NOTA: essas notas de aula estão em constante atualização após reformulações e correções.

Fórmulas do capítulo:

PG: $a_o + a_o q + a_o q^2 + \cdots + a_o q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q-1} a_o = \frac{1-q^n}{1-q} a_o$

Variáveis auxiliares: $Z = 1 + R$

Tabela Price:

Prestação: $x = \frac{(Z_m - 1) Z_m^n}{Z_m^n - 1} \$_o$

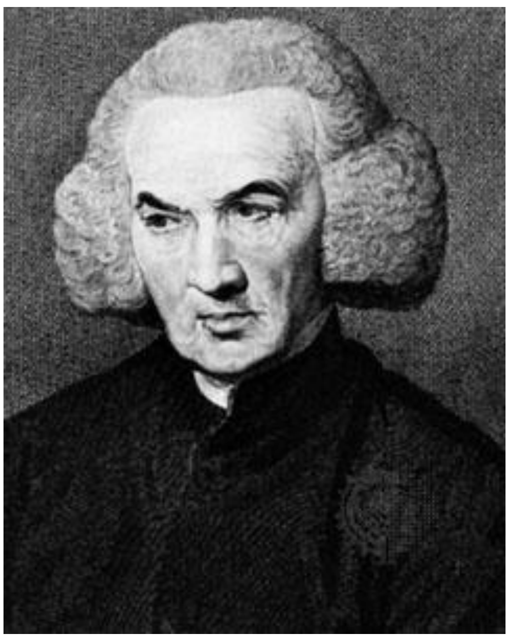
Dívida: $D_k = \frac{(Z_m^n - Z_m^k)}{(Z_m^n - 1)} \$_o$

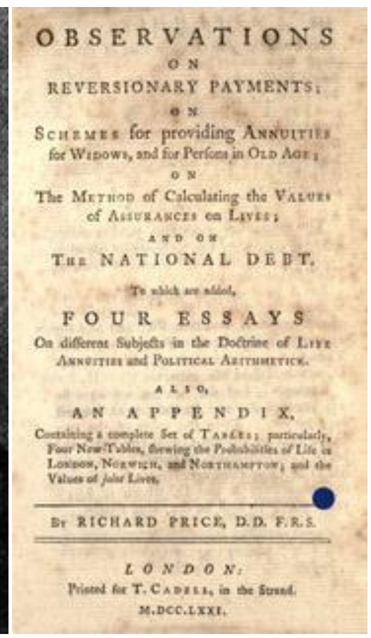
Valor presente: $VP = \sum_t \frac{\$_t}{Z^t}$.

Mudança de período. Suponha que o período de R seja de um mês, queremos saber qual a taxa anual. Note que queremos uma taxa equivalente, que no final do período leve ao mesmo valor do patrimônio nos dois casos. Ou seja: $\$_{1ano} = (1+R_{anual})\$_o = (1+R_{mensal})^{12}\$_o$, ou $\$_{1ano} = Z_{anual}\$_o = Z_{mensal}^{12}\$_o$. Nesse caso: $Z_{anual} = Z_{mensal}^{12}$ ou $R_{anual} = Z_{mensal}^{12} - 1 = \left(1+R_{mensal}\right)^{12} - 1$. No problema inverso sabemos a taxa anual e desejamos a mensal: $Z_{mensal} = \sqrt[12]{Z_{anual}} = Z_{anual}^{1/12}$.

Pagando um dívida.

Richard Price [1723 – 1791] apresentou o método, hoje conhecido como sistema Price, ou tabela de Price, em 1771 no livro ***"Observations on Reversionary Payments"***. Era amigo de Thomas Bayes e foi o editor da famosa obra póstuma de Bayes ***"An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances"*** que estabelece o teorema de Bayes.





OBSERVATIONS
ON
REVERSIONARY PAYMENTS;
ON
SCHEMES for providing ANNUITIES for WIDOWS, and for Persons in OLD AGE;
ON
The METHOD of Calculating the VALUES of ASSURANCES on LIVES;
AND ON
THE NATIONAL DEBT.
To which are added,
FOUR ESSAYS
On different Subjects in the Doctrine of LIFE ANNUITIES and POLITICAL ARITHMETICK.
ALSO,
AN APPENDIX,
Containing a complete Set of TABLES; particularly, Four New Tables, shewing the Probabilities of Life in LONDON, NORWICH, and NORTHAMPTON; and the Values of joint Lives.

BY RICHARD PRICE, D.D. F.R.S.

LONDON:
Printed for T. CADELL, in the Strand.
M.DCC.LXXI.

Tabela PRICE. No sistema da tabela Price o acertado é que se deve abater a dívida $\$_o$ em n prestações idênticas de valor x com uma dada taxa de retorno R, usualmente anual. Dado R_{an} calculamos imediatamente $Z_{an} = 1 + R_{an}$. Mas como a prestação usualmente será paga mensalmente precisaremos de Z_{men}, dado por $Z_m = \left[1+R_a\right]^{\frac{1}{12}}$. A questão é quanto deve ser o valor da prestação para quitar a dívida após n períodos. No primeiro mês os juros incidem sobre o valor total $\$_o$. Mas no mês seguinte deve incidir sobre o que sobrou após o pagamento da prestação. Vamos construir uma tabela com os valores a cada momento.

Tempo	Dívida após pagamento	Dívida antes do pagamento
0	$\$_o$	$Z_m\$_o$

1	$Z_m\$_o - x$	$Z_m\left[Z_m\$_o - x\right] = Z_m^2\$_o - Z_m x$
2	$Z_m^2\$_o - Z_m x - x$	$Z_m^3\$_o - Z_m^2 x - Z_m x$
3	$Z_m^3\$_o - Z_m^2 x - Z_m x - x$	$Z_m^4\$_o - Z_m^3 x - Z_m^2 x - Z_m x$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	$Z_m^k\$_o - Z_m^{k-1}x - Z_m^{k-2}x - Z_m x - x$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	
n	$Z_m^n\$_o - Z_m^{n-1}x - Z_m^{n-2}x - Z_m x - x$	

A dívida no instante n, portanto, será dada por:

$$D_n = Z_m^n\$_o - Z_m^{n-1}x - Z_m^{n-2}x - \cdots - Z_m x - x = Z_m^n\$_o - \left[Z_m^{n-1} + Z_m^{n-2} + \cdots + Z_m^1 + Z_m^0\right]x =$$
$$= Z_m^n\$_o - \left[1 + Z_m^1 + Z_m^2 + \cdots + Z_m^{n-1}\right]x$$

A somatória de uma progressão geométrica com n termos do tipo $S_n = a_o + a_o q + a_o q^2 + \cdots + a_o q^{n-1}$ pode ser calculada com o truque do telescópio:

$$\begin{aligned} S_n &= a_o + a_o q + a_o q^2 + \cdots + a_o q^{n-1} \\ \underline{qS_n} &\underline{= a_o q + a_o q^2 + \cdots + a_o q^{n-1} + a_o q^n} \\ qS_n - S_n &= a_o q^n - a_o \end{aligned}$$

Daí se tira que $(q-1)S_n = (q^n - 1)a_o$ e $S_n = \dfrac{q^n - 1}{q-1}a_o = \dfrac{1-q^n}{1-q}a_o$. Embora as duas formas $\dfrac{q^n-1}{q-1}a_o$ e $\dfrac{1-q^n}{1-q}a_o$ sejam idênticas tendemos a usar a primeira quando a razão q é maior do que 1 e a segunda quando ela é menor do que 1 para deixar denominador e numerador positivos.

Reanalizando a fórmula da dívida vemos que $1 + Z_m^1 + Z_m^2 + \cdots + Z_m^{n-1}$ é uma PG com $q = Z_m > 1$ e $a_o = 1$, logo $1 + Z_m^1 + Z_m^2 + \cdots + Z_m^{n-1} = \dfrac{Z_m^n - 1}{Z_m - 1}$. Nesse caso a dívida após n períodos vale: $D_n = Z_m^n\$_o - \dfrac{Z_m^n - 1}{Z_m - 1}x$. Mas o combinado foi de amortizar completamente a dívida em n períodos, ou seja, devemos impor que $D_n = 0$, ou seja $\dfrac{Z_m^n - 1}{Z_m - 1}x = Z_m^n\$_o$ é a equação que nos permite calcular o valor da prestação $x = \dfrac{(Z_m - 1)Z_m^n}{Z_m^n - 1}\$_o$ que quita a dívida pela tabela Price. Note que as lojas só precisam apresentar a tabela com os valores de $\frac{x}{\$_o} = \frac{(Z_m - 1) Z_m^n}{Z_m^n - 1}$ e multiplicar esse número pelo valor financiado para obter o valor da prestação.

Taxa de juros oculta. Quando o consumidor chega em uma loja a taxa de juros não está explícita, mas sim a prestação. O problema é inverter a equação $\frac{(Z_m - 1) Z_m^n}{Z_m^n - 1} = \frac{x}{\$_o}$, na variável Z_m, sabendo $\frac{x}{\$_o}$. Mas essa é uma equação de grau $n+1$ para a qual encontrar as raízes pode ser muito complicado.

Valor Presente. O que você acha da seguinte proposta: você me dá x unidades monetárias hoje que eu as devolvo no período seguinte? Se você mantiver seu dinheiro e não gastá-lo continuará com as x unidades monetárias no momento seguinte, em situação igual a da proposta. Por outro lado, se alguma necessidade aparece hoje você tem o dinheiro disponível se não aceitar a proposta. Logo não aceitar a proposta é melhor. Daí se muda a proposta: quanto você aceita me dar hoje para que eu lhe devolva x unidades monetárias no período seguinte? Seja $y < x$ o valor que você aceitaria trocar por x amanhã. Vejamos as suas opções: você poderia não me emprestar o dinheiro e aplicar y na taxa R para ter $(1+R)y$ amanhã, ou me emprestar o dinheiro e obter x amanhã. Isso significa que você trocaria y hoje por x amanhã apenas se $(1+R)y = x$, ou seja, $y = \frac{x}{1+R}$ hoje por x amanhã. O presente vale mais do que o futuro, e você descontou o valor do futuro pelo fator $\frac{1}{1+R}$. O valor $\frac{x}{1+R}$ é chamado de valor presente de x unidades monetárias um período depois. Obviamente que um valor x a ser recebido t períodos no futuro vale hoje $\frac{x}{(1+R)^t}$. Suponha agora que você deseje trocar um fluxo de pagamentos em que receberá x por n períodos no futuro, por um valor a vista. Qual o valor presente desse fluxo de pagamentos?

$$VP = \frac{x}{(1+R)} + \frac{x}{(1+R)^2} + \cdots + \frac{x}{(1+R)^n} = \frac{x}{(1+R)}\left[1 + \frac{1}{(1+R)} + \frac{1}{(1+R)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+R)^{n-1}}\right]$$

Mas caímos de novo na PG com $q = \frac{1}{1+R} = \frac{1}{Z} < 1$. Então sabemos que $\left[1 + \frac{1}{Z} + \frac{1}{Z^2} + \cdots + \frac{1}{Z^{n-1}}\right] = \frac{1 - \frac{1}{Z^n}}{1 - \frac{1}{Z}} = \frac{Z(Z^n - 1)}{Z^n (Z-1)}$, logo o valor presente de um fluxo de pagamentos constante x será $VP = \frac{Z\left(Z^n - 1\right)}{Z^n\left(Z-1\right)}\frac{1}{Z}x = \frac{\left(Z^n - 1\right)}{Z^n\left(Z-1\right)}x$. Uma instituição que pode aplicar seu dinheiro na taxa de juros R pode trocar uma casa que vale $\$_o$ no mercado hoje por um fluxo de pagamentos x se $\$_o = \frac{\left(Z^n - 1\right)}{Z^n\left(Z-1\right)}x$ ou $x = \frac{\left(Z-1\right)Z^n}{\left(Z^n - 1\right)}\$_o$ que é, exatamente, a prestação da tabela Price.

Valor presente de um fluxo de pagamentos qualquer. Nesse caso $VP = \sum_t \frac{\$_t}{Z^t}$.

Taxa Interna de Retorno [TIR] ou Internal Rate of Return [IRR]: é a taxa para a qual o Valor Presente de um fluxo de rendas é nulo. Obviamente, o VP só admite raízes se alguns fluxos forem negativos. Isso é comum em investimentos pois o investidor inicia seu negócio com gastos para usufruir de lucros, ou rendas, no futuro. A taxa interna de retorno deve ser calculada através da equação:

$$\sum_t \frac{\$_t}{(1+R_{\text{int}})^t} = 0$$

Nesse caso admite-se que alguns $\$_t$ serão negativos.

Exemplo: Pagou-se $\$_o$ por um título que renderá $\$$ todos os anos por 30 anos. Neste caso a equação da TIR será $-\$_o + \sum_{t=1}^{30} \frac{\$}{(1+R_{\text{int}})^t} = 0$, ou $\sum_{t=1}^{30}\left(\frac{1}{Z_{\text{int}}}\right)^t = \frac{\$_o}{\$}$. Usando a PG temos $\sum_{t=1}^{30}\left(\frac{1}{Z_{\text{int}}}\right)^t = \frac{1}{Z_{\text{int}}}\sum_{t=1}^{30}\left(\frac{1}{Z_{\text{int}}}\right)^{t-1} = \frac{1}{Z_{\text{int}}}\frac{\left(1-\frac{1}{Z_{\text{int}}^{30}}\right)}{\left(1-\frac{1}{Z_{\text{int}}}\right)} = \frac{1}{Z_{\text{int}}^{30}}\frac{\left(Z_{\text{int}}^{30}-1\right)}{\left(Z_{\text{int}}-1\right)}$, logo a equação da TIR é idêntica, nesse caso, a revelar a taxa de juros implícita em um financiamento:

$$\frac{1}{Z_{\text{int}}^{30}}\frac{\left(Z_{\text{int}}^{30}-1\right)}{\left(Z_{\text{int}}-1\right)} = \frac{\$_o}{\$}$$