Lista 1:

1 A) $P_{n+1} = 1{,}2P_n + (1-0{,}7)P_{n-1} - 1200$

$$\boxed{P_{n+1} = 1{,}5P_n - 1200}$$ Relação de recorrência

$\bar{P} = 1{,}5\bar{P} - 1200$

$-0{,}5\bar{P} = -1200$

$\bar{P} = 2400$

$P_n = C(1{,}5)^n + 2400$

$P_0 = 12230 \Rightarrow 12230 = C \cdot 1{,}5^0 + 2400$

$C = 9830$

$$\boxed{P_n = 9830(1{,}5)^n + 2400}$$ solução geral

B) Pop de peixes cresce já que $R = 1{,}5 > 1$.

c) $n = 5$

$P_5 = 9830(1{,}5)^5 + 2400$

$P_5 \cong 77047$ peixes em 5 anos

D) p/ manter constante $P_{n+1} = P_n = P_0 = 12230$

Em especial $P_1 = P_0$

$P_1 = 1{,}5P_0 - \overset{\text{pesca}}{h}$

$12230 = 1{,}5\,12230 - h \Rightarrow \underline{h = 6115 \text{ peixes}}$

A pesca precisa ser de:

2 A) $P_{n+1} = 0{,}5P_n + (1-0{,}7)P_n$

$$\boxed{P_{n+1} = 0{,}8P_n}$$ Relação de recorrência

$P_0 = 12230$ $\quad P_n = C(0{,}8)^n$

$12230 = C(0{,}8)^0$

$C = 12230$

$$\boxed{P_n = 12230\cdot(0{,}8)^n}$$ sol geral

B) Pop decresce pois $R = 0{,}8 < 1$

C) $P_{n+1} = 0{,}8P_n + \lambda$ colocar/tirar peixes $\oplus$ / $\ominus$

o sinal sai das contas mas sabemos que será $\oplus$, pois $R < 1{,}0$.

$\bar{P} = 0{,}8\bar{P} + \lambda$

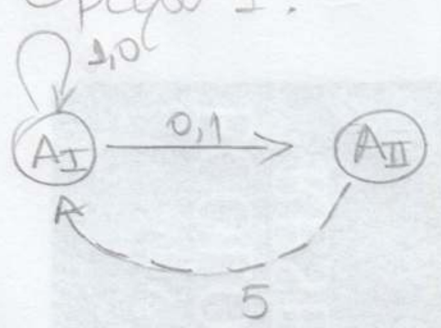
$0{,}2\bar{P} = \lambda$

$\bar{P} = p_0 = 12230$

$\lambda = 0{,}2\ 12230 = 2446$

P/ deixar o lago c/ mesmo número de peixes, 2446 peixes devem ser colocados no lago por unidade de tempo.

③ Opçaõ 1:



considerando que período passado em etapa de ovo é muito pequena em relação ao período passado nas duas etapas reprodutivas

A)

$$\begin{cases} P_{A_I}(n+1) = 1\,P_{A_I}(n) + 5\,P_{A_{II}}(n) \\ P_{A_{II}}(n+1) = 0{,}1\,P_{A_I}(n) \end{cases}$$ sist de eqs

$$\vec{P}_{(n+1)} = A\,\vec{P}_{(n)} \quad \text{onde } A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0{,}1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 5 \\ 0{,}1 & 0-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$-\lambda + \lambda^2 - 0{,}5 = 0$$

$$\Delta = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4(-0{,}5)}$$

$$\begin{cases} \lambda_+ = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \lambda_- = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$ autovalor dominante

autovetor associado

$$(1-\lambda)V_1 + 5V_2 = 0$$

$$V_1 = \frac{-5V_2}{1-\lambda}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{-5V_2}{1-\lambda} \\ 1V_2 \end{pmatrix} \text{ ou } V_2\begin{pmatrix} \frac{-5}{1-\lambda} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$V_+ = \begin{pmatrix} \frac{-5}{1-\frac{(1+\sqrt{3})}{2}} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{\frac{\sqrt{3}-1}{2}} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{\sqrt{3}-1} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13{,}66 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$V_- = \begin{pmatrix} \frac{-5}{1-\frac{(1-\sqrt{3})}{2}} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-5}{\frac{1+\sqrt{3}}{2}} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-10}{1+\sqrt{3}} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3{,}66 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solução geral

$$\vec{P}_n = C_+ \begin{pmatrix} 13,66 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda_+^n + C_- \begin{pmatrix} -3,66 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda_-^n$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} = C_+ \begin{pmatrix} 13,66 \\ 1 \end{pmatrix} + C_- \begin{pmatrix} -3,66 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$13,66\, C_+ - 3,66\, C_- = 0 \Rightarrow 13,66(10 - C_-) - 3,66 C_- = 0$$

$$C_+ + C_- = 10 \qquad \boxed{C_+ = 10 - C_-} \qquad 17,32 C_- = 136,6$$

$$C_- = 7,89$$

$$C_+ = 2,11$$

B)

Sol geral: $P_n = 2,11 \begin{pmatrix} 13,66 \\ 1 \end{pmatrix} (1,37)^n + 7,89 \begin{pmatrix} -3,66 \\ 1 \end{pmatrix} (-0,37)^n$

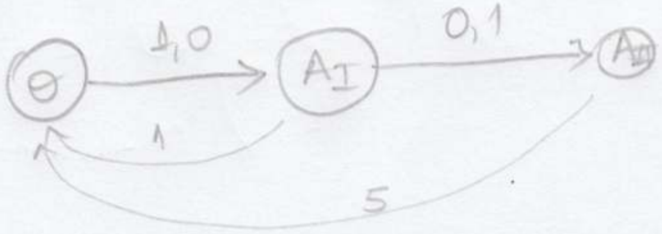
$$\vec{P}_{10} = 2,11 \begin{pmatrix} 13,66 \\ 1 \end{pmatrix} (1,37)^{10} + 7,89 \begin{pmatrix} -3,66 \\ 1 \end{pmatrix} (-0,37)^{10} = \begin{pmatrix} 651,8 \\ 47,7 \end{pmatrix}$$

$\sim \begin{pmatrix} 652 \\ 48 \end{pmatrix}$ Δ's na fase A_I / Δ's na fase A_{II}

C) A proporção é dada pelo autovetor associado ao autovalor dominante: $\begin{pmatrix} 13,66 \\ 1 \end{pmatrix}$

Há 13,66 Δ's na fase I p/ cada Δ na fase II ou 0,93 (93%) / 0,07 (7%)

Se considerar que Δ's passam período similar na fase de ovo e nas fases adultas:



$$\begin{cases} O(n+1) = 1A_{I}(n) + 5A_{II}(n) \\ A_{I}(n+1) = O(n) \\ A_{II}(n+1) = 0{,}1\,A_{I}(n) \end{cases}$$

matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0 \end{pmatrix}$

Solucionando computacionalmente:

$\lambda_1 = 1{,}19$ $\quad \lambda_2 = -0{,}59 + 0{,}25i$ $\quad \lambda_3 = -0{,}59 - 0{,}25i$

$$v_1 = \begin{pmatrix} -0{,}76 \\ -0{,}64 \\ -0{,}05 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52{,}36\% \\ 43{,}94\% \\ 3{,}68\% \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{ovo} \\ A_{I} \\ A_{II} \end{array}$$

(4)

A) Relação de recorrência

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r, "1{,}0"] & A \arrow[l, bend left, "2{,}0"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{cases} J_{n+1} = 2A_n \\ A_{n+1} = J_n + A_n \end{cases}$$

$$\text{matriz: } \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ou ainda, $P_{n+1} = P_n + 2P_{n-1}$

de qualquer forma, caímos na eq característica

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+8} = \begin{cases} \lambda_+ = 2 \\ \lambda_- = -1 \end{cases}$$

Autovalores associados:

$$v_1 + (1-\lambda) v_2 = 0 \qquad v_+ = \begin{pmatrix} (1-\lambda) v_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_2 \begin{pmatrix} 2-1 \\ 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = (\lambda - 1) v_2$$

$$v_- = v_2 \begin{pmatrix} -1-1 \\ 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P_n = C_+ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} 2^n + C_- \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} (-1)^n$$

cond. inicial $\rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = C_+ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_- \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$C_+ - 2C_- = 1 \leftarrow \quad -C_- - 2C_- = 1 \Rightarrow C_- = -1/3$$

$$C_+ + C_- = 0 \quad \boxed{C_+ = -C_-} \quad C_+ = \frac{1}{3}$$

B) $P_n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}(2)^n - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}(-1)^n$

C) $P_8 = \begin{pmatrix} 2^8/3 & +2/3 \\ 2^8/3 & -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}86\\85\end{pmatrix}$

$\text{Total} = 171$ //

---

5 A) $P_{n+1} = P_n = \bar{P}$

$\bar{P} = \bar{P} e^{1,1(1-\bar{P}/1500)}$

$\bar{P} - \bar{P} e^{1.1(1-\bar{P}/1500)} = 0$

$\bar{P}(1 - e^{1.1(1-\bar{P}/1500)}) = 0$

$\bar{P} = 0$ // ou $1 - e^{1.1(1-\bar{P}/1500)} = 0$

$\ln e^{1,1(1-\bar{P}/1500)} = 1 \ \ln$

$1.1\left(1 - \frac{\bar{P}}{1500}\right) = 0$

$\frac{\bar{P}}{1500} = 1 \Rightarrow \bar{P} = 1500$ //

B) $f = P e^{1.1(1-P/1500)}$

$$\frac{df}{dP} = e^{1.1(1-P/1500)} - \frac{1.1}{1500} P e^{1.1(1-P/1500)}$$

$$\left.\frac{df}{dP}\right|_{\bar{P}=0} = e^{1.1} - \frac{1.1}{1500} \cdot 0\, e^{1.1} = |e^{1.1}| > 1 \rightarrow \therefore \bar{P}=0 \text{ é instável}$$

$$\left.\frac{df}{dP}\right|_{\bar{P}=1500} = e^{1.1(0)} - \frac{1.1}{\cancel{1500}} \cdot \cancel{1500}\, e^{1.1(0)} = 1 - 1{,}1 = |-0{,}1| < 1 \quad \therefore \bar{P}=1500 \text{ é estável}$$

c) No tempo longo, esperamos que a população cresça e encontre $\bar{P} = 1500$ e lá permaneça.

De fato: se $P_0 = 800$

$$P_1 = 800\, \underbrace{e^{1.1(1-0{,}53)}}_{>1} > P_0$$

e então a pop. cresce. Mas ao atingir $P = 1500$, ela deve permanecer neste tamanho que é um equilíbrio.

6

$$S_{n+1} = 0{,}8S_n + 0{,}25\,G_n + 0{,}08\,T_n$$
$$G_{n+1} = 0{,}75G_n + 0{,}01\,T_n$$
$$T_{n+1} = 0{,}2S_n + 0{,}91\,T_n$$

A)
$$\begin{pmatrix} S \\ G \\ T \end{pmatrix}_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}25 & 0{,}08 \\ 0 & 0{,}75 & 0{,}01 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}91 \end{pmatrix}}_{\text{matriz de transf.}} \begin{pmatrix} S \\ G \\ T \end{pmatrix}_n$$

B) autovalores: $1{,}0$, $\underbrace{0{,}73+0{,}04i,\ 0{,}73-0{,}04i}$
(computacionalmente encontrados)
$$\rho = \sqrt{0{,}73^2+0{,}4^2} = 0{,}70$$

O maior autovalor é 1, o que significa que esta comunidade não perde espaço p/ o "vazio", esta permanentemente ocupada por plantas, e o espaço disponível não aumenta e não diminuiu.

C) A estrutura estável dessa comunidade é dada pelo autovetor associado ao maior autovalor que é:

$$\begin{pmatrix} 0{,}410 \\ 0{,}036 \\ 0{,}911 \end{pmatrix}.$$

Transformando em proporções de 0 a 1, temos: $\begin{pmatrix} 0{,}30 \\ 0{,}03 \\ 0{,}67 \end{pmatrix}$, portanto 67% da paisagem é dominada por árvores(T)

7 A) $$x_{n+1} = \frac{(1+e^{b})x_n}{1+e^{bx_n}}$$

$$x_{n+1} = x_n = \bar{x}$$

$$\bar{x} = \frac{(1+e^{b})\bar{x}}{1+e^{b\bar{x}}}$$

$$\bar{x} - \frac{(1+e^{b})\bar{x}}{1+e^{b\bar{x}}} = 0$$

$$\bar{x}\left(1 - \frac{(1+e^{b})}{1+e^{b\bar{x}}}\right) = 0$$

$\underline{\bar{x}=0}$ // ou $1 - \frac{1+e^{b}}{1+e^{b\bar{x}}} = 0$

$$\frac{\cancel{1}+e^{b\bar{x}} - \cancel{1} - e^{b}}{1+e^{b\bar{x}}} = 0$$

$$\ln e^{b\bar{x}} - e^{b} = \ln 0$$

$$\ln(e^{b\bar{x}} - e^{b}) = 1$$

$$\frac{\ln e^{b\bar{x}}}{\ln e^{b}} = 1$$

$$\frac{b\bar{x}}{b} = 1 \Rightarrow \underline{\bar{x} = 1}$$ //

B) $$f = \frac{(1+e^{b})x}{1+e^{bx}} = \underbrace{(1+e^{b})x}_{F}\ \underbrace{(1+e^{bx})^{-1}}_{G} \qquad \frac{df}{dx} = \frac{dF}{dx}G + \frac{dG}{dx}F$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{1+e^{b}}{1+e^{bx}} - \frac{b(1+e^{b})x}{(1+e^{bx})^2} = \frac{(1+e^{b})(1+e^{bx}) - bx(1+e^{b})}{(1+e^{bx})^2}$$

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{\bar{x}=0} = \frac{(1+e^{b})(2) - 0}{(1+1)^2} = \frac{1}{2}(1+e^{b})$$

$\therefore$ se $-2 < 1+e^{b} < 2$ então $\bar{x}=0$ é estável

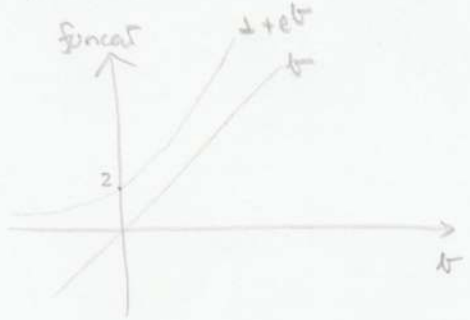
Ou seja se $-3 < e^{b} < 1$

Desta forma, só faz sentido se $e^{b} < 1$ (pois não há número que em uma exponencial gere um valor negativo). Portanto, se $b<0$ $\bar{x}=0$ é estável. Se $b>0$, $\bar{x}=0$ é instável

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{\bar{x}=1} = \frac{(1+e^b)(1+e^b) - b(1+e^b)}{(1+e^b)^2} = \frac{\cancel{(1+e^b)}(1+e^b-b)}{(1+e^b)^{\cancel{2}}} =$$

$$= \frac{1+e^b-b}{1+e^b} = 1 - \frac{b}{1+e^b}$$

Portanto $\bar{x}=1$ é estável se $0 < \frac{b}{1+e^b} < 1$



É possível ver graficamente que o denominador é sempre maior que o numerador para $b>0$.

P/ $b<0$, $1 - \frac{b}{1+e^b}$ fica um número maior do que 1.

Neste caso então, temos que se $b>0$; $\bar{x}=1$ é estável. E se $b<0$, então $\bar{x}=1$ é instável

Resumindo: