

**Lista 2 de avaliação – postada em 02/07/2021**  
**Entregar por email para flamarquitti@gmail.com até dia**  
**10/07/2021**

---

**Modelos Matemáticos em Ecologia e Evolução**  
**NE441 e BIE5763**

1. A reposta funcional do tipo I (Holling tipo I) modela uma taxa de predação sobre uma população que aumenta linearmente com o tamanho da população, e pode ser usada para modelar a caça ou a pesca sobre populações naturais. Este modelo assume a captura depende primeiro da população de presa disponível no tempo  $t$ , isto é  $N(t)$ , e do esforço  $e$  despendido pelo predador/caçador/pescador. O esforço aqui pode representar toda a energia despendida pelo predador/caçador/pescador durante sua ação (como horas de trabalho, arraste, tempo passado no mar, redes, etc.). Já  $q$  denota a eficiência técnica (capacidade de captura) de insumos usados para caça. Os parametros  $r$  e  $K$  representam a taxa de crescimento intrínseca da população e sua capacidade suporte. Considere que  $r > 0$ ,  $K > 0$ ,  $q \geq 0$  e  $e \geq 0$ .

$$\frac{dN}{dt} = rN \left( 1 - \frac{N}{K} \right) - qeN \quad (1)$$

- a) Encontre os pontos de equilíbrio da equação dada acima.
  - b) Avalie a estabilidade dos pontos de equilíbrio encontrados no item anterior.
  - c) Você espera que essa população de presas possa atingir sua capacidade suporte? Quais as condições para que isso aconteça?
2. Considere o modelo de competição Lotka-Volterra.

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= r_1 N_1 \left( 1 - \frac{N_1 + \alpha_{12} N_2}{K_1} \right) \\ \frac{dN_2}{dt} &= r_2 N_2 \left( 1 - \frac{N_2 + \alpha_{21} N_1}{K_2} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

Considere que  $r_1 = r_2 = 1$ .

- a) Mostre que se as duas espécies têm a mesma capacidade suporte  $K_1 = K_2 = 100$ ,  $\alpha_{12} = 0.8$  e  $\alpha_{21} < 0.6$  então elas podem coexistir (coexistência estável). Biologicamente, isso significa que a competição entre as espécies (interespecífica) deve ser mais fraca do que a competição dentro das espécies (intraespecífica) se elas possuem uma mesma capacidade suporte. De outra forma, ainda podemos interpretar como: na primeira equação, adicionar um indivíduo da espécie 1 prejudica a espécie 1 mais do que adicionar um indivíduo da espécie 2.
- b) Mostre que se  $\alpha_{12} = 0.6$ ,  $\alpha_{21} = 1.2$ ,  $K_1 = 80$  e  $K_2 = 100$ , então as duas espécies podem coexistir também, ainda que a espécie 2 seja fortemente afetada pela espécie 1 (competição interespecífica forte).

- c) Mostre que as duas espécies não podem coexistir se  $\alpha_{12} = 1.1$  e  $\alpha_{21} = 1.2$ ,  $K_1 = 80$  e  $K_2 = 100$ , as duas espécies não podem coexistir.
3. Uma planta silvestre nativa da Califórnia, *Lupinus nanus* normalmente possui flores azuis. Ocasionalmente, plantas com flores rosa são observadas em populações selvagens. Nesta planta, a cor da flor é controlada em um único locus, com o alelo rosa totalmente recessivo ao alelo azul (isto é, indivíduos heterozigotos são azuis). Em 1970, Harding visitou várias populações de *L. nanus* da costa da Califórnia. Em uma certa população, ele encontrou 25 plantas com flores rosa e 3291 plantas com flores azuis, somando então um total de 3316 plantas.
- a) Calcule as frequências alélicas esperadas e as frequências genotípicas se a população estivesse em equilíbrio de Hardy-Weinberg.
- b) Harding estudou a fertilidade dessas plantas contando o número de vagens/semes produzidas por planta em uma subamostra da população. Ele encontrou o seguinte:
- azuis: média de 19.33 vagens
  - rosas: média de 13.08 vagens
- Suponha que os heterozigotos azuis sejam tão aptos quanto os homozigotos azuis e que as sementes de a taxa de mortalidade após a germinação é a mesma independente de que planta veio a semente. Calcule a aptidão relativa de cada genótipo (dica: considere a aptidão ou fitness dos indivíduos azuis a máxima e considere a aptidão dos rosas em relação à aptidão dos azuis).
- c) Calcule o efeito da seleção natural mostrando como ficam as novas frequências dos fenótipos e dos alelos na próxima geração de *L. nanus*.
4. Lagartos da espécie *Uta stansburiana* são encontrados em muitos estados do oeste americano e no oeste do México. Os machos possuem três variedades, cada uma com uma coloração diferente na região ventral do pescoço/garganta: laranja, amarelo ou azul. Essas cores da garganta estão relacionadas com a estratégia de acasalamento que o macho usa e é definida geneticamente (portanto passada para próximas gerações). Os machos de garganta alaranjada são maiores, agressivos, têm grandes territórios com várias fêmeas e por ser grande, esse é um território difícil de ser bem guardado pelo macho. Os machos de garganta azul têm territórios menores com apenas uma fêmea e fazem uma boa defesa, bastante agressiva, desse seu pequeno território e sua fêmea. Os machos de garganta amarela, cujas marcas e comportamentos imitam os das fêmeas, são conhecidos como trapaceiros (“sneakers”); eles não mantêm um território (e nem fêmeas), mas em vez disso se aglomeram e se esgueiram para os territórios de outros machos para acasalar com suas fêmeas. O território mais fácil de ser invadido é o território dos machos de garganta laranja. Em geral, o que se observa é que as 3 estratégias de machos coexistem na maioria das populações estudadas por Sinervo e colaboradores. O sucesso e estabelecimento desses machos pode ser representada por uma matriz de ganhos/payoffs como a do jogo de pedra-papel-tesoura abaixo:

	Laranja	Azul	Amarelo
Laranja	1	$a$	$b$
Azul	$b$	1	$a$
Amarelo	$a$	$b$	1

(3)

- a) Como devem ser as relações entre  $a$ ,  $b$  e 1 da matriz de payoffs para representar a história dos machos de lagartos contada acima.
- b) Se  $a = b = \frac{1}{2}$ , qual é a sua expectativa sobre a estratégia que é evolutivamente estável nessa população?
- c) Em uma população estudada, a estratégia azul é a única encontrada. Mesmo fazendo tentativas de se incluir uma certa quantidade de machos amarelos e laranjas, os pesquisadores observam que estas estratégias acabam sendo extintas, pois os machos não conseguem ter sucesso no estabelecimento de territórios e portanto não se acasalam. Desta forma, escreva como deve ser a matriz de payoffs que representa essa população e explique.