Definições:

$$E[X] = \overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N} = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

$E[X+Y] = E[X] + E[Y]$ (1)

$E[2X] = 2E[X]$

$E[E[X]] = E[X]$

$E[c] = c$ onde c é cte

$$Var[X] = E[(X - \overline{X})^2] = E[(X - E[X])^2]$$

$$= E[X^2 - 2XE[X] + E[X]^2]$$

$$= E[X^2] - E[2X\underbrace{E[X]}_{\text{ctes}}] + E[E[X]^2]$$

$$= E[X^2] - 2E[X]E[X] + E[X]^2$$

$$= E[X^2] - 2E[X]E[X] + E[X]^2$$

$$= E[X^2] - 2E[X]^2 + E[X]^2 =$$

$$= E[X^2] - E[X]^2$$

$$Cov[X,Y] = E[(X - \overline{X})(Y - \overline{Y})] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] =$$

$$= E[XY - XE[Y] - E[X]Y + E[X]E[Y]] =$$

$$= E[XY] - E[XE[Y]] - E[E[X]Y] + E[E[X]E[Y]]$$

$$= E[XY] - E[Y]E[X] - E[X]E[Y] + E[X]E[Y]$$

$$= E[XY] - E[X]E[Y] = E[XY] - \overline{X}\,\overline{Y}$$

$$Y = \alpha + \beta_{Y,X} X$$

(2)

$\beta_{Y,X}$ é o coef angular da regressão linear de Y por X.

$$\mathrm{Cov}[X, \alpha + \beta X] =$$

$$= E[X(\alpha + \beta X)] - E[X]E[\alpha + \beta X]$$

$$= E[\alpha X + \beta X^2] - E[X](\alpha + \beta E[X])$$

$$= \cancel{\alpha E[X]} + \beta E[X^2] - \cancel{\alpha E[X]} - \beta E[X]^2$$

$$= \beta\left(E[X^2] - E[X]^2\right)$$

$$= \beta \, \mathrm{Var}[X]$$

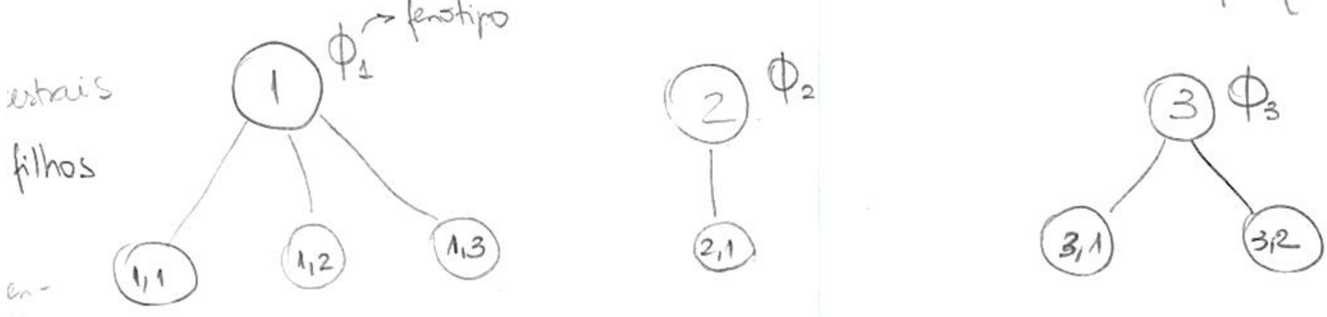
Se X e Y são positivamente relacionados (se X↑, Y↑) então a Cov(X,Y) > 0

Se X e Y são negativamente relacionados (se X↑, Y↓) então Cov(X,Y) < 0

Genética Quantitativa:

→ Focar nos fenótipos (e não somente em alelos/genótipos)

→ Características mensuráveis (não somente frequências)



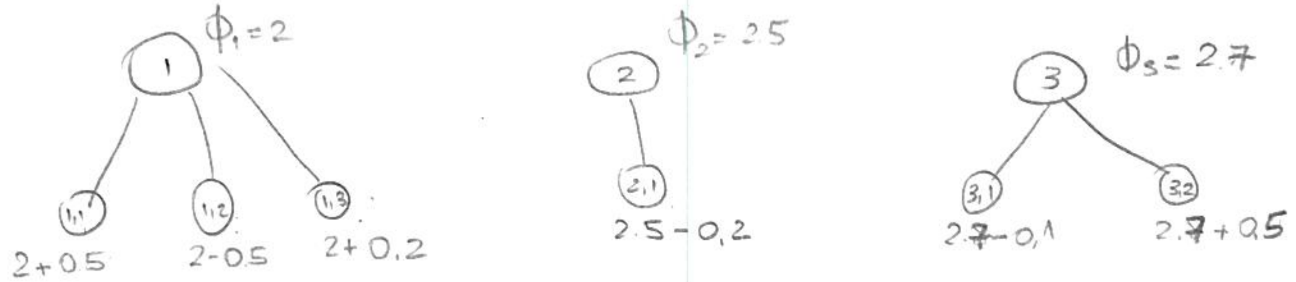
$\phi'_{i,j} = \phi_i + \delta_{i,j}$ ou seja a característica do filho é como a do pai, a menos de uma pequena diferença δ.

Mas nós não queremos saber como cada indivíduo muda em relação ao ancestral. Estamos interessados em saber como a população toda muda em média de um instante de tempo p/ o outro. Queremos saber, em essência, como varia a média de uma certa característica.

c

i filhos

sc



$$\text{média dos Ancestrais} = \sum_{i=1}^{N=3} \frac{\phi_i}{N} = \frac{2+2.5+2.8}{3} = 2.4$$

$\bar{\phi} = 2,4$

$$\text{média dos Descendentes} = \frac{2+0.5 + 2-0.5 + 2+0.2 + 2.5-0.2 + 2.7-0.1 + 2.7+0\ldots}{6}$$

$\bar{\phi}'$

2,38

$$= \frac{3.2 + (0.5-0.5+0.2) + 1.2.5(-0.2) + 2.2.7 + (-0.1+\ldots}{6.}$$

$(3.2 + 3(0.2/3) + 2.5 + (-0.2/1) + 2.2.7 + 2(0.4/2))$

6

$$= \frac{W_1\, 2 + (0.5-0.5+0.2) + W_2\, 2.5 + (-0.2) + W_3\, 2.\ldots + (-0.1) + \ldots}{\sum_{i=1}^{N=3} W_i}$$

$$= \frac{6+0.2+2.5-0,1+5.4+0.4}{6}$$

$= 2,38$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{N} \left[W_i \phi_i\right] + \overbrace{(0.5-0.5+0.2) + (-0.2) + (-0.1)+0.5}^{\delta_{i,j}}}{\sum_{i=1}^{N} W_i}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{N} w_i \phi_i + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{w_i} \delta_{ij}}{\sum_{i=1}^{N} w_i} = (*)$$

s:

$$\Rightarrow \quad \frac{\sum_{i=1}^{N} w_i}{N} = \overline{w} \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} w_i = N\overline{w}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sum_{j=1}^{w_i} \delta_{ij}}{w_i} = \overline{\delta}_i \Rightarrow \sum_{j=1}^{w_i} = w_i \overline{\delta}_i$$

$$(*) = \frac{\sum_{i=1}^{N} w_i \phi_i + \sum_{i=1}^{N} w_i \overline{\delta}_i}{N\overline{w}} =$$

$$= \frac{1}{\overline{w}} \left[\frac{\sum_{i=1}^{N} w_i \phi_i}{N} + \frac{\sum_{i=1}^{N} w_i \overline{\delta}_i}{N} \right]$$

$$= \frac{1}{\overline{w}} \left(E[w\phi] + E[w\overline{\delta}] \right)$$

$$\Rightarrow \quad \overline{\phi}' = \frac{1}{\overline{w}} \left(E[w\phi] + E[w\overline{\delta}] \right)$$

Esta já é a eq de Price, mas não está escrita da

$E[W\phi]$ $\rightsquigarrow$ vamos escrever este termo de outra forma

[..]mos que:

$$[C]ov[W,\phi] = E[W\phi] - \underbrace{E[W]}_{\overline{W}}\underbrace{E[\phi]}_{\overline{\phi}}$$

$$\Rightarrow E[W\phi] = Cov[W,\phi] + \overline{W}\,\overline{\phi}$$

Voltando p/ a eq de Price:

$$\overline{\phi}' = \frac{1}{\overline{W}}\left(E[W\phi] + E[W\overline{\delta}]\right) =$$

$$= \frac{1}{\overline{W}}\left(Cov[W,\phi] + \overline{W}\,\overline{\phi} + E[W\overline{\delta}]\right) =$$

$$= \frac{1}{\overline{W}}\left(Cov[W,\phi] + E[W\overline{\delta}]\right) + \frac{\cancel{\overline{W}}\,\overline{\phi}}{\cancel{\overline{W}}}$$

$$\overline{\phi}' - \overline{\phi} = \frac{1}{\overline{W}}\left(Cov[W,\phi] + E[W\overline{\delta}]\right)$$

$$\Delta\overline{\phi} = \frac{1}{\overline{W}}\left(Cov[W,\phi] + E[W\overline{\delta}]\right)$$

$\frac{1}{\overline{W}} Cov[W,\phi]$ é o termo que diz como a característica muda com o fitness (ou como característica muda c/ reprodução/mortalidade diferencial)

Este termo então leva em conta a seleção / deriva.

Seleção → traz uma função que define W em relação a ϕ.

Deriva → por acaso (efeito estocástico), em geral em pop. menores),
o fitness de uma certa característica pode ser maior.
(por exemplo, só sorteio bolas azuis de um pote de azuis e vermelha

$\frac{1}{\bar{W}} E[W\bar{\delta}]$ é o termo que diz como processos que envolvem a reprodução (tais como recombinação, mutação e até seleção em um menor nível de organização) causam mudanças no fenotipo médio.

Diferencial de seleção:

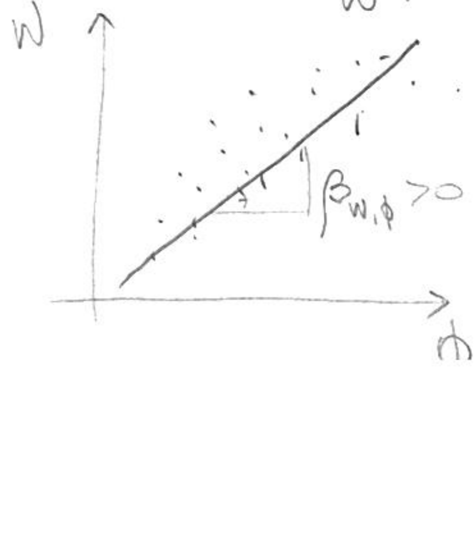
Vamos chamar o termo: $\frac{1}{\bar{W}} Cov[W, \phi]$ de diferencial de seleção ($S\phi$)

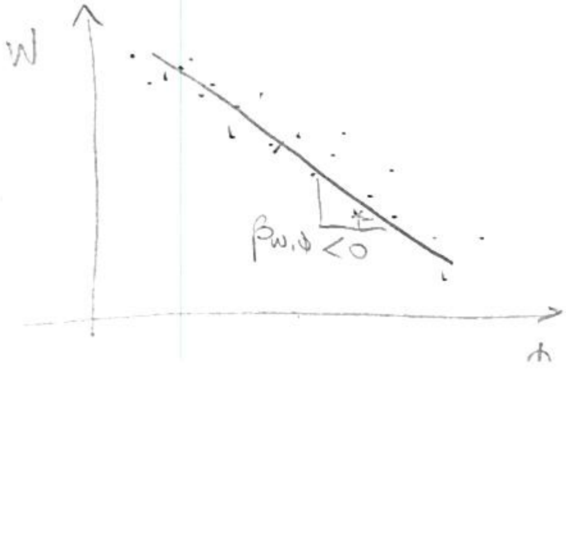
$$S\phi = \frac{1}{\bar{W}} Cov[W, \phi].$$

Vimos nas propriedades que $Cov[X, Y] = \beta_{Y,X} Var[X]$

Portanto, podemos escrever que:

$$S\phi = \frac{1}{\bar{W}} \beta_{W,\phi} Var[\phi]$$





∴ Olhando somente para 1º termo da Eq de Price, que é o termo responsável pelas mudanças por seleção, temos que:

$$\Delta\bar{\phi} = \frac{1}{\bar{W}}\left(Cov[W,\phi] + \cancel{E(W\bar{\delta})} \right)$$

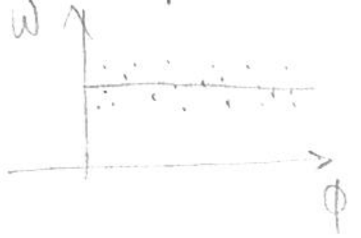
$$= \frac{1}{\bar{W}} \beta_{W,\phi} Var[\phi]$$

Se $\beta_{W,\phi} > 0 \rightarrow \Delta\bar{\phi} > 0$, ou seja a média da caract ϕ aumenta

Se $\beta_{W,\phi} < 0 \rightarrow \Delta\phi < 0$, ou seja, a média da caract ϕ diminui

→ Seleção Direcional (tem uma direção que a média muda)

Somente se $\beta_{W,\phi} = 0$, isto é que a média não muda:



Vimos como muda a média conforme a Seleção. Mas como muda a variância da característica conforme a seleção. Vamos olhar para a Eq de Price, trocando ϕ por $(\phi - \bar{\phi})^2$

$$\Delta\bar{\phi} = \frac{1}{\bar{W}}\left(Cov[W,\phi] + E[W\bar{\delta}]\right)$$

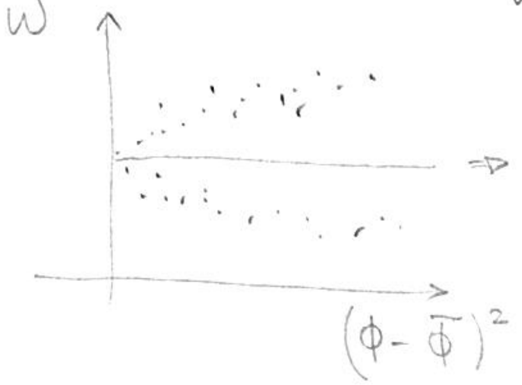
$$\Delta E(\phi) = \frac{1}{} \left(Cov[W,\phi] + E[W\bar{\delta}]\right)$$

$$\Delta E[(\phi-\bar{\phi})]^2 = \frac{1}{\bar{W}}\left(Cov[W, (\phi-\bar{\phi}^2)] + \cancel{E[W\,\bar{\delta}_{(\phi-\bar{\phi})^2}]}\right) \to 0$$

novamente vamos ignorar este termo

$$\Delta Var[\phi] = \frac{1}{\bar{W}}\left(Cov[W, (\phi-\bar{\phi})^2]\right)$$

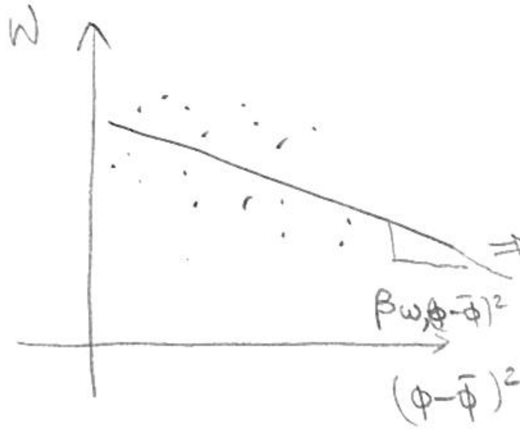
$$\frac{1}{\bar{W}}\,\beta_{W,(\phi-\bar{\phi})^2}\,(\phi-\bar{\phi})^2$$



$\Rightarrow \beta_{W,(\phi-\bar{\phi})^2} = 0$

Variância do ϕ não muda com o tempo

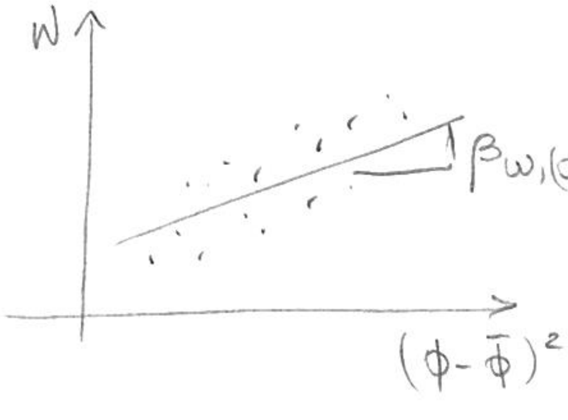
$\Delta Var(\phi) = 0$



$\Rightarrow \beta_{W,(\phi-\phi)^2} < 0$

Variância do ϕ diminui c/ tempo $\Rightarrow$ Selecção estabilizadora

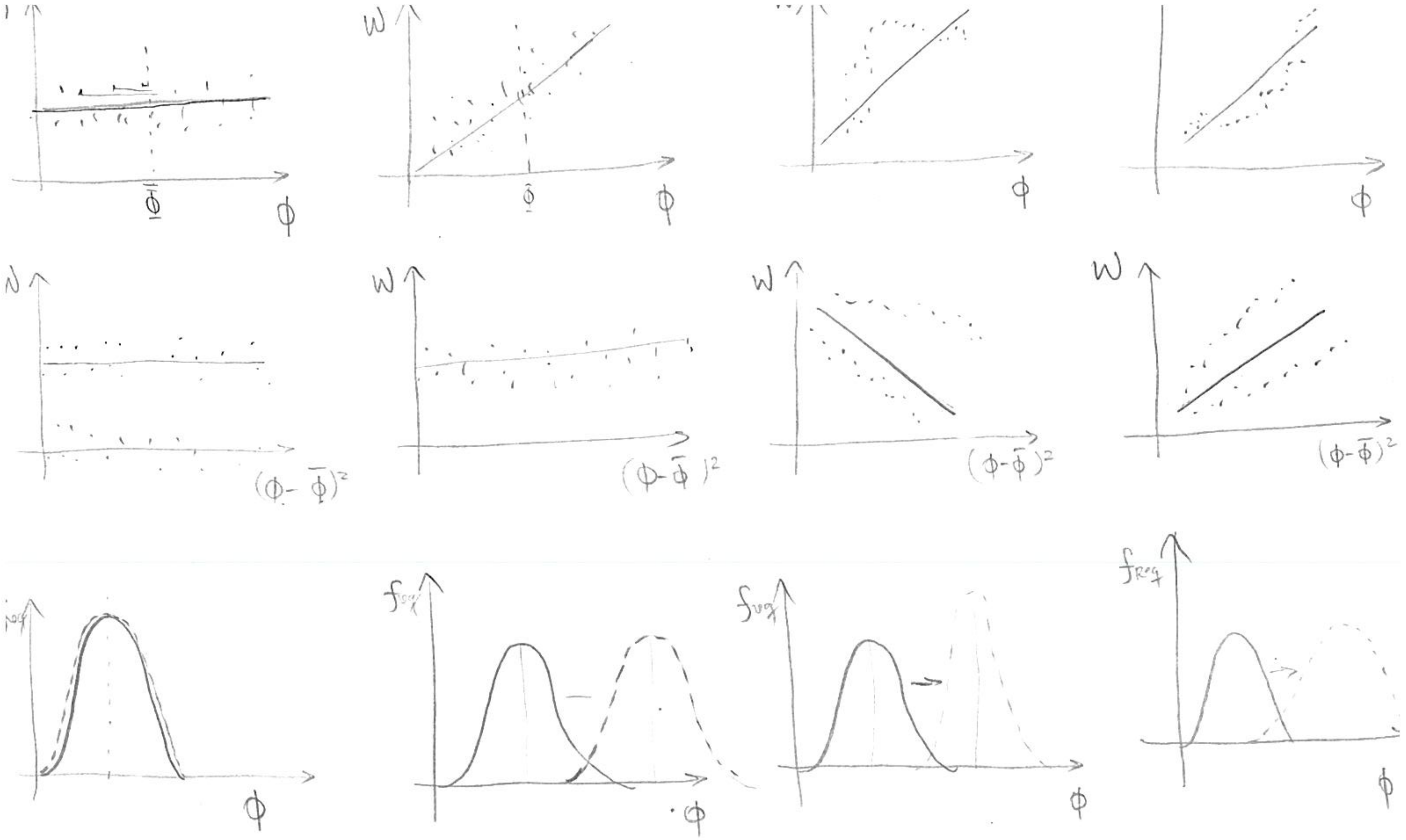
$\Delta Var(\phi) < 0$



$\beta_{W,(\phi-\bar{\phi})^2} > 0$

Variância do ϕ aumenta c/ tempo $\Rightarrow$ Selecção disruptiva.

$\Delta Var(\phi) > 0$.


W
ϕ
$\bar{\phi}$
$(\phi-\bar{\phi})^2$
freq