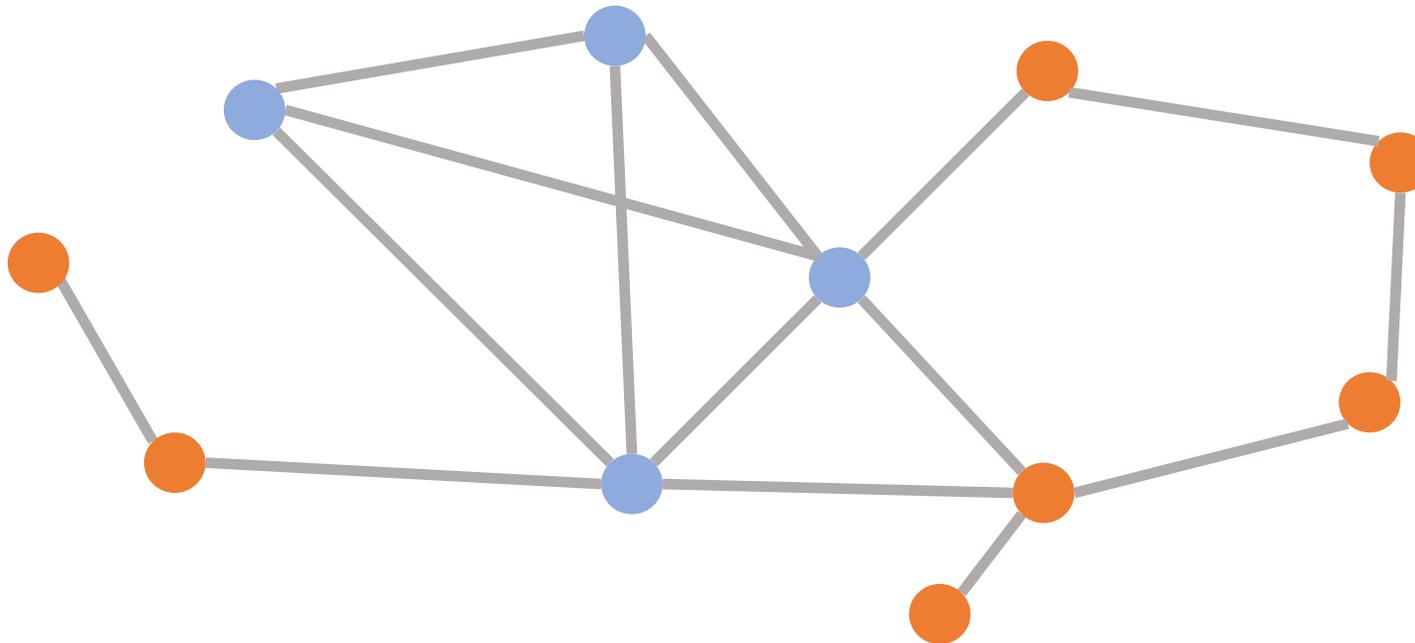
- **Cliques** são sub-grafos/sub-redes **totalmente conectados**, ou **sub-grafos completos**.
- **Cliques** são **subconjuntos** de vértices/nós tal que qualquer vértice/nó  $i$  deste subconjunto é ligado a todos os vértices/nós  $j$  deste subconjunto.



# Cliques

---

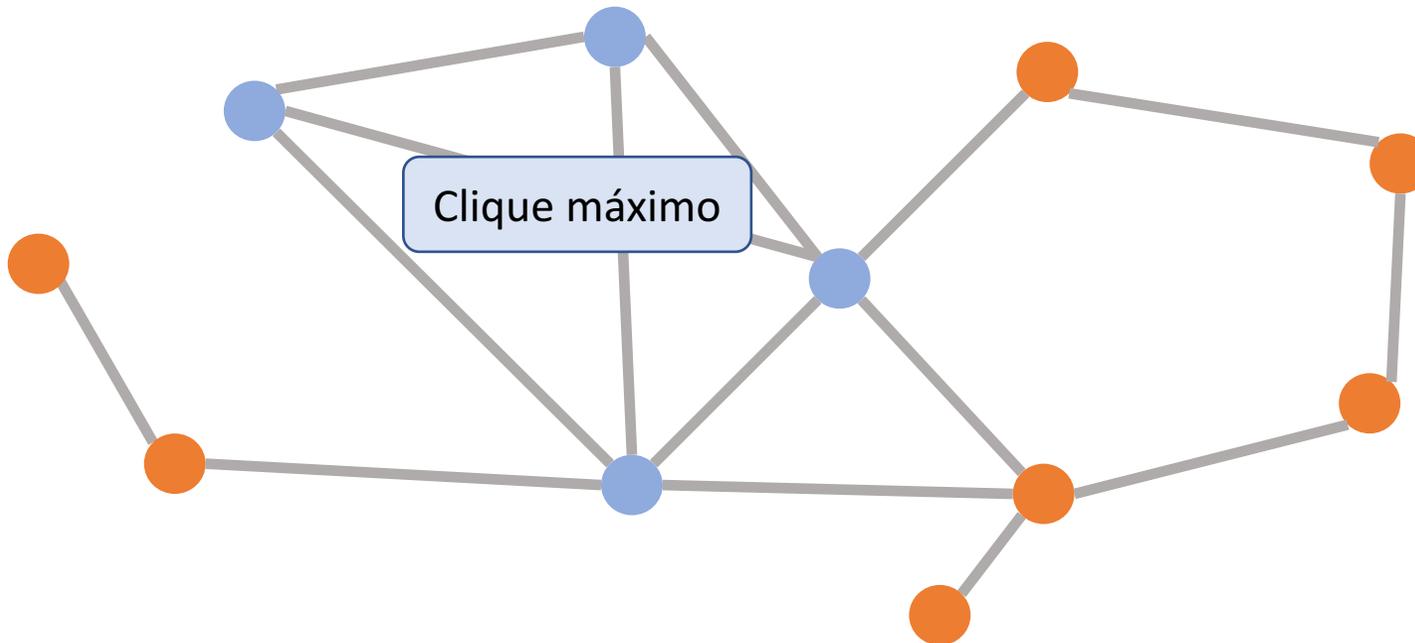
- **Clique maximal:** não há como aumentá-lo adicionando outro vértice/nó do grafo/rede.
- **Clique máximo:** é o clique de maior tamanho (em número de nós) de um grafo/rede.



# Cliques

---

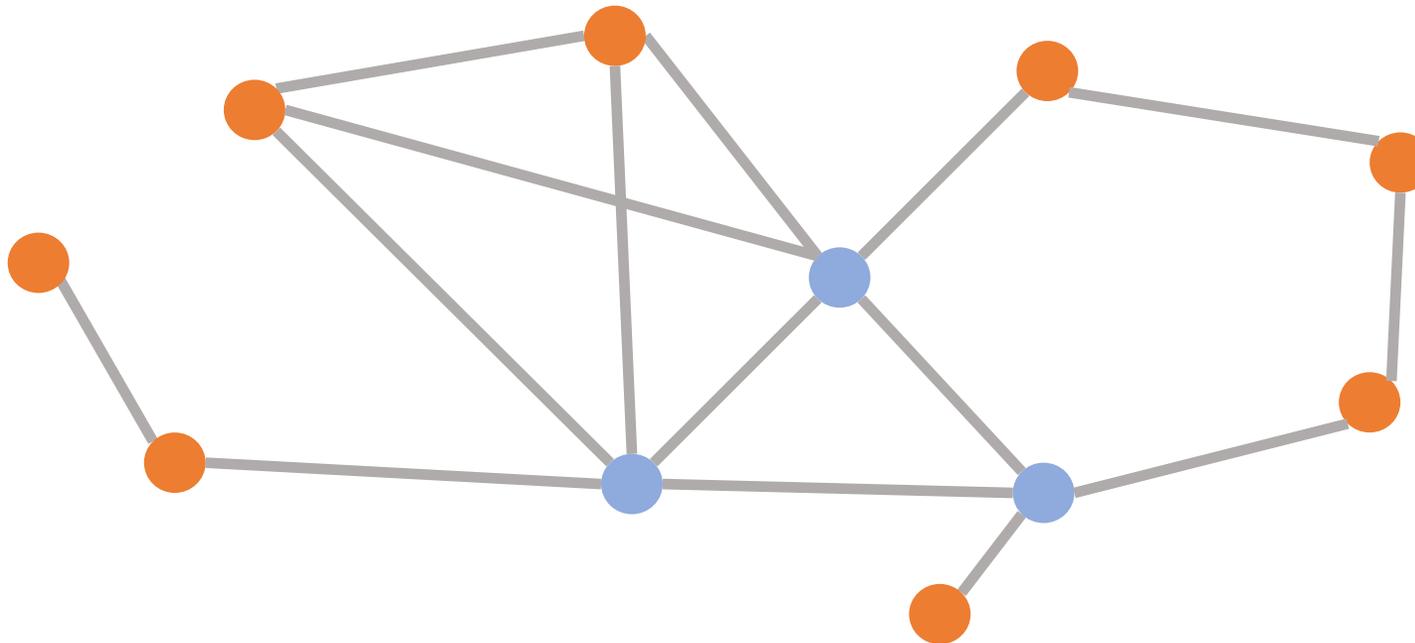
- **Clique maximal:** não há como aumentá-lo adicionando outro vértice/nó do grafo/rede.
- **Clique máximo:** é o clique de maior tamanho (em número de nós) de um grafo/rede.



# Cliques

---

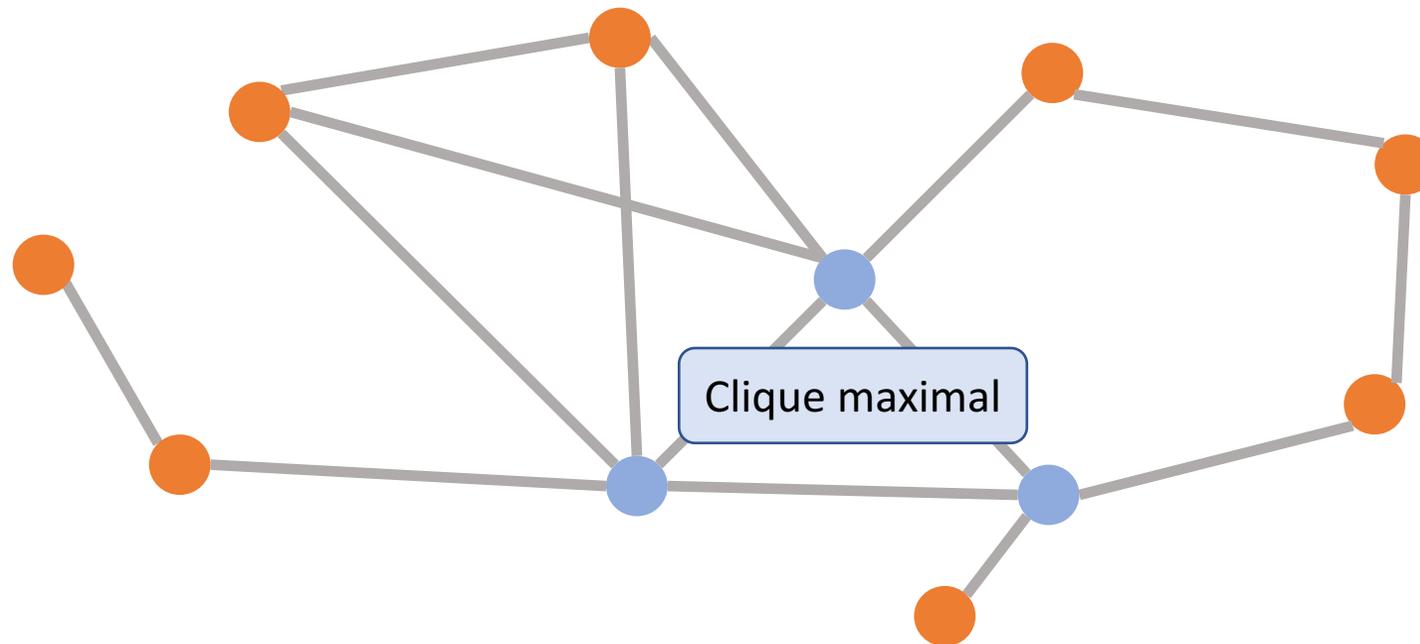
- **Clique maximal:** não há como aumentá-lo adicionando outro vértice/nó do grafo/rede.
- **Clique máximo:** é o clique de maior tamanho (em número de nós) de um grafo/rede.



# Cliques

---

- **Clique maximal:** não há como aumentá-lo adicionando outro vértice/nó do grafo/rede.
- **Clique máximo:** é o clique de maior tamanho (em número de nós) de um grafo/rede.



# Cliques

---

- Como descobrir número cliques de uma rede? E quais são esses cliques?

# Cliques

---

- Como descobrir número cliques de uma rede? E quais são esses cliques?

Essa pode parecer uma tarefa fácil, mas não é! O problema do clique é um problema **NP-completo**, portanto demorado para se encontrar uma solução. Todas as possibilidades devem ser testadas e não há nenhuma forma clara de ser reduzir ou excluir alguns casos.

# Cliques

---

- Como descobrir número cliques de uma rede? E quais são esses cliques?

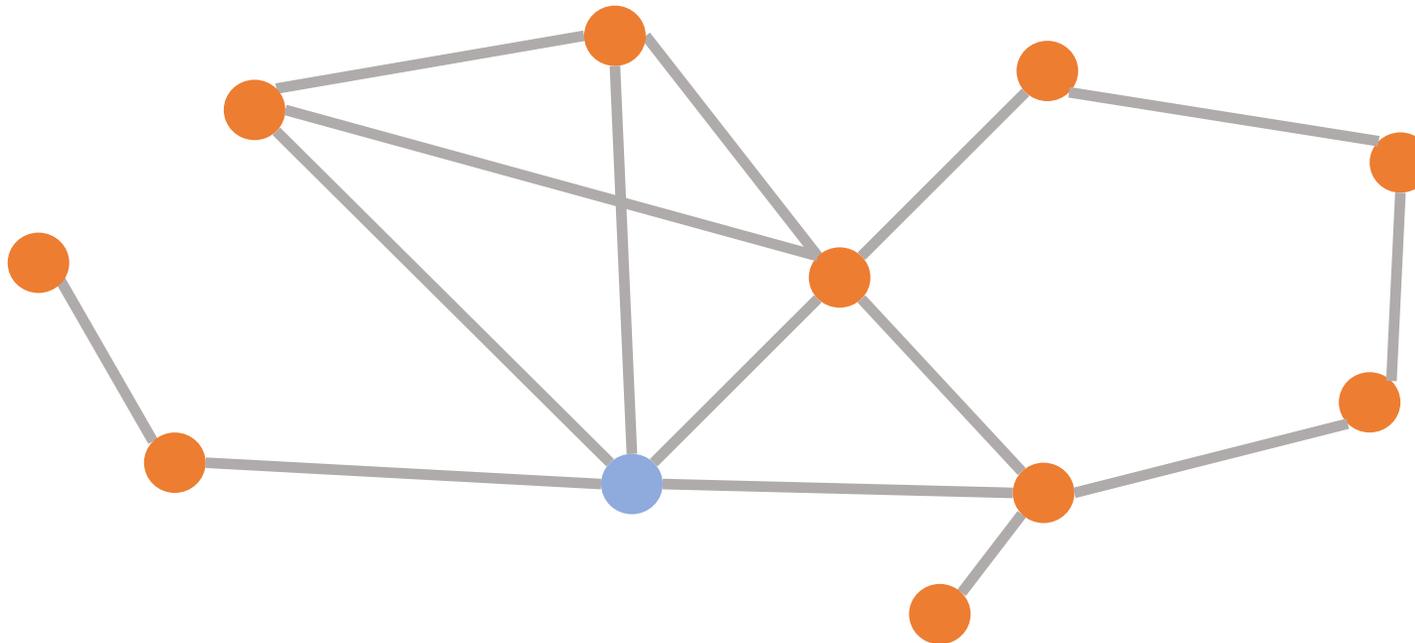
Essa pode parecer uma tarefa fácil, mas não é! O problema do clique é um problema **NP-completo**, portanto demorado para se encontrar uma solução. Todas as possibilidades devem ser testadas e não há nenhuma forma clara de ser reduzir ou excluir alguns casos.

Ainda assim, há diversos algoritmos desenvolvidos que buscam cliques máximos em redes/grafos e que funcionam rapidamente para redes pequenas e pouco densas.

# Cliques

---

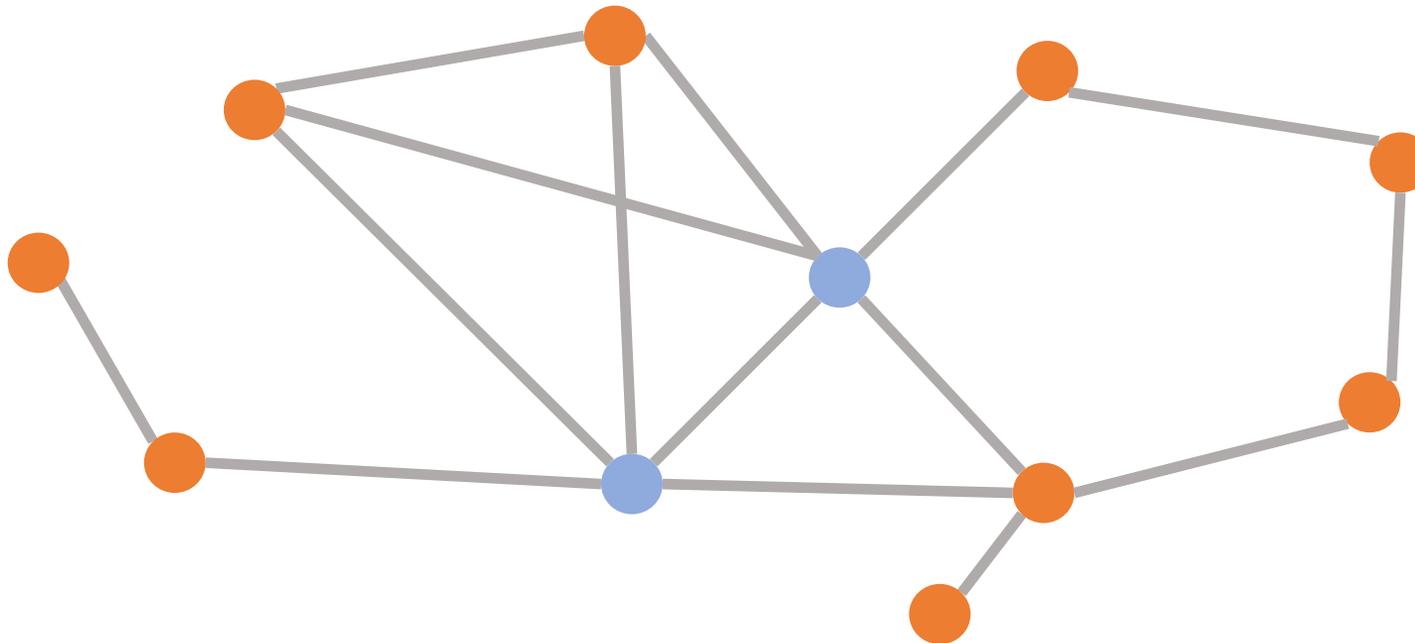
- Algoritmo para encontrar cliques máximos: *Branch & Bound*
- Particiono as soluções, analiso somente soluções factíveis e busco ótimos locais, busco cliques maximais e, por fim, cliques máximos.



# Cliques

---

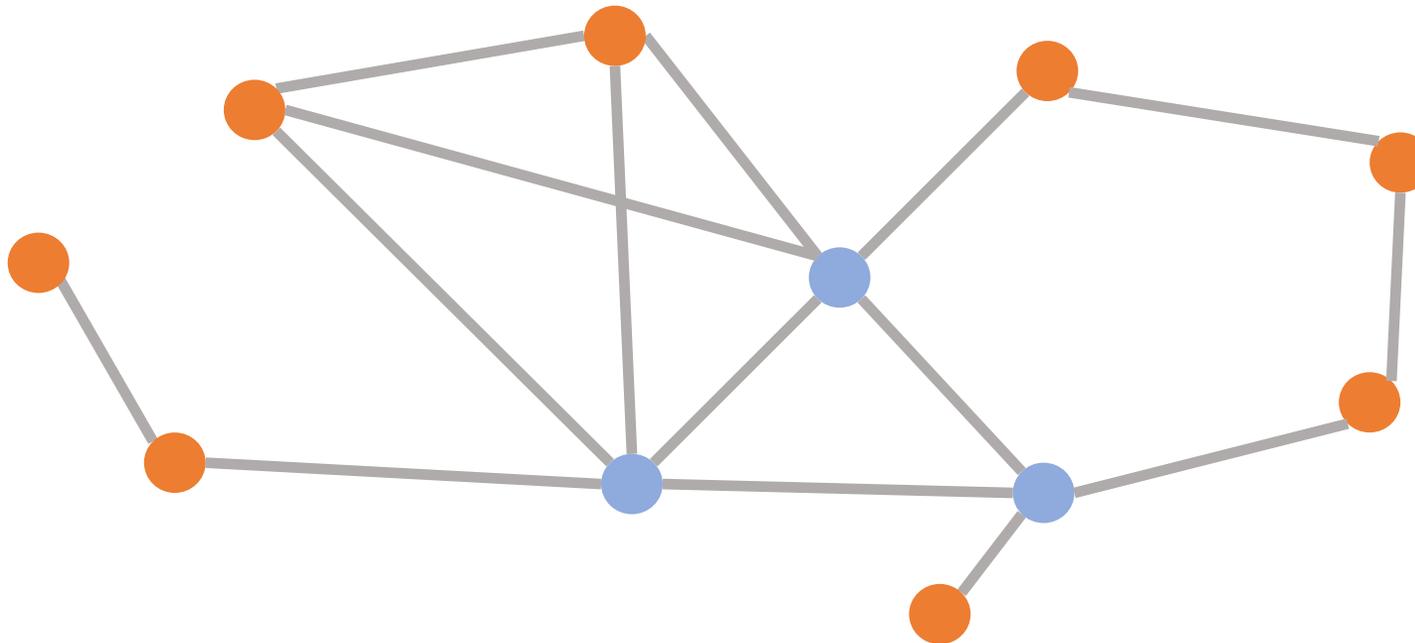
- Algoritmo para encontrar cliques máximos: *Branch & Bound*
- Particiono as soluções, analiso somente soluções factíveis e busco ótimos locais, busco cliques maximais e, por fim, cliques máximos.



# Cliques

---

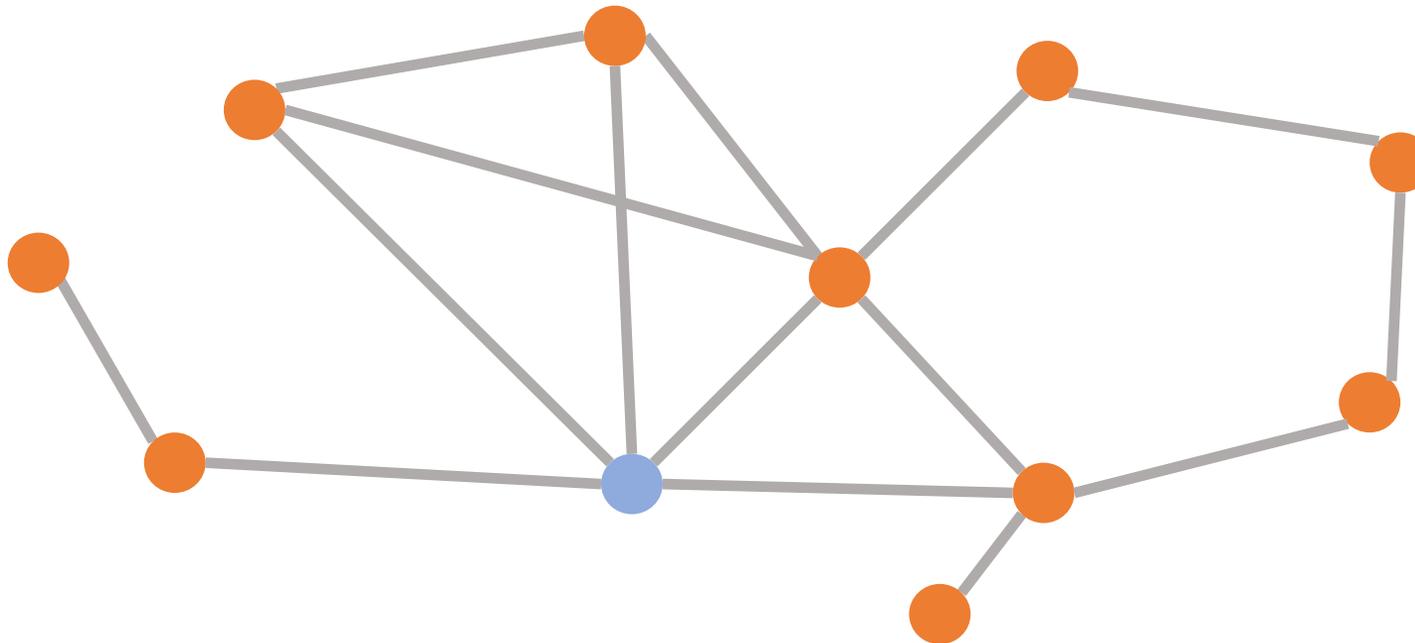
- Algoritmo para encontrar cliques máximos: *Branch & Bound*
- Particiono as soluções, analiso somente soluções factíveis e busco ótimos locais, busco cliques maximais e, por fim, cliques máximos.



# Cliques

---

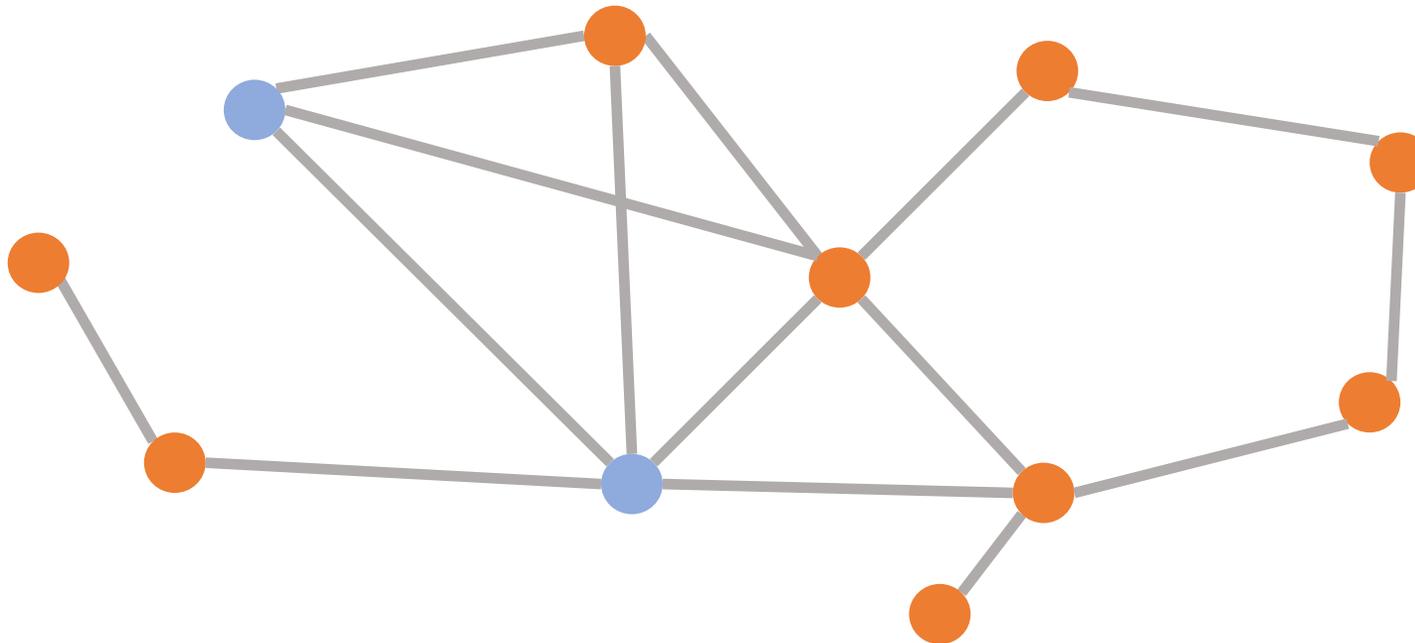
- Algoritmo para encontrar cliques máximos: *Branch & Bound*
- Particiono as soluções, analiso somente soluções factíveis e busco ótimos locais, busco cliques maximais e, por fim, cliques máximos.



# Cliques

---

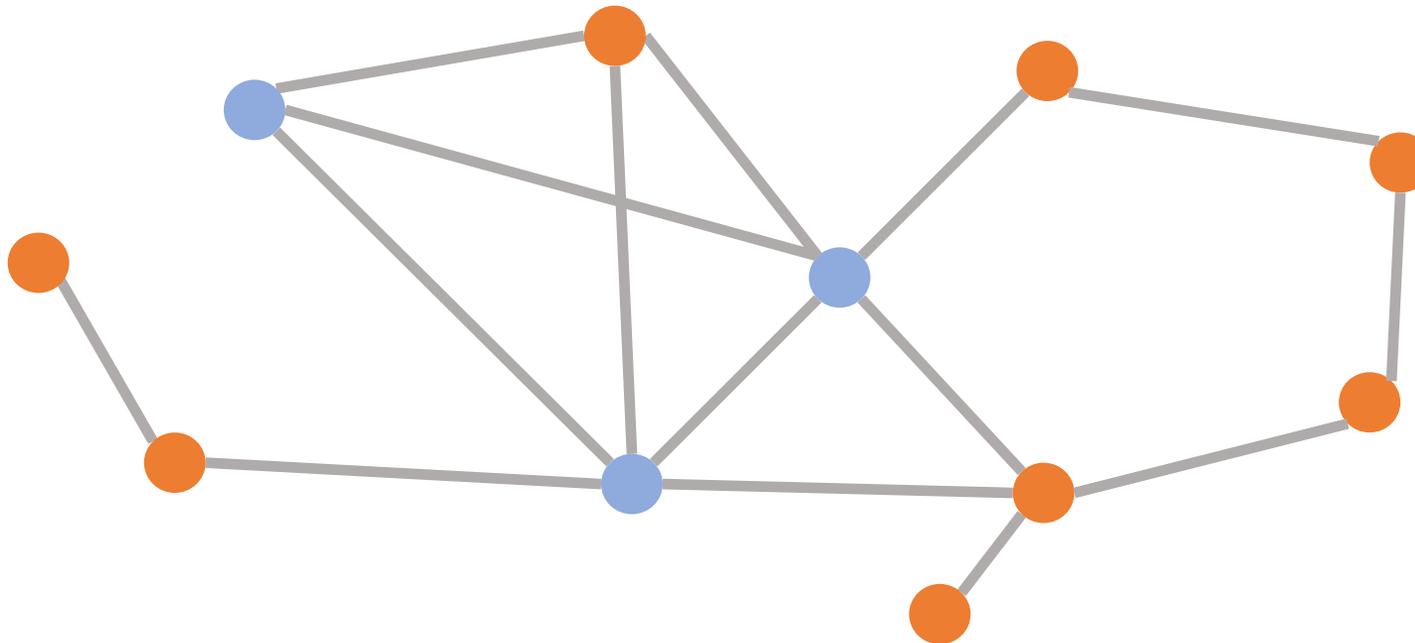
- Algoritmo para encontrar cliques máximos: *Branch & Bound*
- Particiono as soluções, analiso somente soluções factíveis e busco ótimos locais, busco cliques maximais e, por fim, cliques máximos.



# Cliques

---

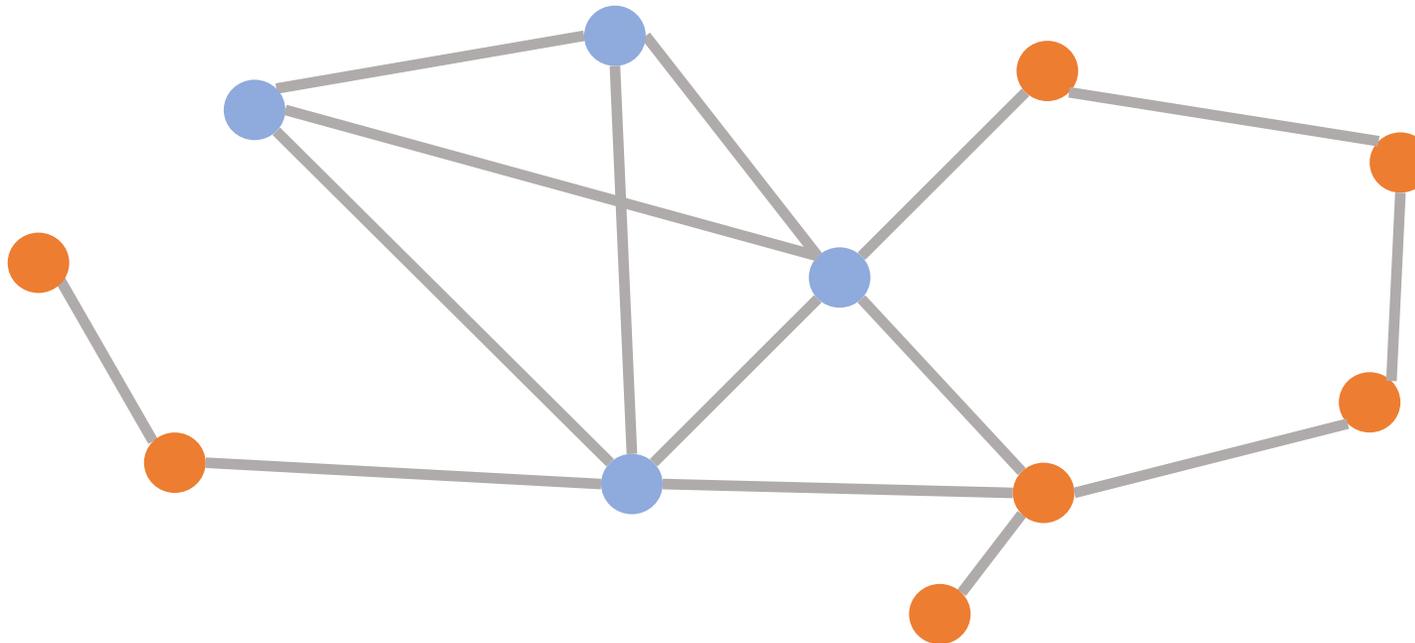
- Algoritmo para encontrar cliques máximos: *Branch & Bound*
- Particiono as soluções, analiso somente soluções factíveis e busco ótimos locais, busco cliques maximais e, por fim, cliques máximos.



# Cliques

---

- Algoritmo para encontrar cliques máximos: *Branch & Bound*
- Particiono as soluções, analiso somente soluções factíveis e busco ótimos locais, busco cliques maximais e, por fim, cliques máximos.



# Conteúdo

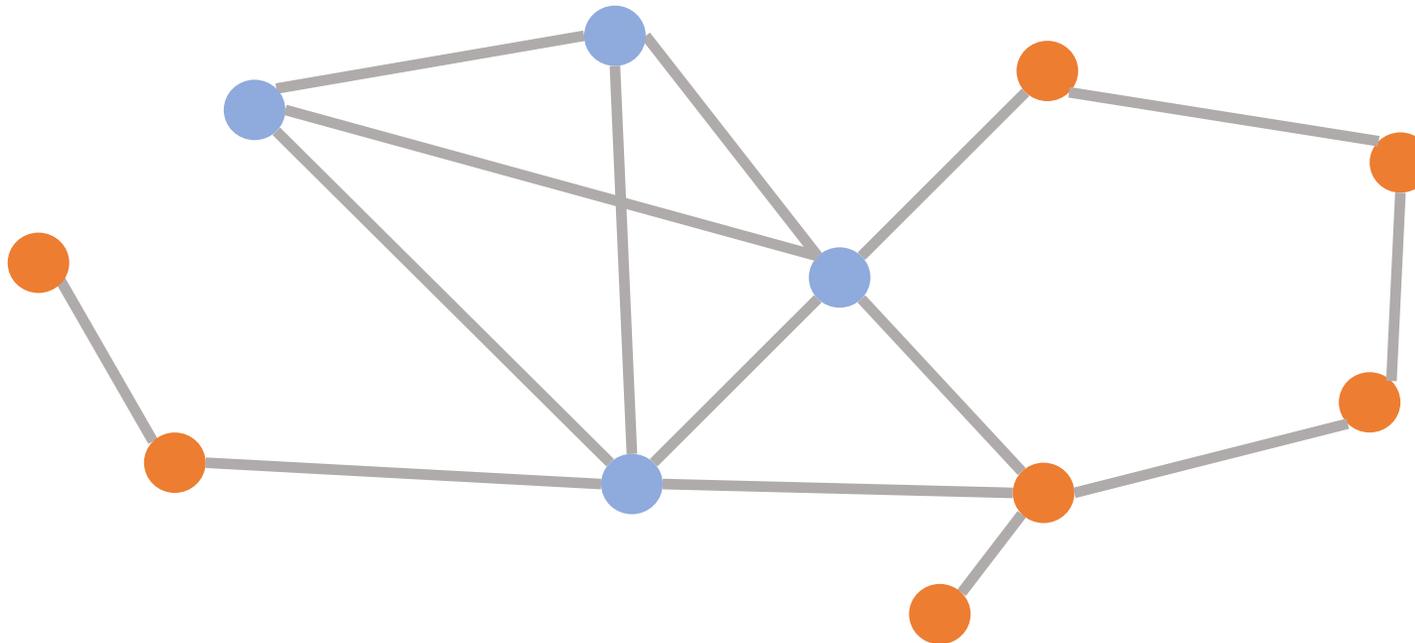
---

- 1) Componentes ou Compartimentos
- 2) Cliques
- 3) Clustering
- 4) Modularidade ou Comunidades
- 5) Exemplos
- 6) Resumo

# Clustering

---

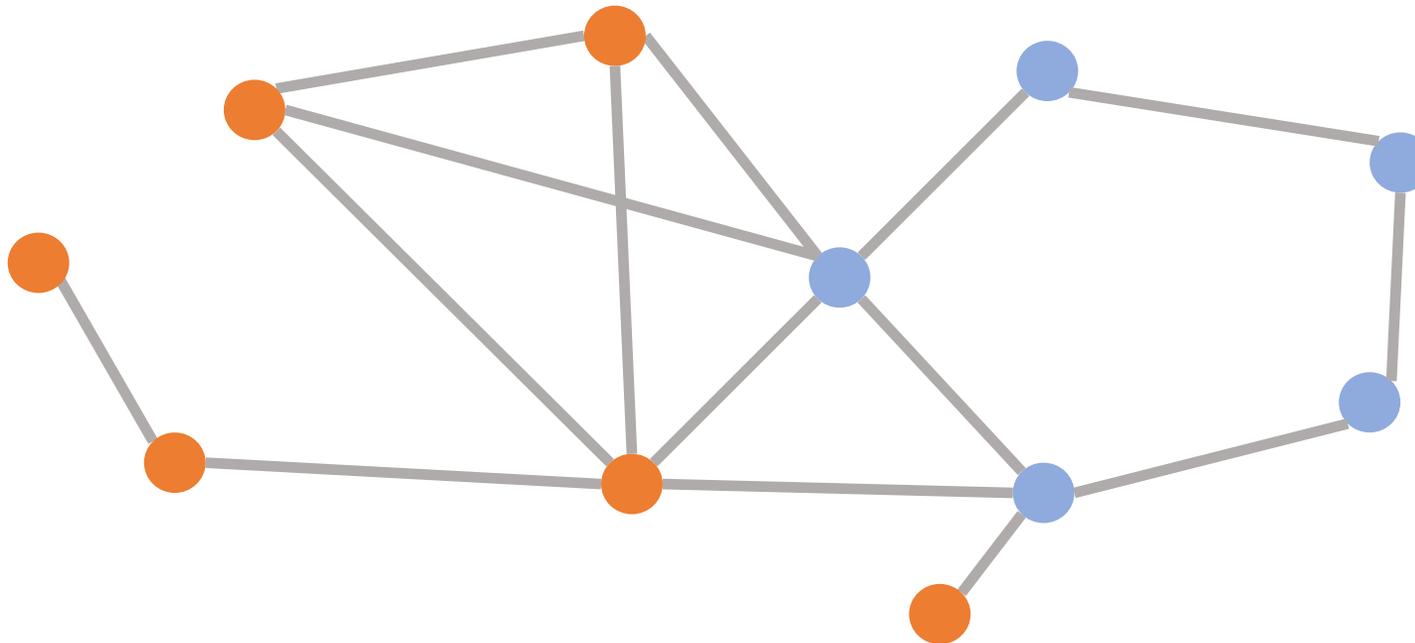
- *Clustering* ou agregação é um agrupamento de nós. Um clique é um cluster ou um aglomerado máximo.



# Clustering

---

- *Clustering* ou agregação é um agrupamento de nós. Um clique é um cluster ou um aglomerado máximo.



# Clustering

---

- Como descobrir a agregação de um grafo/rede ou de um subconjunto de nós de uma rede?

# Clustering

---

- Como descobrir a agregação de um grafo/rede ou de um subconjunto de nós de uma rede?

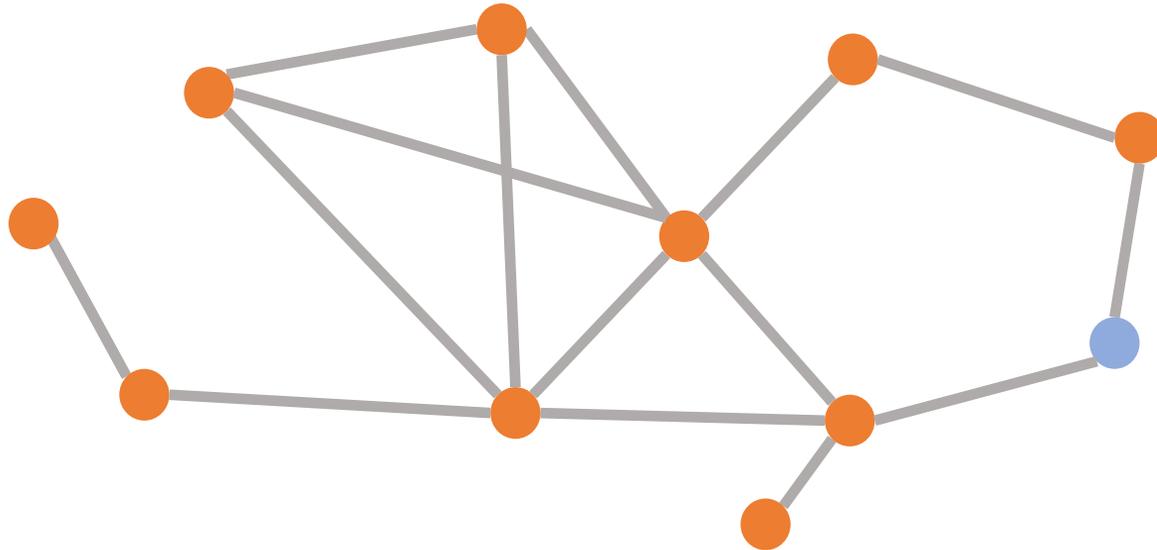
**Coeficiente de *clustering*** ou agregação: mede a “clicidade” de um certo nó com seus vizinhos.

# Clustering

---

- Como descobrir a agregação de um grafo/rede ou de um subconjunto de nós de uma rede?

**Coeficiente de *clustering* de um nó  $i$  ( $c_i$ )**



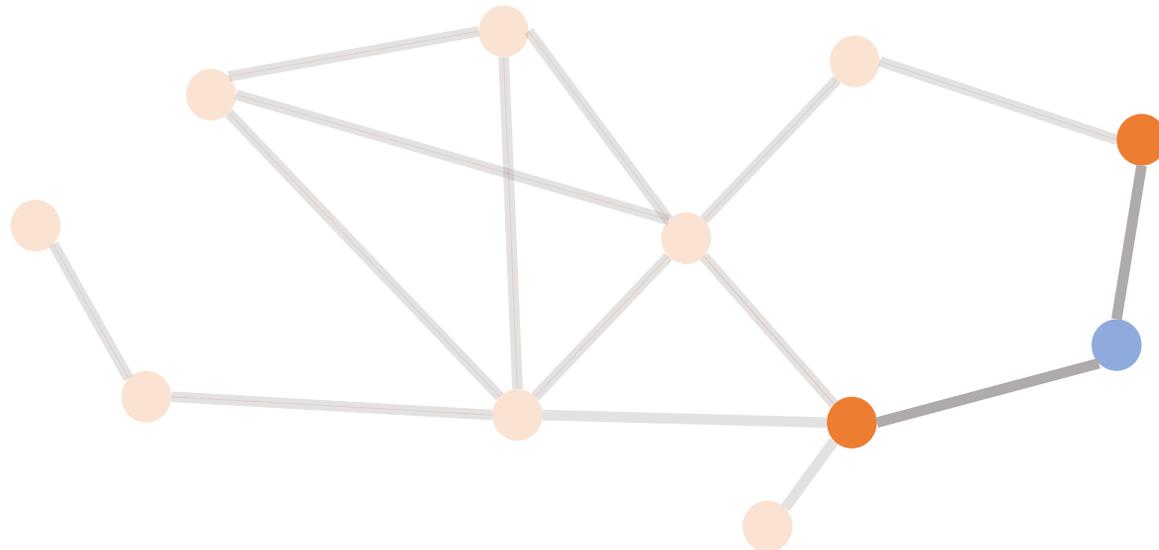
# Clustering

---

- Como descobrir a agregação de um grafo/rede ou de um subconjunto de nós de uma rede?

**Coeficiente de *clustering* de um nó  $i$  ( $c_i$ )**

Número de possíveis links entre vizinhos do azul: 1

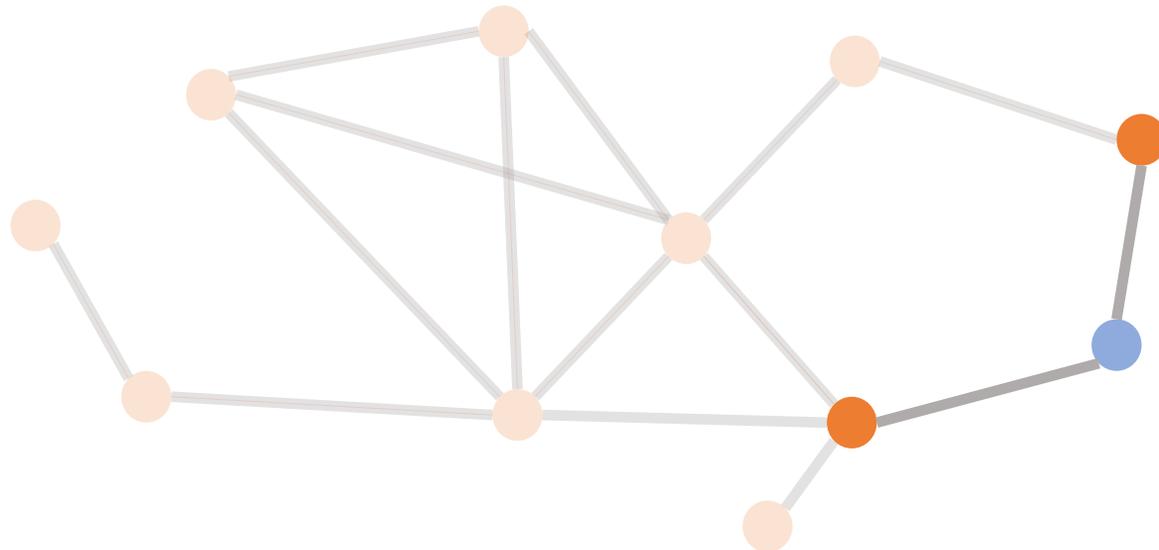


# Clustering

---

- Como descobrir a agregação de um grafo/rede ou de um subconjunto de nós de uma rede?

**Coeficiente de *clustering* de um nó  $i$  ( $c_i$ )**



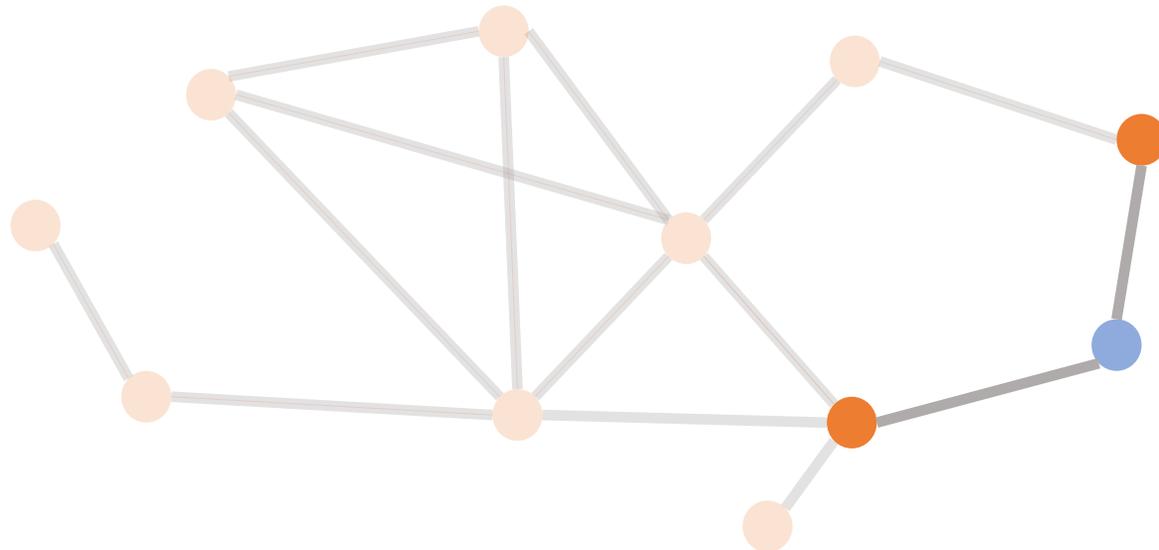
Número de possíveis links entre vizinhos do azul: 1

Número de links observados entre vizinhos do azul: 0

# Clustering

- Como descobrir a agregação de um grafo/rede ou de um subconjunto de nós de uma rede?

**Coeficiente de *clustering* de um nó  $i$  ( $c_i$ )**



Número de possíveis links entre vizinhos do azul: 1

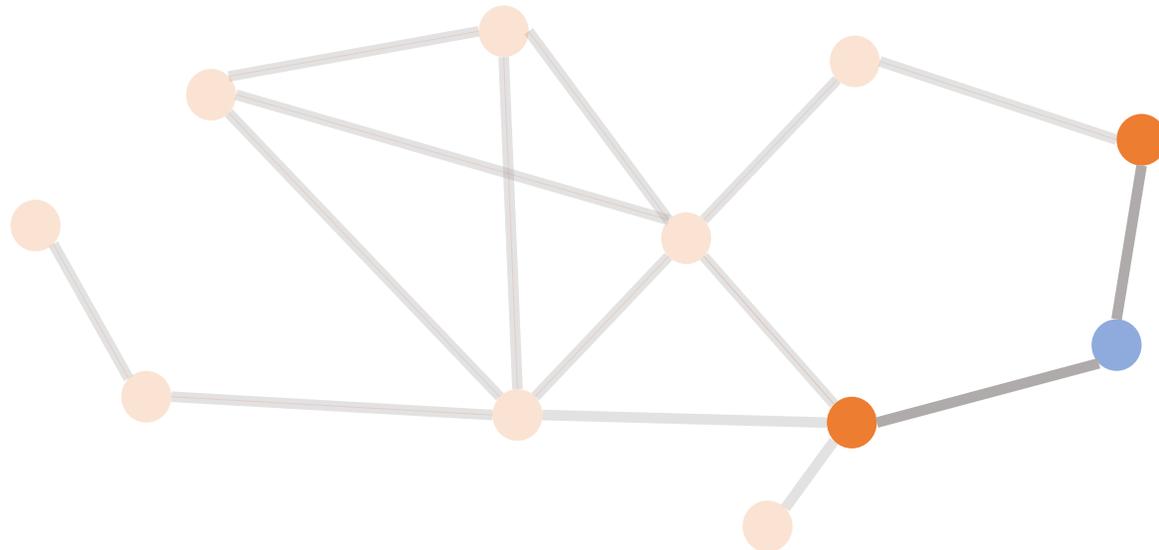
Número de links observados entre vizinhos do azul: 0

$$c_i = \frac{0}{1} = 0$$

# Clustering

- Como descobrir a agregação de um grafo/rede ou de um subconjunto de nós de uma rede?

**Coeficiente de *clustering* de um nó  $i$  ( $c_i$ )**



Número de possíveis links entre vizinhos do azul: 1

Número de links observados entre vizinhos do azul: 0

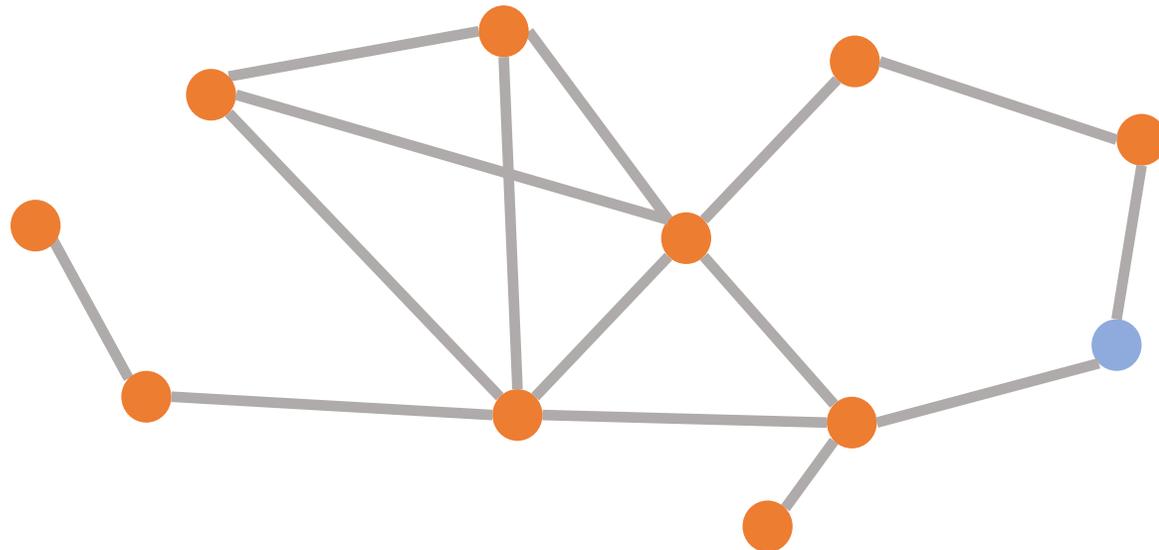
$$c_i = \frac{0}{1} = 0$$

# Clustering

---

- Como descobrir a agregação de um grafo/rede ou de um subconjunto de nós de uma rede?

**Coeficiente de *clustering* de um nó  $i$  ( $c_i$ )**



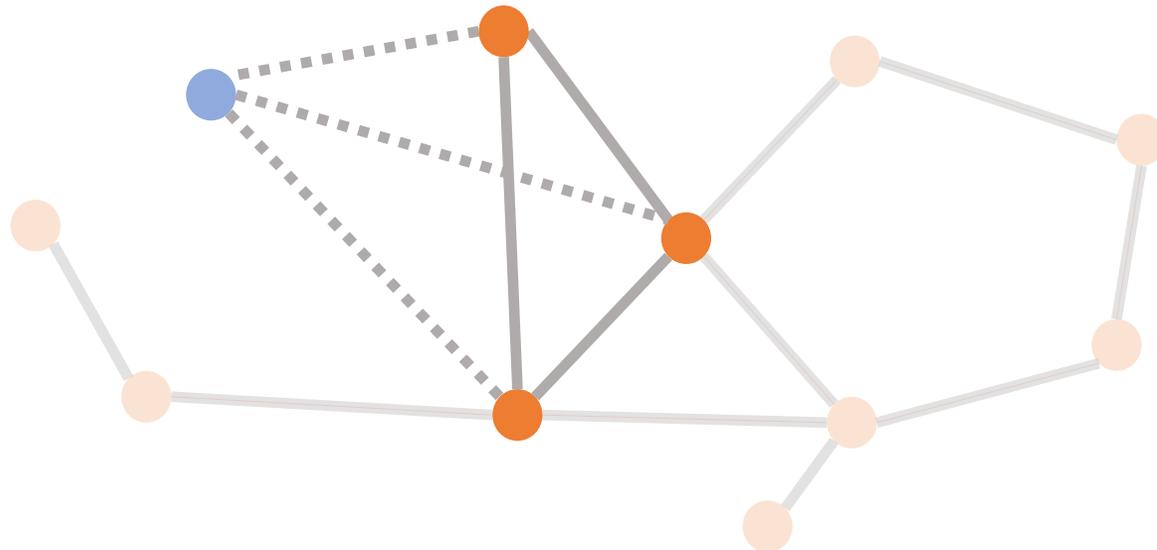
# Clustering

---

- Como descobrir a agregação de um grafo/rede ou de um subconjunto de nós de uma rede?

**Coeficiente de *clustering* de um nó  $i$  ( $c_i$ )**

Número de possíveis links entre vizinhos do azul: 3

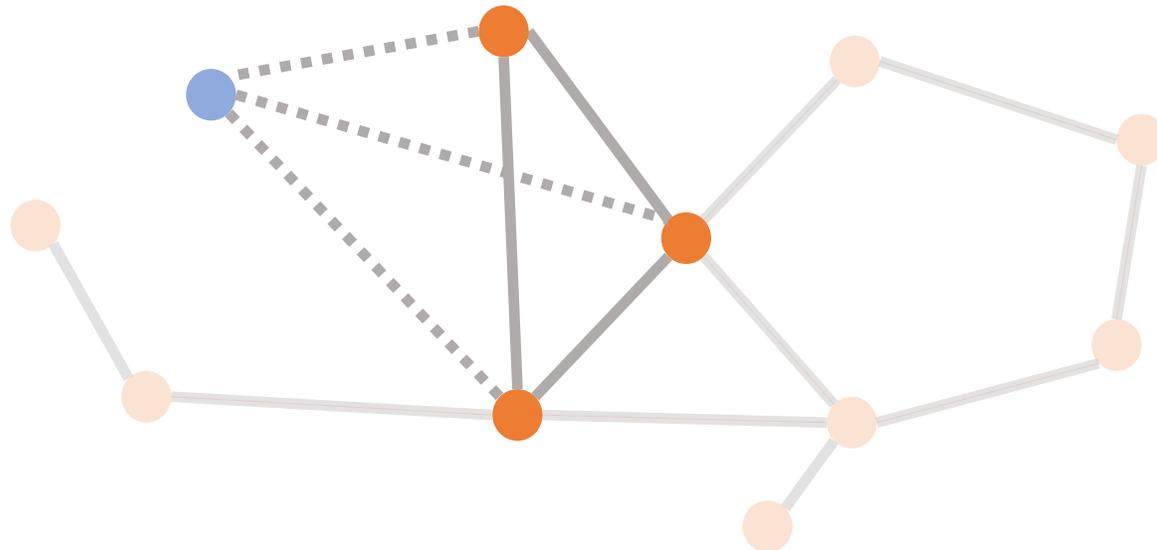


# Clustering

---

- Como descobrir a agregação de um grafo/rede ou de um subconjunto de nós de uma rede?

**Coeficiente de *clustering* de um nó  $i$  ( $c_i$ )**



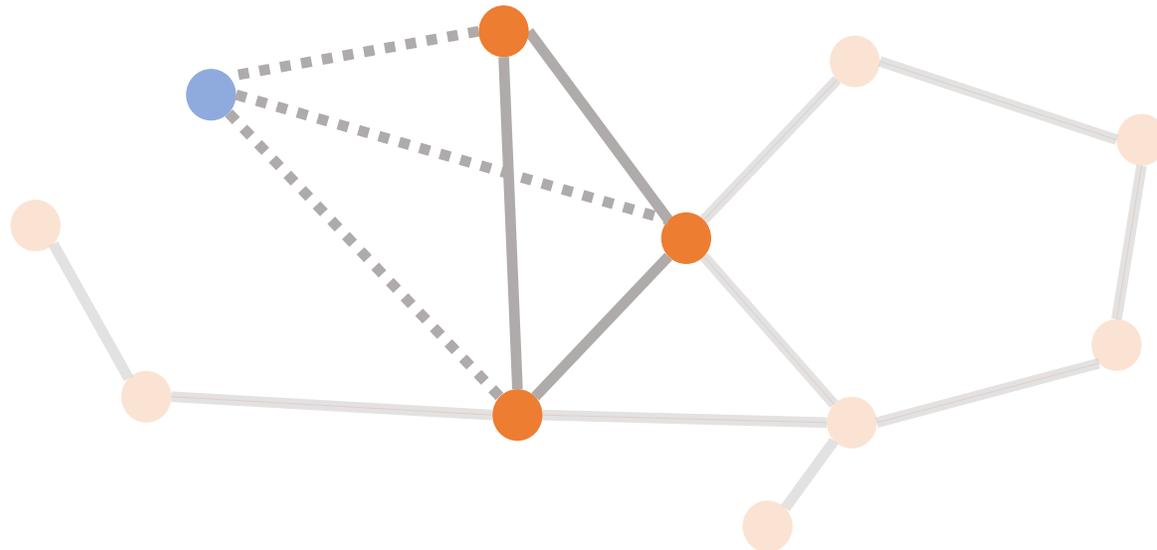
Número de possíveis links entre vizinhos do azul: 3

Número de links observados entre vizinhos do azul: 3

# Clustering

- Como descobrir a agregação de um grafo/rede ou de um subconjunto de nós de uma rede?

**Coeficiente de *clustering* de um nó  $i$  ( $c_i$ )**



Número de possíveis links entre vizinhos do azul: 3

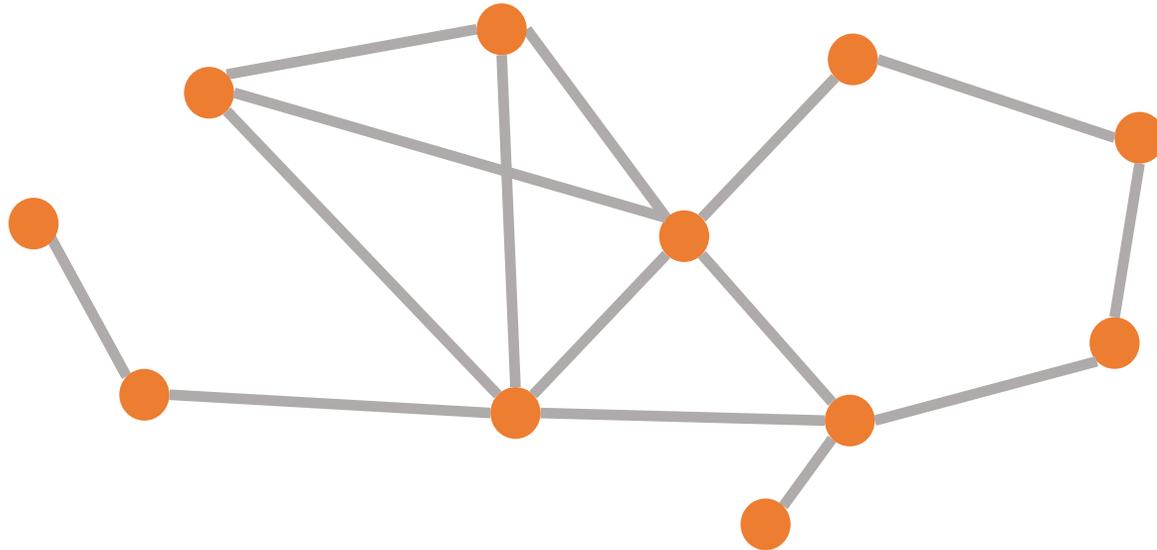
Número de links observados entre vizinhos do azul: 3

$$c_i = \frac{3}{3} = 1$$

# Clustering

- Como descobrir a agregação de um grafo/rede ou de um subconjunto de nós de uma rede?

**Coeficiente de *clustering* de um nó  $i$  ( $c_i$ )**



**Nó  $i$  com grau  $k_i$  :**

Número de possíveis links entre vizinhos de  $i$ :  $\frac{k_i(k_i-1)}{2}$

Número de links observados entre vizinhos do  $i$ :  $e$

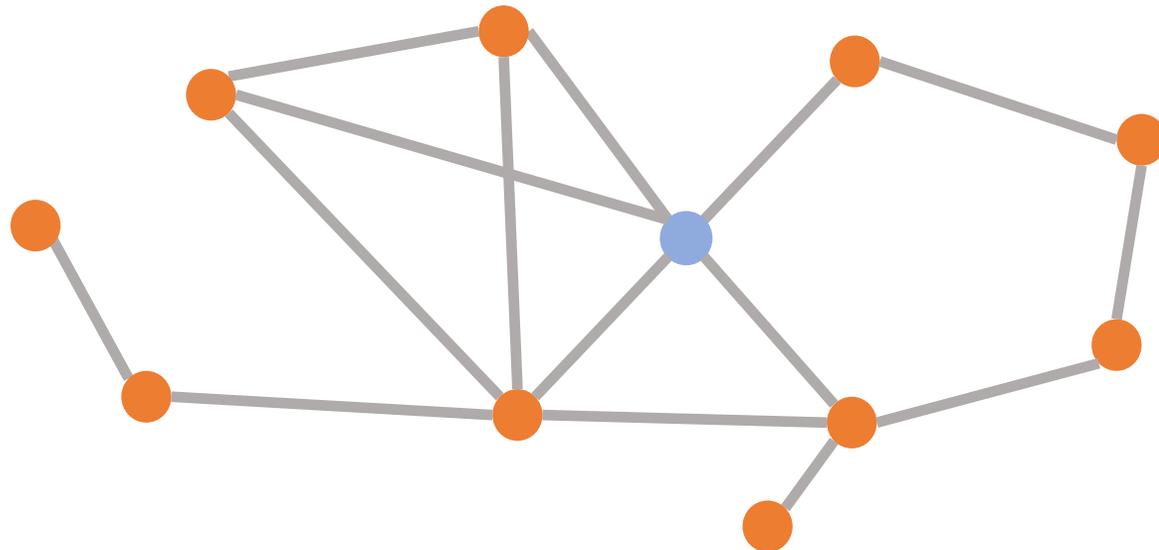
$$c_i = \frac{2e}{k_i(k_i-1)}$$

# Clustering

---

- Como descobrir a agregação de um grafo/rede ou de um subconjunto de nós de uma rede?

**Coeficiente de *clustering* de um nó  $i$  ( $c_i$ )**



Número de possíveis links entre vizinhos de  $i$ :

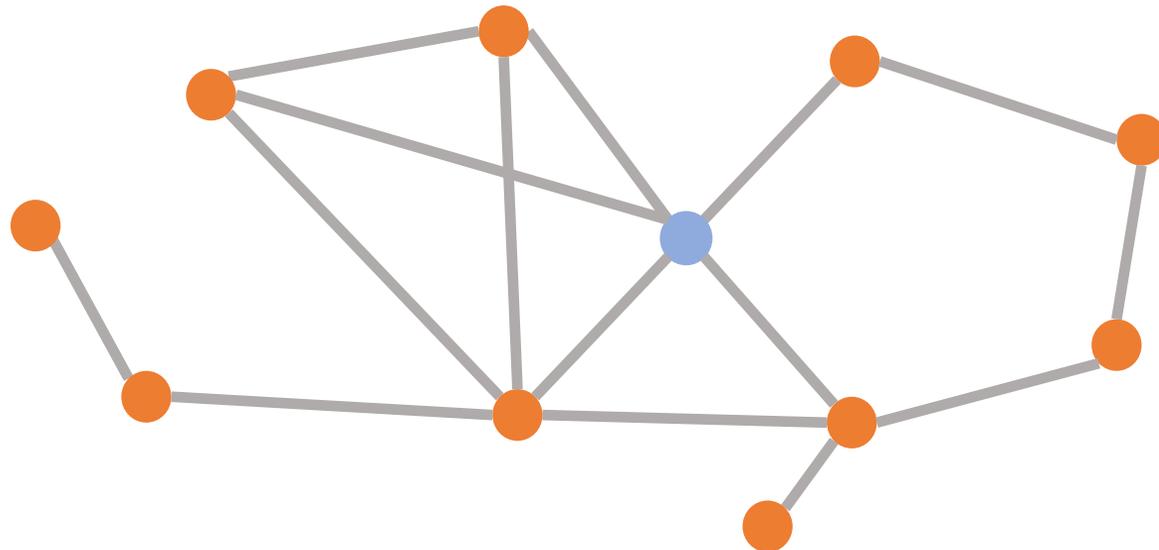
Número de links observados entre vizinhos do  $i$ :

# Clustering

---

- Como descobrir a agregação de um grafo/rede ou de um subconjunto de nós de uma rede?

**Coeficiente de *clustering* de um nó  $i$  ( $c_i$ )**



Número de possíveis links entre vizinhos de  $i$ :

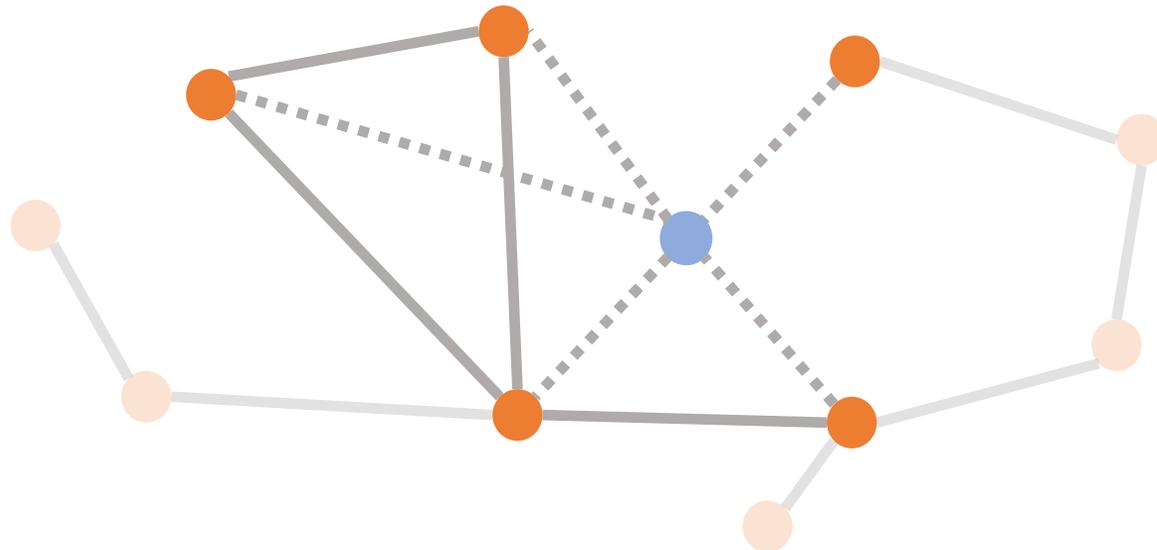
Número de links observados entre vizinhos do  $i$ :

Calcular o  $c_i =$

# Clustering

- Como descobrir a agregação de um grafo/rede ou de um subconjunto de nós de uma rede?

**Coeficiente de *clustering* de um nó  $i$  ( $c_i$ )**



Número de possíveis links entre vizinhos de  $i$ :  $5 \cdot 4 / 2 = 10$

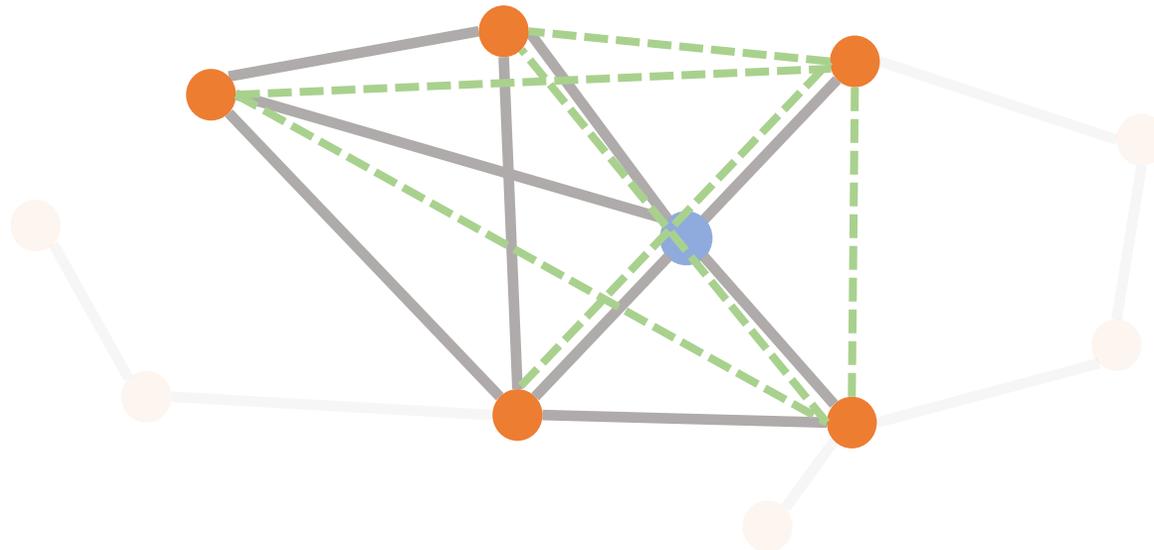
Número de links observados entre vizinhos do  $i$ : 4

$$c_i = \frac{4}{10} = 0.4$$

# Clustering

- Como descobrir a agregação de um grafo/rede ou de um subconjunto de nós de uma rede?

**Coeficiente de *clustering* de um nó  $i$  ( $c_i$ )**



Número de possíveis links entre vizinhos de  $i$ :  $5 \cdot 4 / 2 = 10$

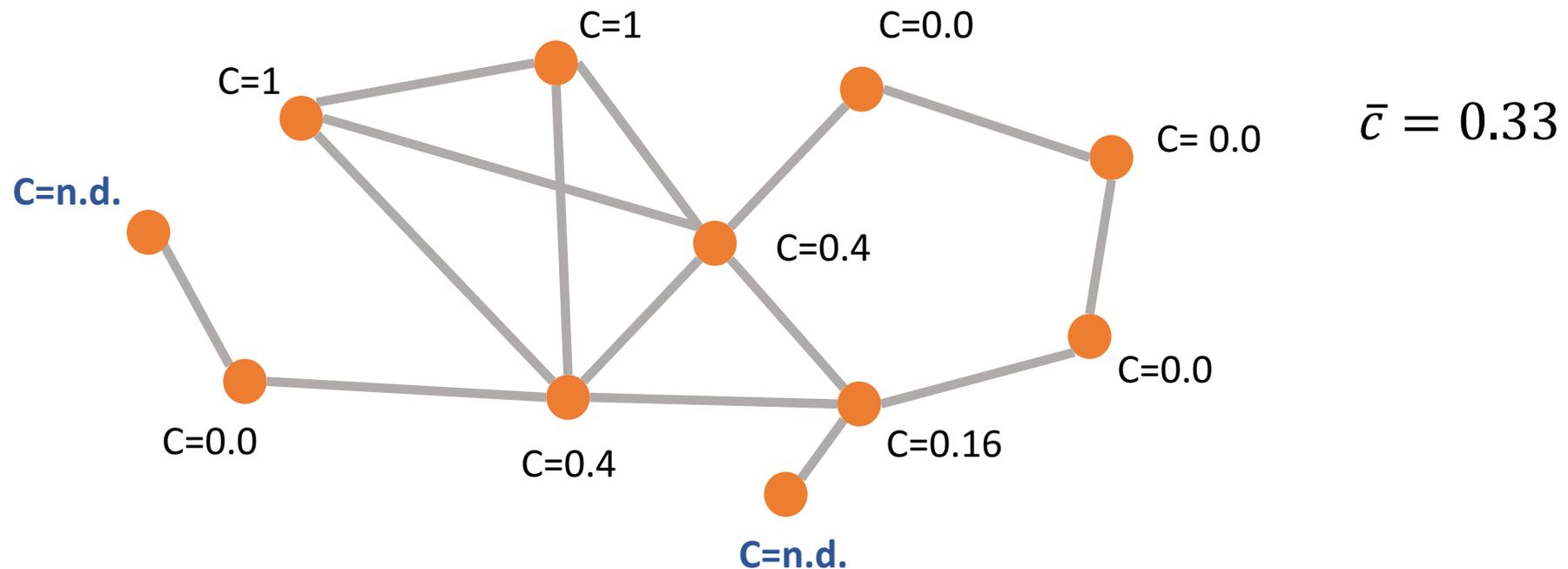
Número de links observados entre vizinhos do  $i$ : 4

$$c_i = \frac{4}{10} = 0.4$$

# Clustering

- Como descobrir a agregação de um grafo/rede ou de um subconjunto de nós de uma rede?

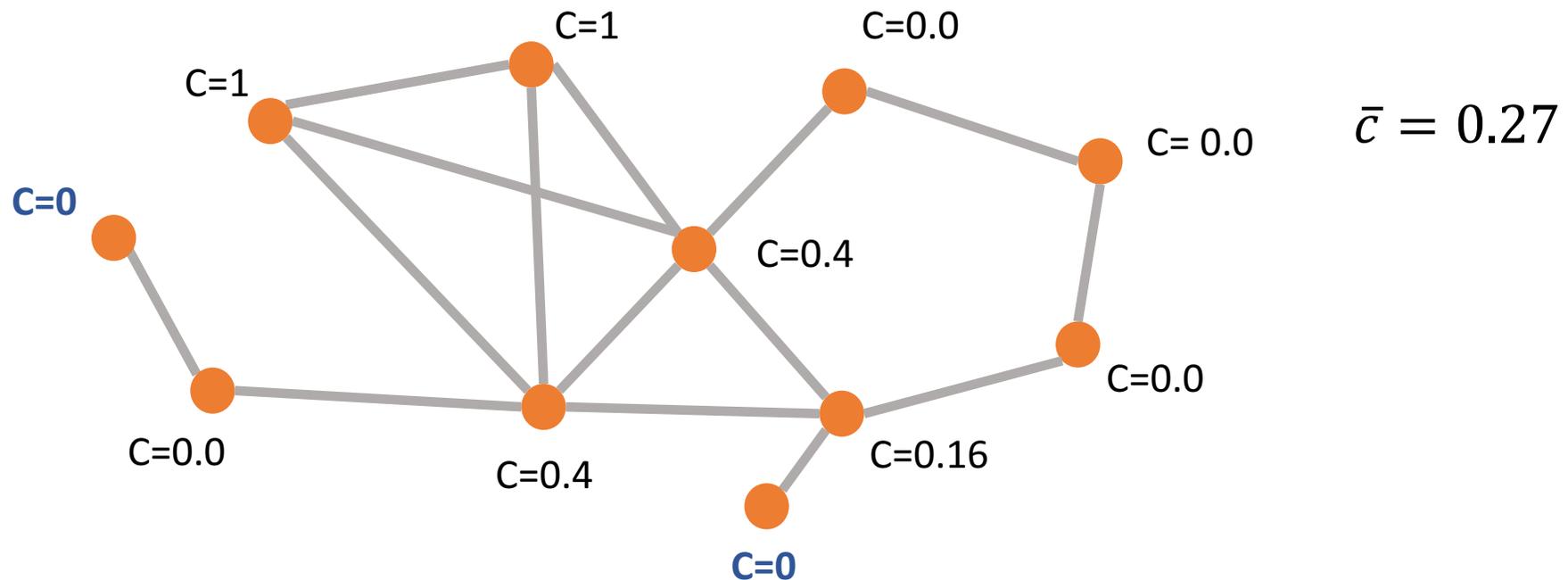
**Coeficiente de *clustering* de um nó  $i$  ( $c_i$ )**



# Clustering

- Como descobrir a agregação de um grafo/rede ou de um subconjunto de nós de uma rede?

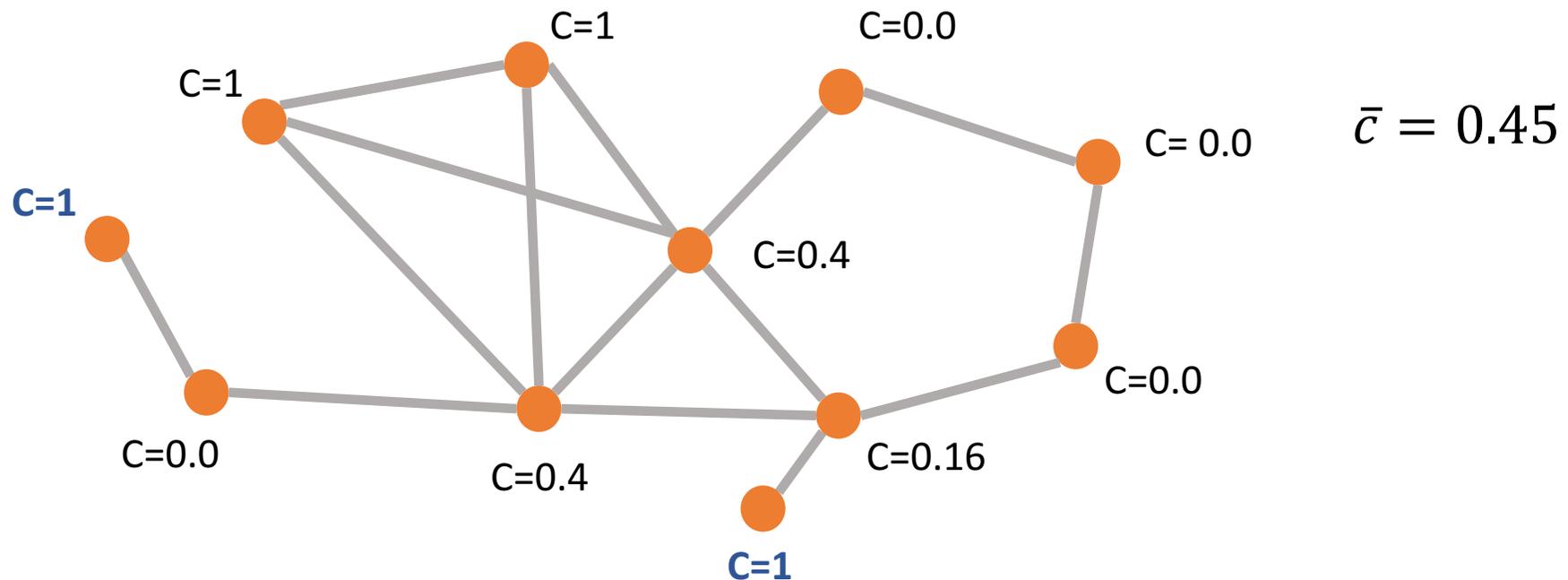
**Coeficiente de *clustering* de um nó  $i$  ( $c_i$ )**



# Clustering

- Como descobrir a agregação de um grafo/rede ou de um subconjunto de nós de uma rede?

**Coeficiente de *clustering* de um nó  $i$  ( $c_i$ )**



# Conteúdo

---

- 1) Componentes ou Compartimentos
- 2) Cliques
- 3) Clustering
- 4) Modularidade ou Comunidades
- 5) Exemplos
- 6) Resumo

# Modularidade

---

- Como descobrir os módulos de um grafo/rede?

**Módulos:** subconjuntos de nós mais conectados entre si do que com o resto da rede

# Modularidade

---

- Como descobrir os módulos de um grafo/rede?

**Modularidade ( $Q$  ou  $M$ ):** métrica que calcula a quantidade de links dentro de módulos, penalizando por links entre módulos

$$Q = \sum_{s=1}^{N_m} \left[ \frac{I_s}{L} - \left( \frac{d_s}{2L} \right)^2 \right]$$

# Modularidade

---

- Como descobrir os módulos de um grafo/rede?

**Modularidade ( $Q$  ou  $M$ ):** métrica que calcula a quantidade de links dentro de módulos, penalizando por links entre módulos

$L$ =número de links na rede

$I_s$ =número de links dentro do módulo  $s$

$d_s$ =soma de todos os graus dos nós que pertencem ao módulo  $s$

$$Q = \sum_{s=1}^{N_m} \left[ \frac{I_s}{L} - \left( \frac{d_s}{2L} \right)^2 \right]$$

# Modularidade

---

- Como descobrir os módulos de um grafo/rede?

**Modularidade ( $Q$  ou  $M$ ):** métrica que calcula a quantidade de links dentro de módulos, penalizando por links entre módulos

$L$ =número de links na rede

$I_s$ =número de links dentro do módulo  $s$

$d_s$ =soma de todos os graus dos nós que pertencem ao módulo  $s$

$$Q = \sum_{s=1}^{N_m} \left[ \frac{I_s}{L} - \left( \frac{d_s}{2L} \right)^2 \right]$$


Interações dentro do módulo  $s$

# Modularidade

---

- Como descobrir os módulos de um grafo/rede?

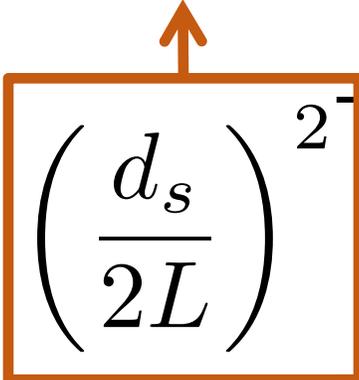
**Modularidade ( $Q$  ou  $M$ ):** métrica que calcula a quantidade de links dentro de módulos, penalizando por links entre módulos

Penalizado pelas interações estabelecidas com nós de fora do módulo  $s$

$L$ =número de links na rede

$I_s$ =número de links dentro do módulo  $s$

$d_s$ =soma de todos os graus dos nós que pertencem ao módulo  $s$

$$Q = \sum_{s=1}^{N_m} \left[ \frac{I_s}{L} - \left( \frac{d_s}{2L} \right)^2 \right]$$
The equation is displayed with a large orange box around the second term,  $\left( \frac{d_s}{2L} \right)^2$ . An orange arrow points upwards from the top of the box to the  $d_s$  term in the numerator.

# Modularidade

- Como descobrir os módulos de um grafo/rede?

**Modularidade ( $Q$  ou  $M$ ):** métrica que calcula a quantidade de links dentro de módulos, penalizando por links entre módulos

Penalizado pelas interações estabelecidas com nós de fora do módulo  $s$

$L$ =número de links na rede

$I_s$ =número de links dentro do módulo  $s$

$d_s$ =soma de todos os graus dos nós que pertencem ao módulo  $s$

$$Q = \sum_{s=1}^{N_m} \left[ \frac{I_s}{L} - \left( \frac{d_s}{2L} \right)^2 \right]$$

Interações dentro do módulo  $s$

# Modularidade

---

- Mas e os módulos  $s$ , quem são? A que módulo cada nó pertence?

**Algoritmos de otimização** buscam dividir os nós em módulos de tal forma **maximizar a modularidade  $Q$**  da rede. Novamente, dividir os nós em módulos de forma a maximizar a métrica  $Q$  é um problema NP-difícil.

$L$ =número de links na rede

$l_s$ =número de links dentro do módulo  $s$

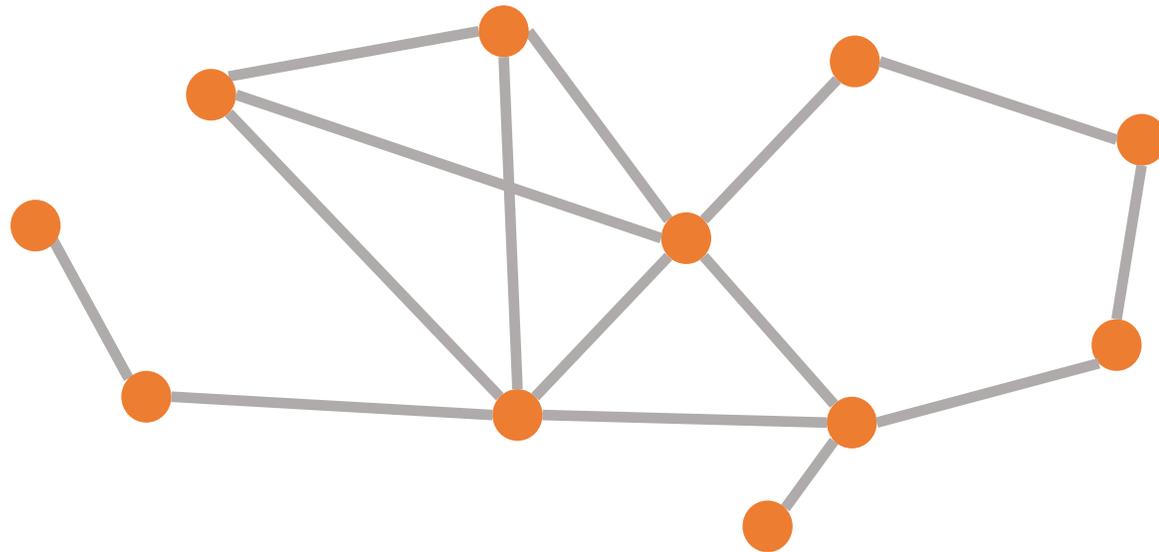
$d_s$ =soma de todos os graus dos nós que pertencem ao módulo  $s$

$$Q = \sum_{s=1}^{N_m} \left[ \frac{l_s}{L} - \left( \frac{d_s}{2L} \right)^2 \right]$$

# Modularidade

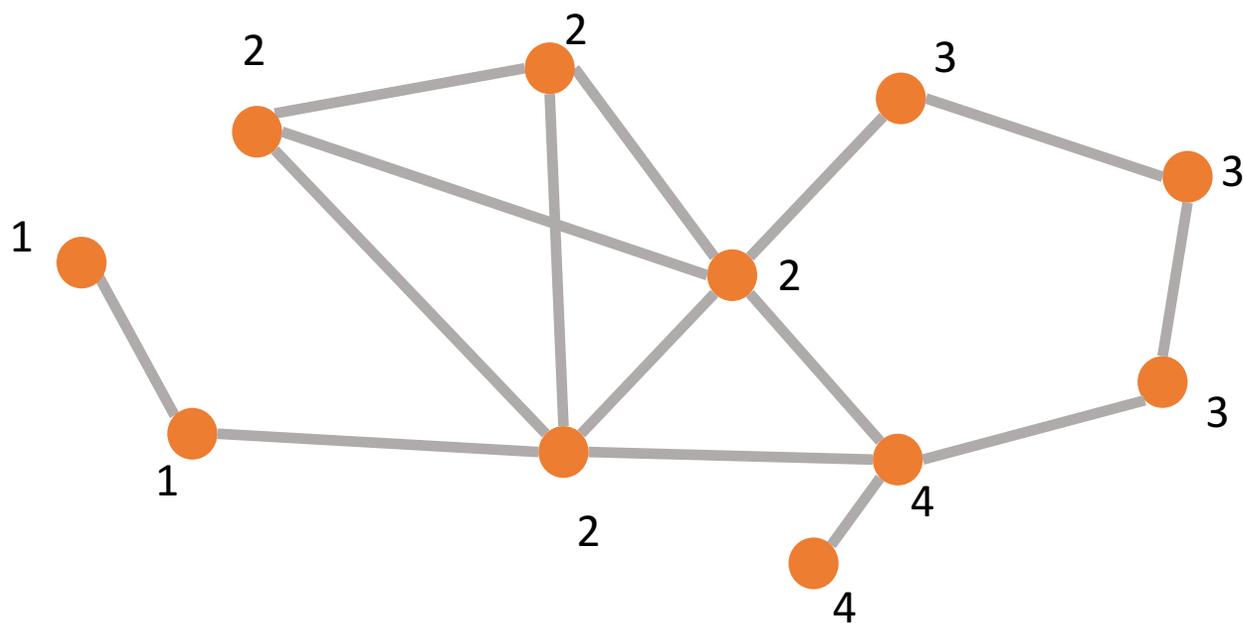
---

$L=15$



# Modularidade

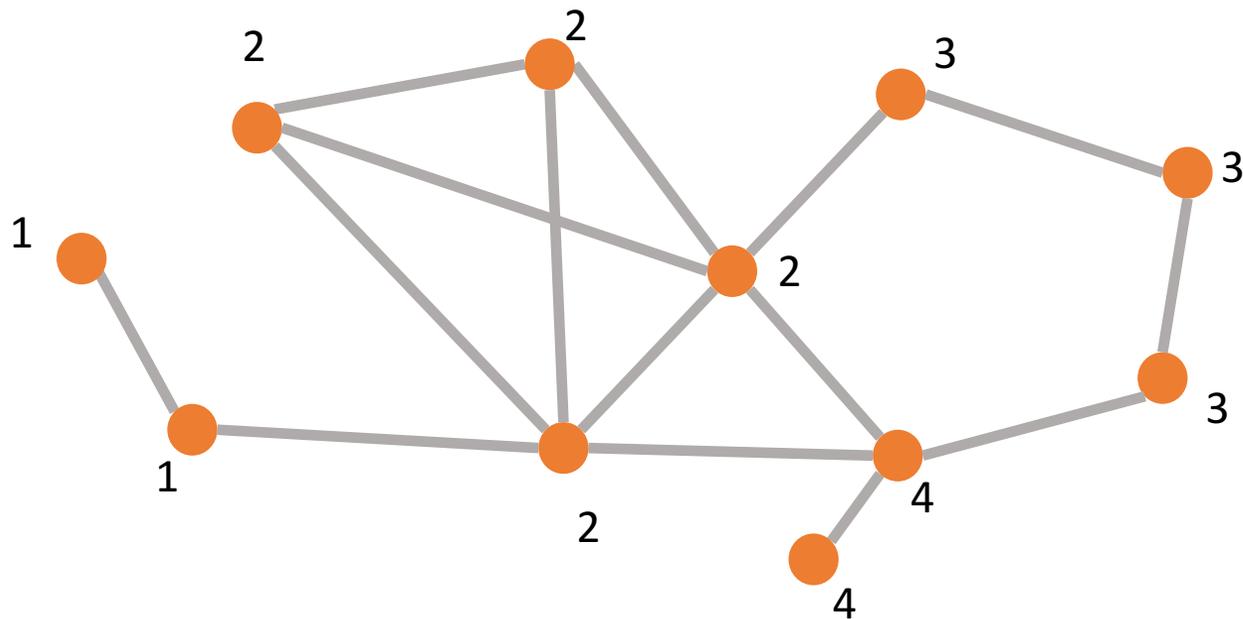
---



# Modularidade

---

$$Q = \left[ \frac{1}{15} - \left( \frac{1+2}{2 \times 15} \right)^2 \right]$$



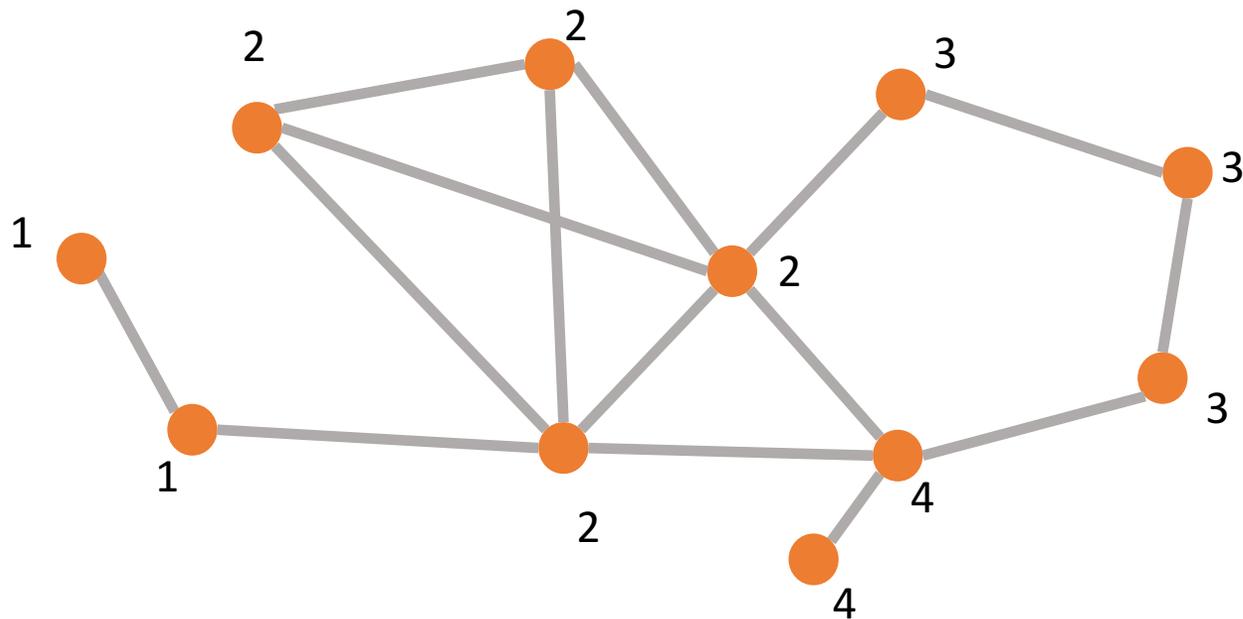




# Modularidade

---

$$Q = \left[ \frac{1}{15} - \left( \frac{1+2}{2 \times 15} \right)^2 \right] + \left[ \frac{6}{15} - \left( \frac{5+3+3+5}{2 \times 15} \right)^2 \right] + \left[ \frac{2}{15} - \left( \frac{2+2+2}{2 \times 15} \right)^2 \right] + \left[ \frac{1}{15} - \left( \frac{4+1}{2 \times 15} \right)^2 \right]$$

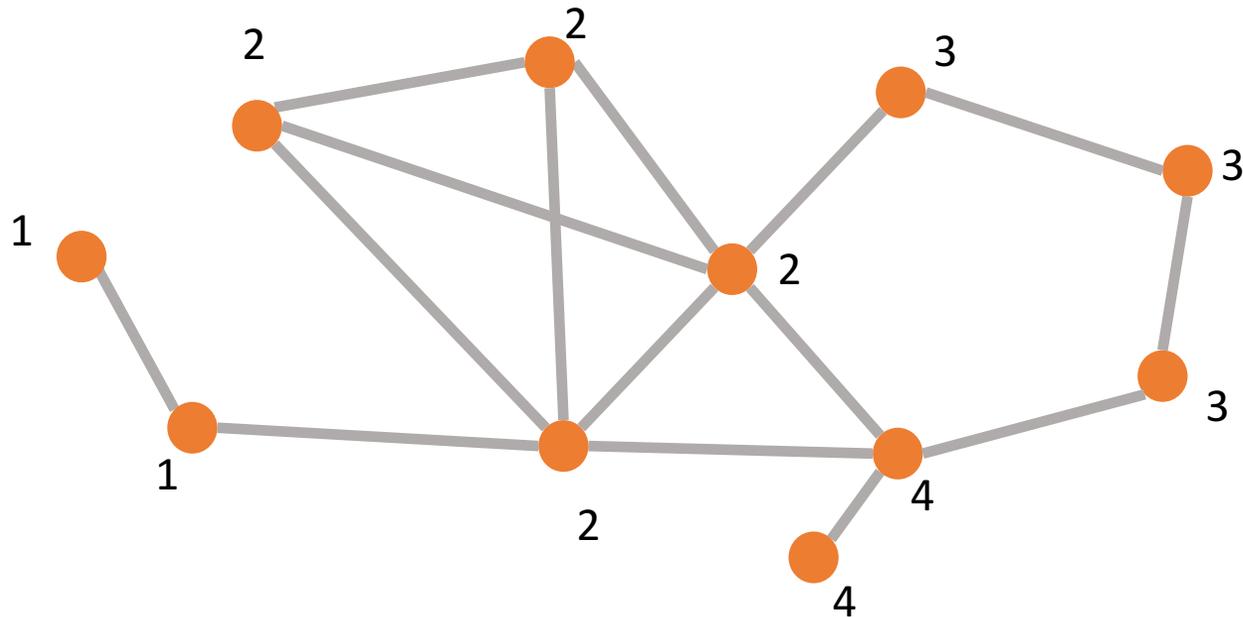


# Modularidade

---

$$Q = [0.067 - (0.1)^2] + [0.4 - (0.53)^2] + [0.13 - (0.2)^2] + [0.067 - (0.16)^2]$$

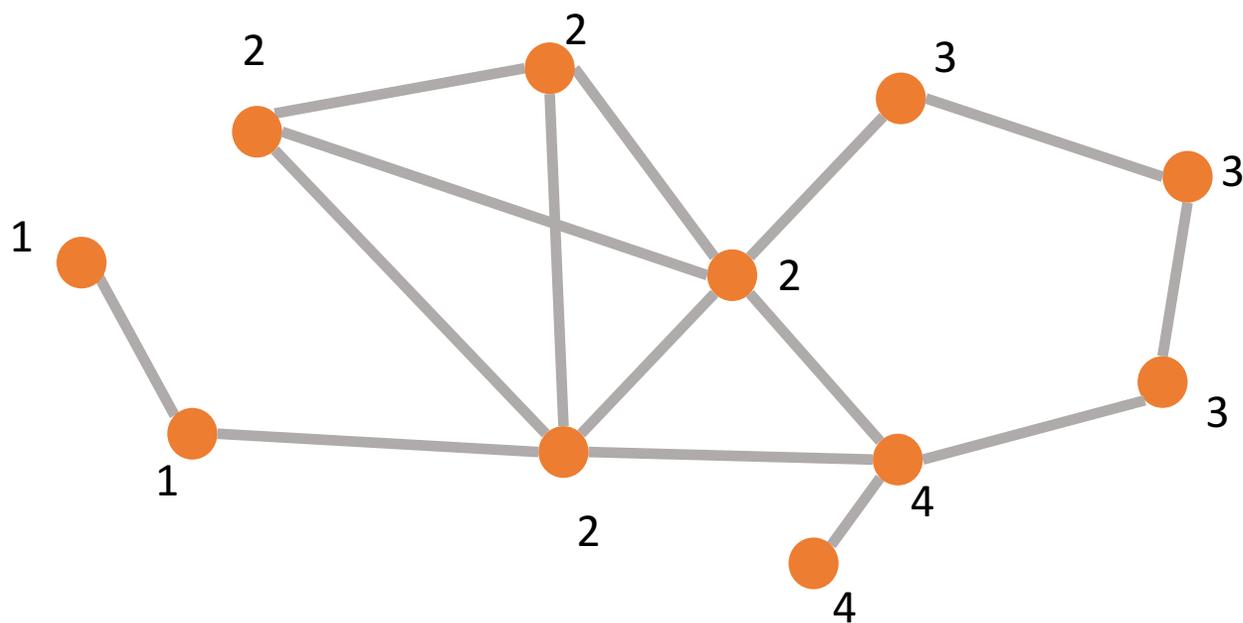
$$Q = \left[ \frac{1}{15} - \left( \frac{1+2}{2 \times 15} \right)^2 \right] + \left[ \frac{6}{15} - \left( \frac{5+3+3+5}{2 \times 15} \right)^2 \right] + \left[ \frac{2}{15} - \left( \frac{2+2+2}{2 \times 15} \right)^2 \right] + \left[ \frac{1}{15} - \left( \frac{4+1}{2 \times 15} \right)^2 \right]$$



# Modularidade

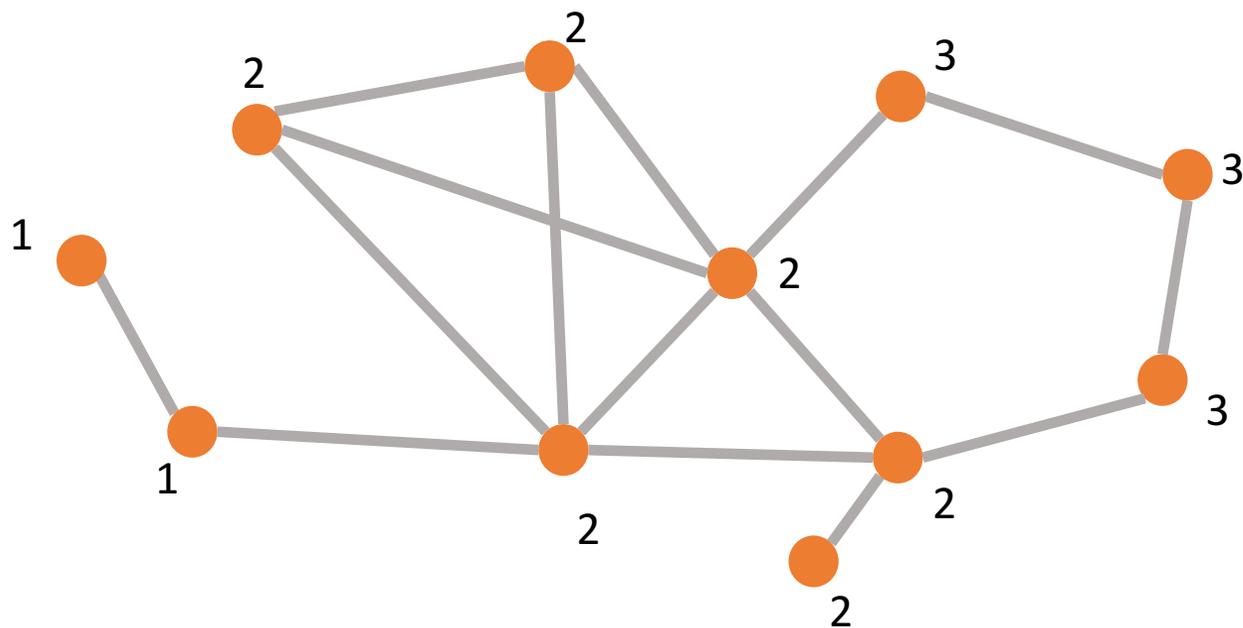
---

$$Q = 0.304$$



# Modularidade

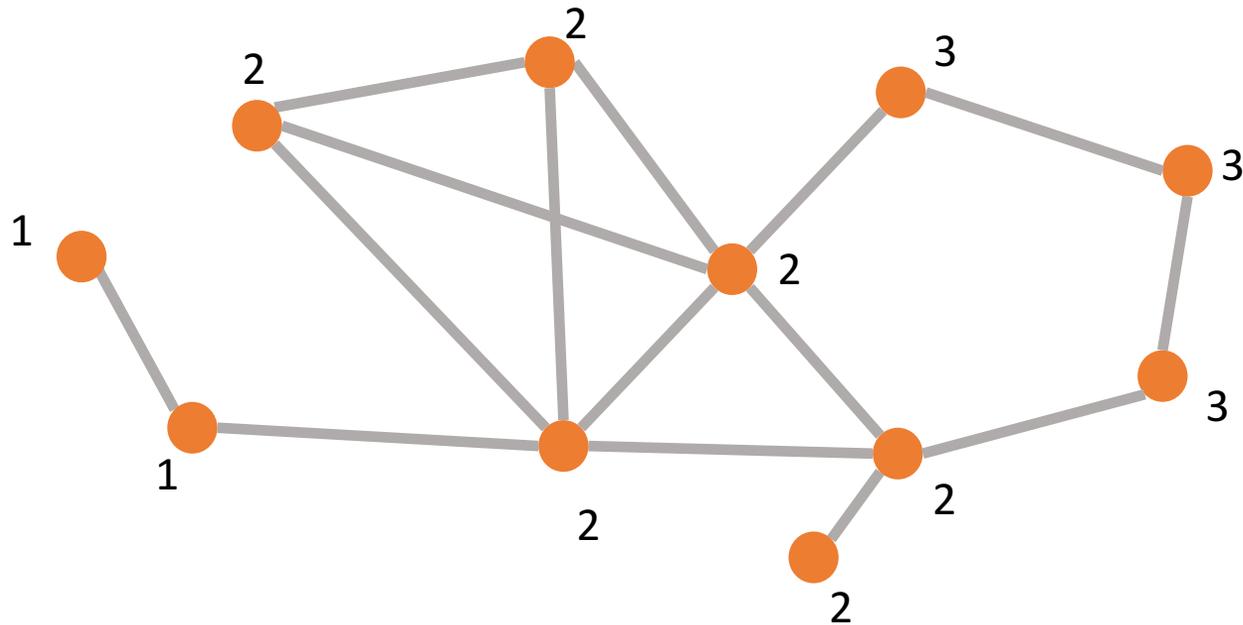
Calcular o valor de  $Q = )$



# Modularidade

---

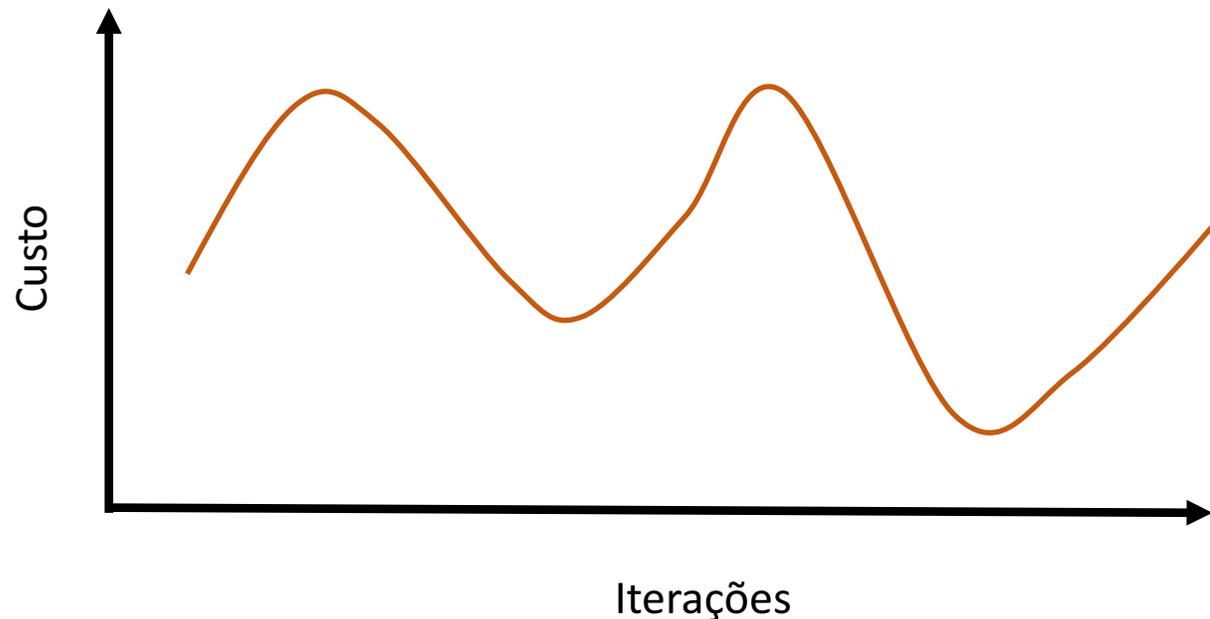
$$Q = \left[ \frac{1}{15} - \left( \frac{1+2}{2 \times 15} \right)^2 \right] + \left[ \frac{9}{15} - \left( \frac{5+3+3+5+4+1}{2 \times 15} \right)^2 \right] + \left[ \frac{2}{15} - \left( \frac{2+2+2}{2 \times 15} \right)^2 \right]$$



# Modularidade

Anelamento/Arrefecimento simulado:

- Processo de otimização para procura de uma solução com menor custo global
- Custo é definido por uma função
- A temperatura do sistema é elevada e abaixada → procura custos cada vez menores



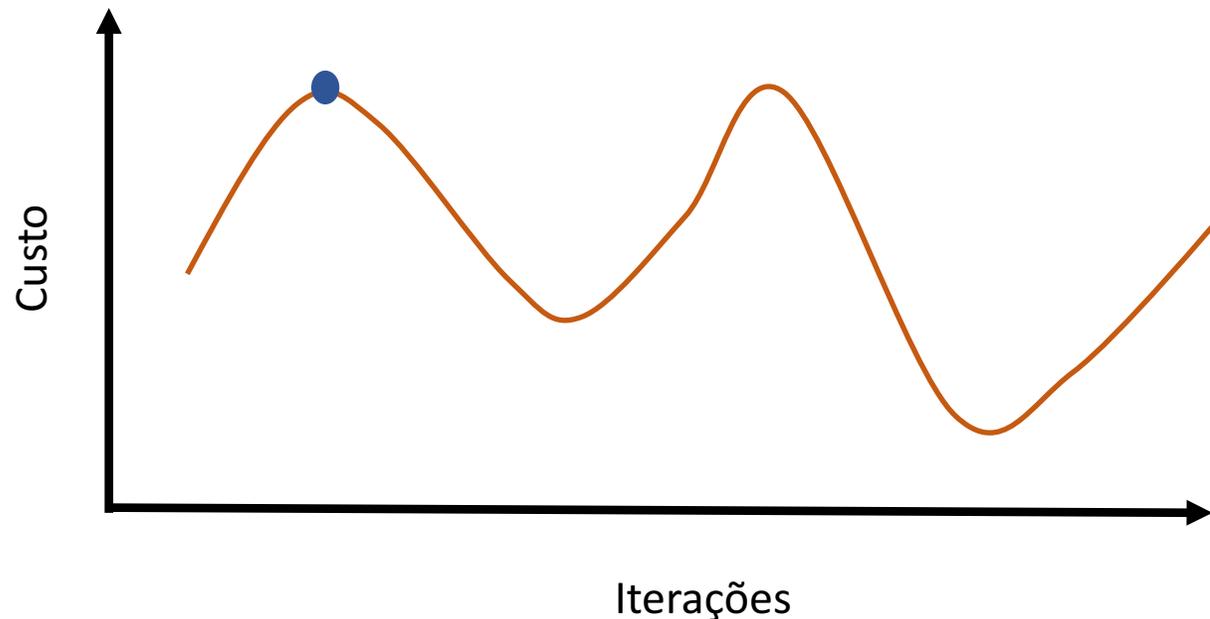
Custo (C) = -Q

$$p = \begin{cases} 1 & , \text{ se } C_f \leq C_i \\ e^{\frac{-(C_f - C_i)}{T}} & , \text{ se } C_f > C_i \end{cases}$$

# Modularidade

Anelamento/Arrefecimento simulado:

- Processo de otimização para procura de uma solução com menor custo global
- Custo é definido por uma função
- A temperatura do sistema é elevada e abaixada → procura custos cada vez menores



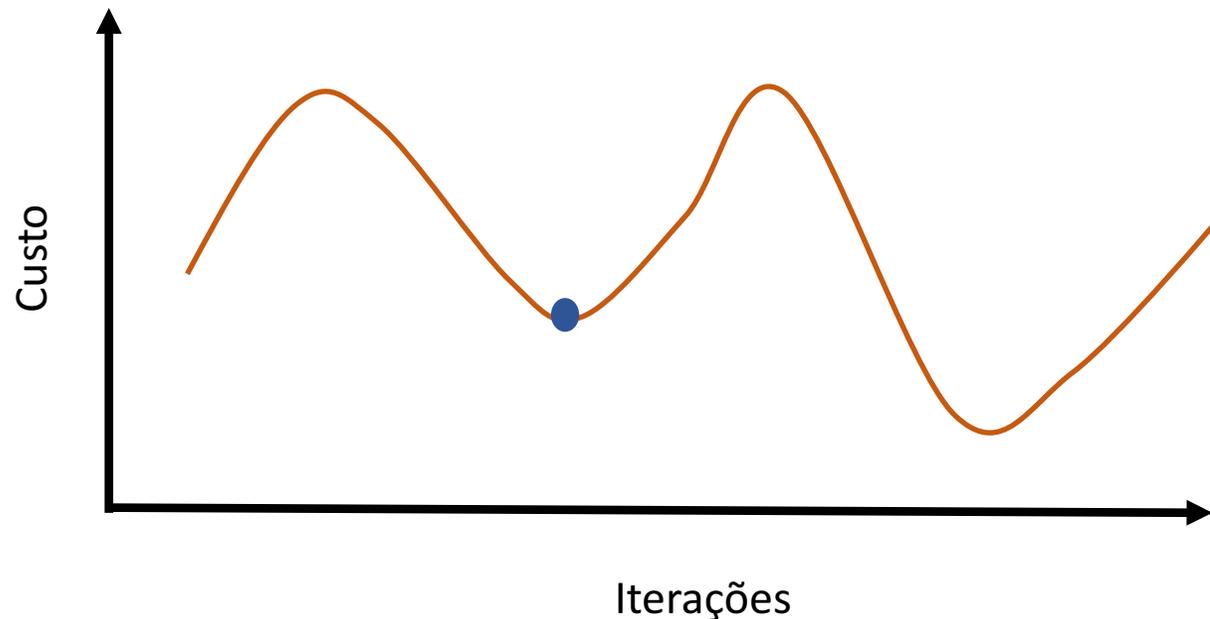
Custo (C) = -Q

$$p = \begin{cases} 1 & , \text{ se } C_f \leq C_i \\ e^{\frac{-(C_f - C_i)}{T}} & , \text{ se } C_f > C_i \end{cases}$$

# Modularidade

Anelamento/Arrefecimento simulado:

- Processo de otimização para procura de uma solução com menor custo global
- Custo é definido por uma função
- A temperatura do sistema é elevada e abaixada → procura custos cada vez menores



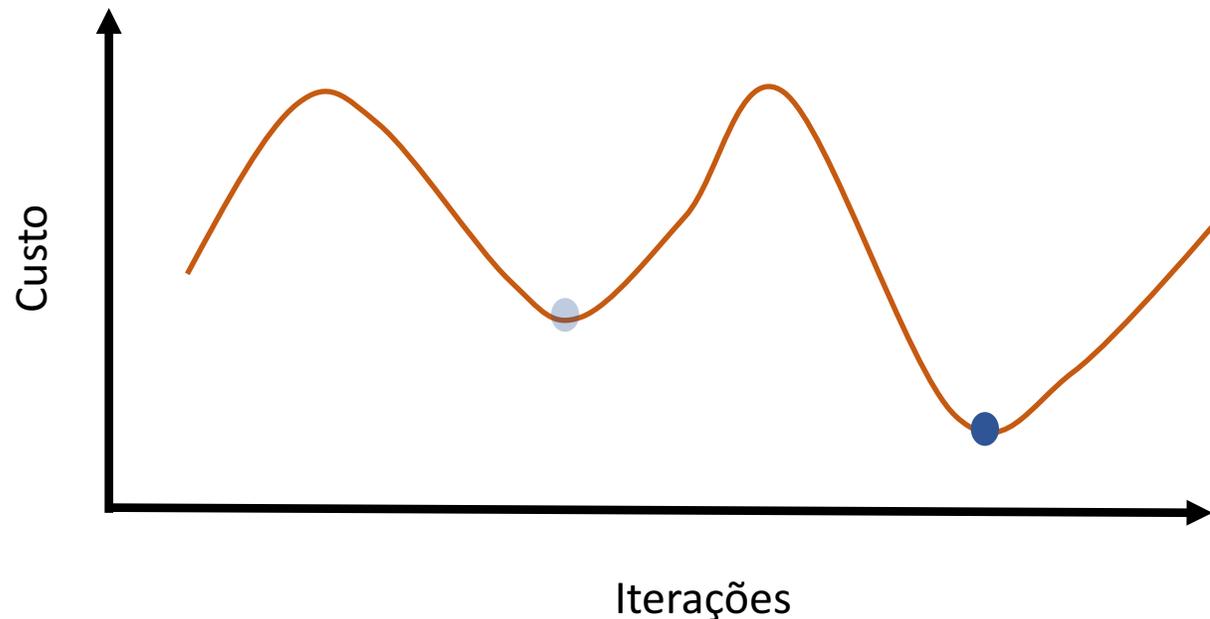
Custo (C) = -Q

$$p = \begin{cases} 1 & , \text{ se } C_f \leq C_i \\ e^{\frac{-(C_f - C_i)}{T}} & , \text{ se } C_f > C_i \end{cases}$$

# Modularidade

Anelamento/Arrefecimento simulado:

- Processo de otimização para procura de uma solução com menor custo global
- Custo é definido por uma função
- A temperatura do sistema é elevada e abaixada → procura custos cada vez menores



Custo (C) = -Q

$$p = \begin{cases} 1 & , \text{ se } C_f \leq C_i \\ e^{\frac{-(C_f - C_i)}{T}} & , \text{ se } C_f > C_i \end{cases}$$

# Conteúdo

---

- 1) Componentes ou Compartimentos
- 2) Cliques
- 3) Clustering
- 4) Modularidade ou Comunidades
- 5) Exemplos
- 6) Resumo

# Exemplos

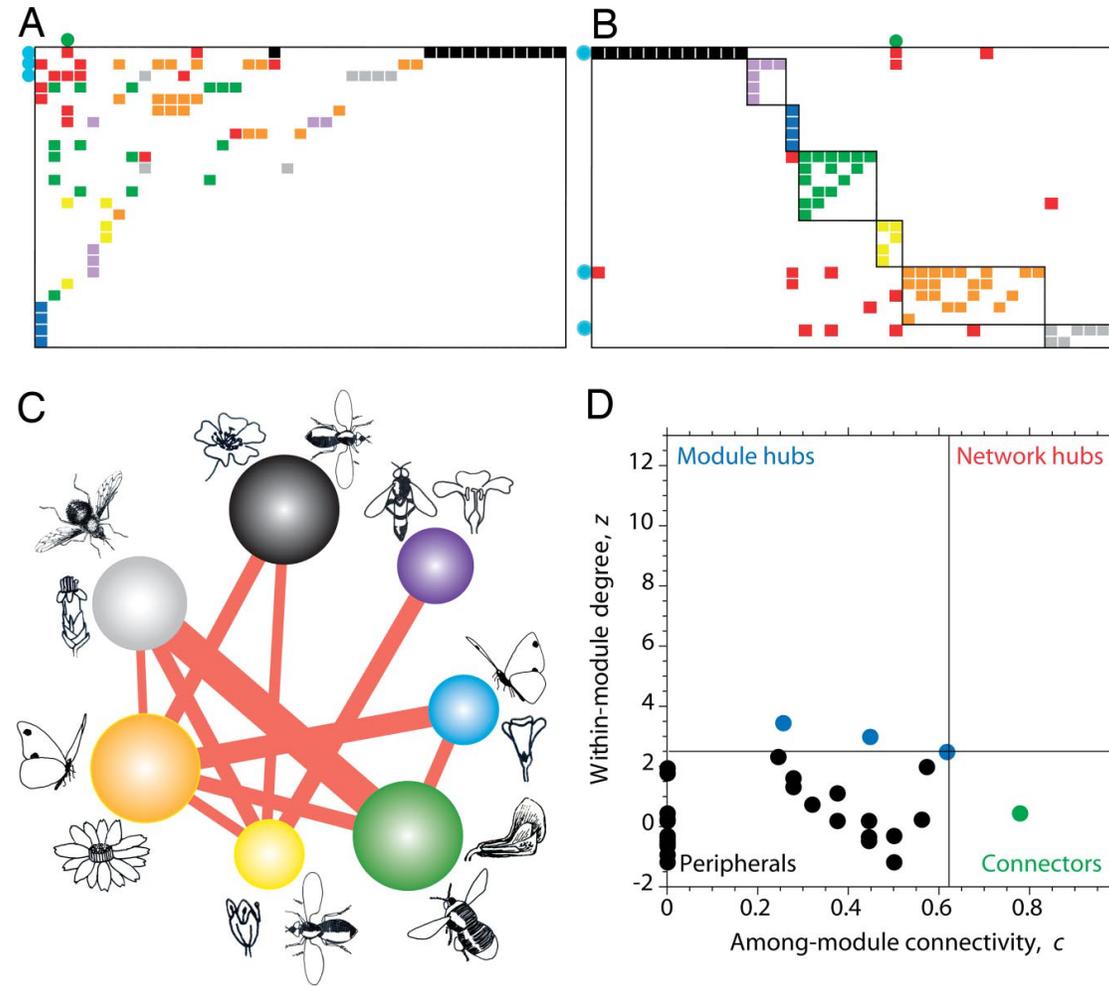
---

-Olesen, J. M., Bascompte, J., Dupont, Y. L., & Jordano, P. (2007). The modularity of pollination networks. *PNAS*, 104(50), 19891-19896.

*Each module includes one or a few species groups with convergent trait sets that may be considered as coevolutionary units.*

# Exemplos

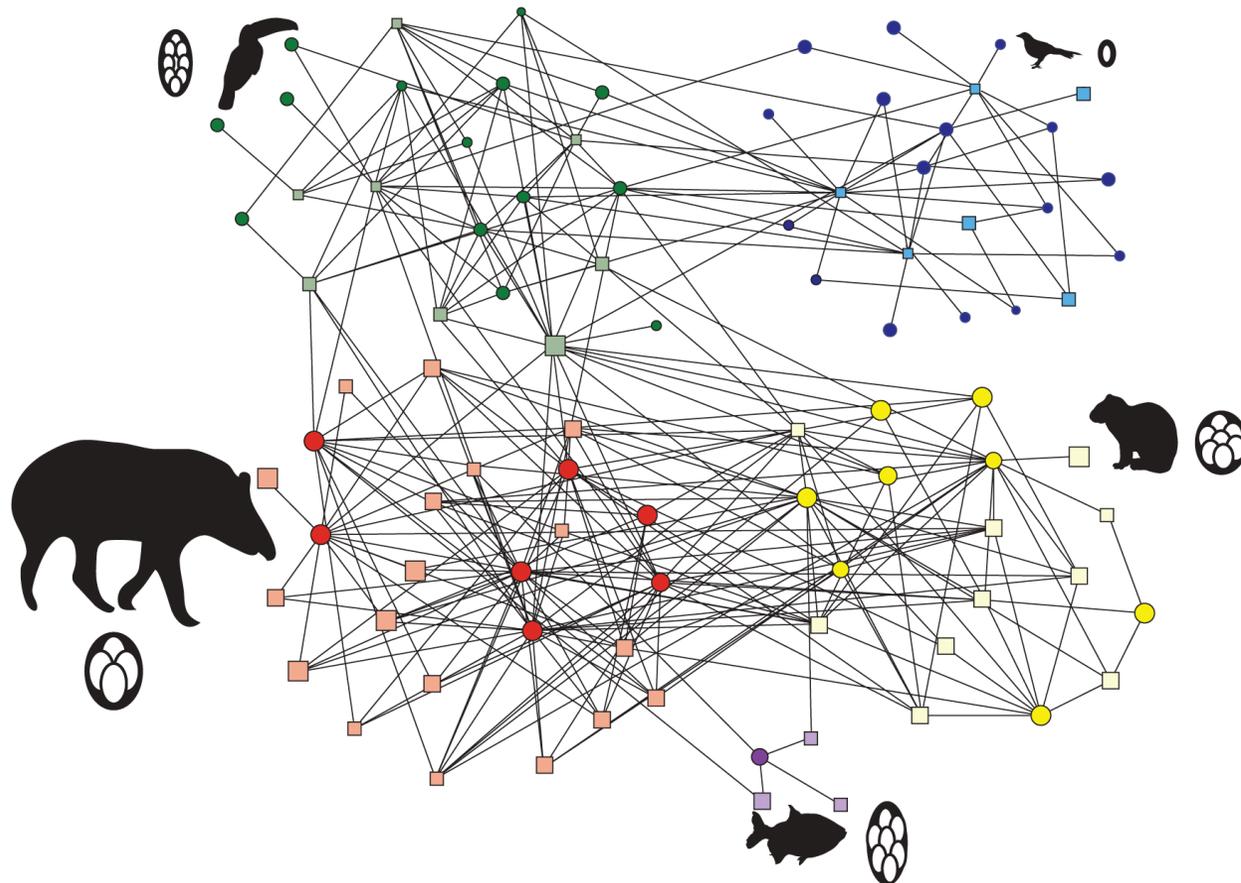
-Olesen, J. M., Bascompte, J., Dupont, Y. L., & Jordano, P. (2007). The modularity of pollination networks. *PNAS*, 104(50), 19891-19896.



# Exemplos

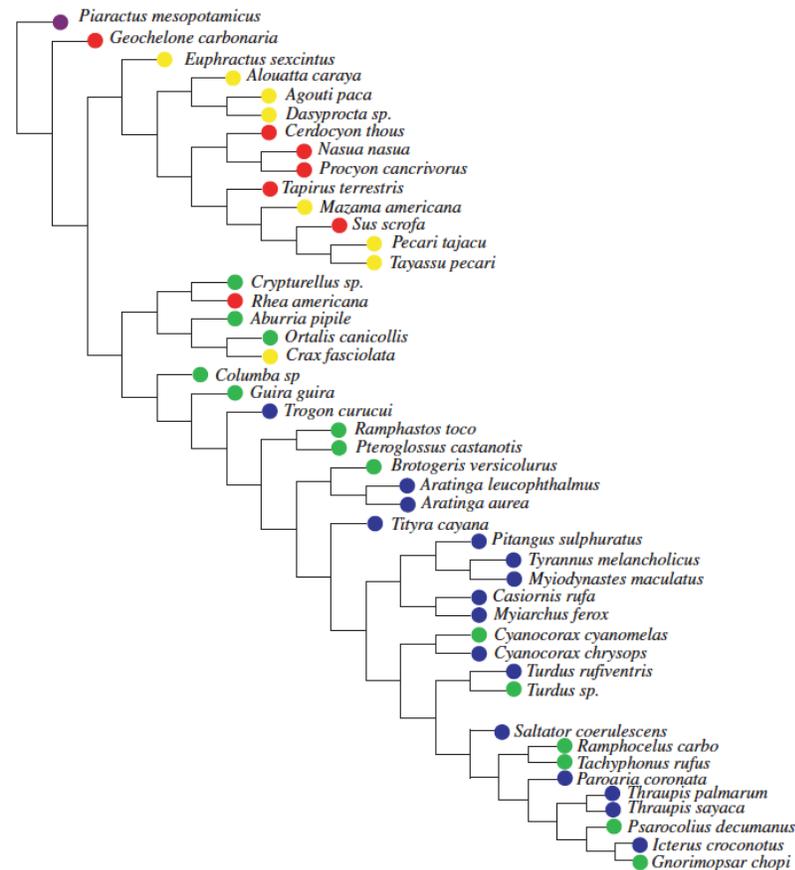
---

-Donatti, C. I., Guimarães, P. R., Galetti, M., Pizo, M. A., Marquitti, F., & Dirzo, R. (2011). Analysis of a hyper-diverse seed dispersal network: modularity and underlying mechanisms. *Ecology Letters*, 14(8), 773-781



# Exemplos

-Donatti, C. I., Guimarães, P. R., Galetti, M., Pizo, M. A., Marquitti, F., & Dirzo, R. (2011). Analysis of a hyper-diverse seed dispersal network: modularity and underlying mechanisms. *Ecology Letters*, 14(8), 773-781



# Conteúdo

---

- 1) Componentes ou Compartimentos
- 2) Cliques
- 3) Clustering
- 4) Modularidade ou Comunidades
- 5) Exemplos
- 6) **Resumo**

# Resumo

---

## 1) Componentes ou Compartimentos

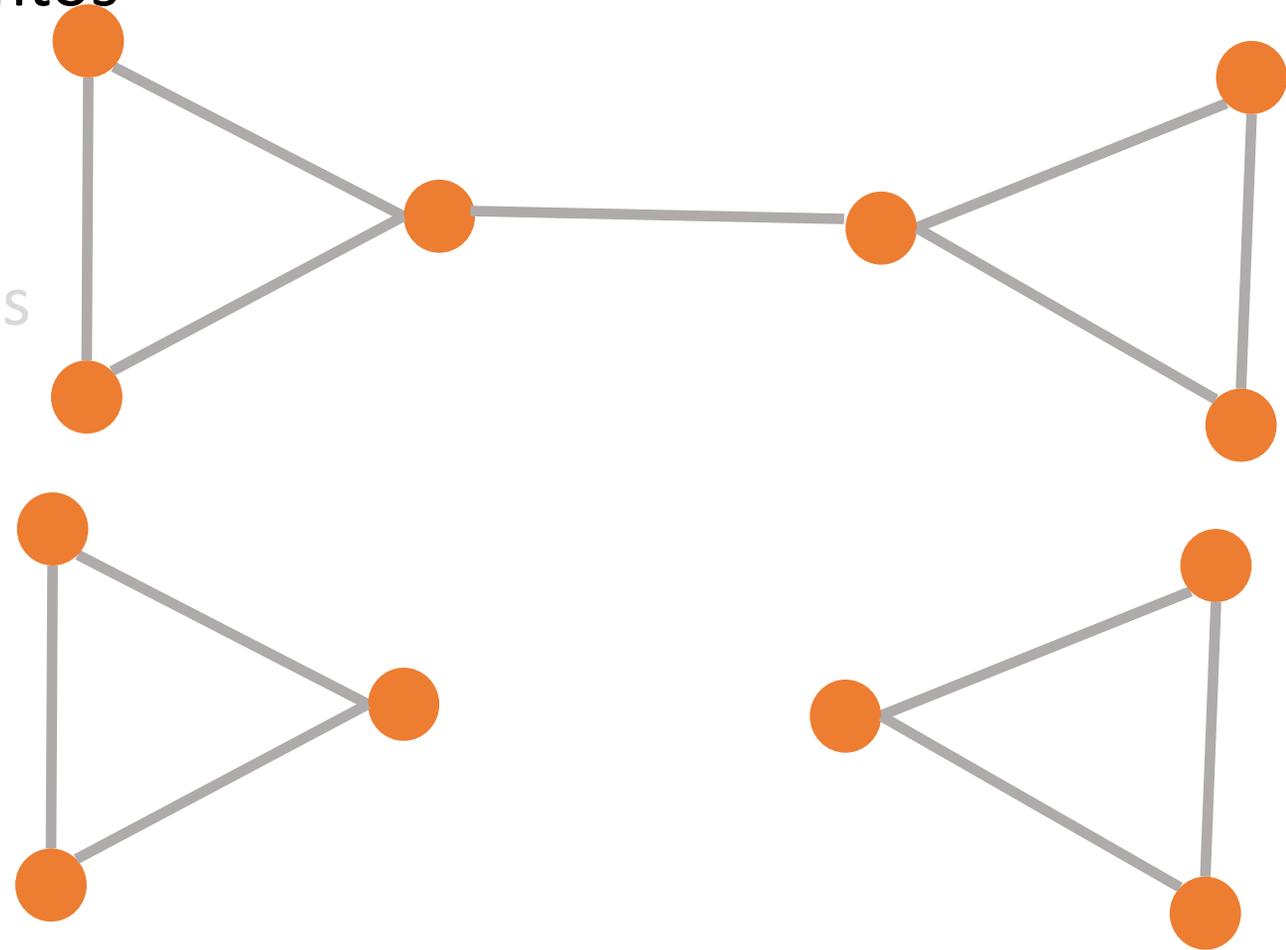
2) Cliques

3) Clustering

4) Modularidade ou Comunidades

5) Exemplos

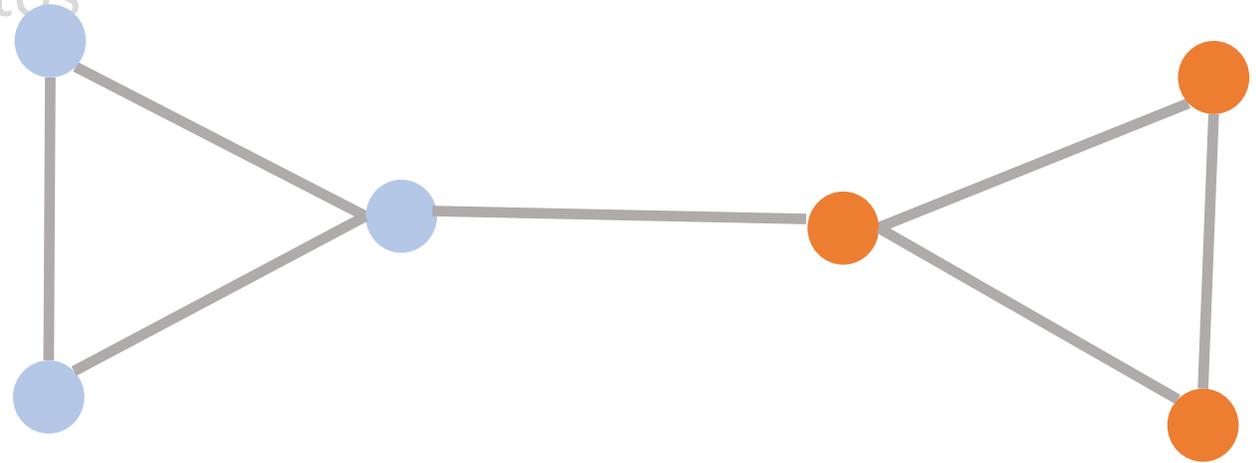
6) Resumo



# Resumo

---

- 1) Componentes ou Compartimentos
- 2) Cliques**
- 3) Clustering
- 4) Modularidade ou Comunidades
- 5) Exemplos
- 6) Resumo



# Resumo

---

- 1) Componentes ou Compartimentos
- 2) Cliques
- 3) Clustering**
- 4) Modularidade ou Comunidades
- 5) Exemplos
- 6) Resumo

**Nó  $i$  com grau  $k_i$  :**

Número de possíveis links entre vizinhos de  $i$ :  $\frac{k_i(k_i-1)}{2}$

Número de links observados entre vizinhos de  $i$ :  $e$

$$C_i = \frac{2e}{k_i(k_i-1)}$$

$$C = \overline{C_i}$$

# Resumo

---

- 1) Componentes ou Compartimentos
- 2) Cliques
- 3) Clustering
- 4) Modularidade ou Comunidades
- 5) Exemplos
- 6) Resumo

Penalizado pelas interações estabelecidas com nós de fora do módulo  $s$

$$Q = \sum_{s=1}^{N_m} \left[ \frac{I_s}{L} - \left( \frac{d_s}{2L} \right)^2 \right]$$

Interações dentro do módulo  $s$