**Segundo Trabalho de Econofísica: Matrizes e Álgebra Linear**

**Primeiro semestre de 2013**

**Prof. Carlos Lenz Cesar**

**Instruções: entre no site:** [**http://digilander.libero.it/foxes/SoftwareDownload.htm**](http://digilander.libero.it/foxes/SoftwareDownload.htm)

**Faça o download do MATRIX 2.3 - Matrix and Linear Algebra functions for EXCEL. Faça a descompressão do arquivo .zip para um diretório [digilander].**

**Para usá-lo use o procedimento usual de instalação de Add-Ins do Excel: (1) Abra o Excel; (2) Click no botão do office do Excel e escolha opções; (3) selecione suplementos [add-ins] e vá até o diretório escolhido para o Matrix2.3; (4) selecione "matrix.xla"; (5) Click OK!**

1. **Operações de arrays no Excel**: Usando operações de arrays do Excel calcule em um passo apenas:  e .
2. **Operações de multiplicação de matrizes no Excel**: Usando operações de matrizes do Excel calcule:  e .
3. **Sistema Linear Quadrado:** Consider o seguinte sistema de equações lineares



1. Re-escreva no Excel o sistema na forma matricial .
2. Use o Digilander para calcular o posto de A, ? Usando a definição de posto como a dimensão da maior sub-matriz com determinante não nulo o que se pode afirmar sobre uma matriz quadrada cujo posto é igual à sua dimensão?
3. Calcule usando comando do Excel o ,  e resolva o sistema utilizando a matriz inversa .
4. Utilize o SysLin do Digilander para resolver esse sistema.
5. Use o Macro do Digilander na operação de matrizes e resolva o sistema.
6. Escreva a matriz ampliada . Calcule o posto . Utilize o método de Gauss-Jordan do Digilander e vá escrevendo os vários passos até resolver o sistema.
7. Use a Macro Gauss step-by-step do Digilander nesse sistema.
8. **Sistema Linear subdeterminado**: Considere o sistema  subdeterminado, ou seja, . Nesse caso existem  variáveis livres e a solução pode ser escrita como .Considere o seguinte sistema de equações lineares



1. Calcule os postos  e . Calcule a nulidade desse sistema. Quantas variáveis livres existem? Utilize a função SysLinSing para encontrar a solução do tipo . Escolha valores das variáveis independentes e mostre que a solução satisfaz ao sistema.
2. Apesar do sistema admitir infinitas soluções a solução com menor norma possível é dada por: . Calcule essa solução de noorma mínima para esse sistema.
3. **Sistema Linear superdeterminado**: Considere o sistema  superdeterminado, ou seja, , sem solução. Multiplicando ambos os lado pela transposta de A temos um sistema de n equações e n incógnitas do tipo: . A matriz  é quadrada e simétrica e a solução  desse sistema, embora não seja solução de , minimiza o erro cometido, ou seja, se , então a somatória do quadrado dos resíduos  é o menor possível.

Considere o sistema: , ou seja:

1. Calcule os postos  e  e mostre que o sistema não admite solução, ou seja, .
2. Calcule as matrizes , , e .
3. Calcule a soma dos quadrados dos resíduos .
4. Gere um vetor  com cada componente de  sendo um número aleatório entre . Calcule  e a sua somatória do quadrado dos resíduos . Apertando F9 note que esse número é sempre maior do que .
5. **Ajuste de Curva por Regressão Linear**: Suponha que temos n observações de y e dos valores de X1, X2, ... Xk. As equações  para todos os i’s pode ser escrita como:



Onde  foram os valores observados,  são os coeficientes que desejamos determinar e  são os resíduos, ou erros. A solução que minimiza a somatória dos quadrados dos resíduos é dada por: . Considere os pontos da tabela abaixo que se acredita obedecem a uma parábola .

|  |  |
| --- | --- |
| x | y |
| -5 | 2.9 |
| -4 | 3.5 |
| -3 | 0.1 |
| -2 | -0.9 |
| -1 | 0.6 |
| 0 | 1.5 |
| 1 | 0.9 |
| 2 | 3.5 |
| 3 | 9.5 |
| 4 | 12.4 |
| 5 | 16.0 |

1. Use regressão linear com matrizes para encontrar .
2. Faça um gráfico da função ajustada por regressão com os pontos observados.
3. **Decomposição LU de matriz quadrada**: A decomposição LU é escrever a matriz como o produto de uma matriz triangula inferior [Lower] por uma matriz triangular superior [Upper], na forma. Faça a decomposição LU da matriz: .
4. **Decomposição de Cholesky**: A decomposição de Cholesky é uma decomposição LU na qual a matriz triangular superior é a transposta da inferior, ou seja, . Só se aplica a matrizes simétricas definidas positivas. Faça a decomposição de Cholesky da matriz: . Mostre que a multiplicação da matriz obtida pela sua transposta realmente recupera a matriz original. Tente também com a matriz . O que acontece com os sinais dos elementos diagonais?
5. **Decomposição em Valores Singulares [Single Value Decomposition - SVD]**: A decomposição SVD é da forma  com as matrizes U e V ortogonais, ou seja,  e . Se A é quadrada as três matrizes também são quadradas de mesma dimensão.
6. Encontre a SVD da matriz: .
7. Encontre a SVD da matriz: .
8. Encontre a SVD da matriz: .
9. **Teorema de Cayley-Hamilton:** No problema de autovalor , ou seja, , exigimos que o polinômio característico seja nulo, i.e., . O teorema de Cayley-Hamilton afirma que . Vamos verificar esse teorema para a matriz: . Use os comandos do Digilander para encontrar o polinômio característico dessa matriz. Confira o teroema utilizando operações de matrizes.
10. **Autovetores e autovalores:**
11. Encontre os autovalores da matriz: .
12. Para cada um dos autovalores encontre o autovetor, de preferência normalizados.
13. Encontre a matriz .
14. Diagonalize a matriz usando a regra .
15. Se a matriz for simétrica os autovalores serão reais. Nesse caso pode-se mostrar facilmente que . Se além disso a matriz for definida positiva os autovalores serão reais e positivos. Repita o problema 10 para a matriz simétrica do problema 8:.