**O truque do logarítmo:**

A expansão em série de Taylor-McLaurin da função  pode ser feita notando que, e . As derivadas de ordem superior a um podem ser facilmente calculadas usando: , para obter . Desse resultado mostramos que:



e:

.

O truque do logarítimo é muito útil em casos em que a convergência da série de Taylor é problemática. Suponha o caso da função , com  mas . Melhor dizendo, com  e . Se fizermos a expansão de Taylor-McLaurin para esta função, obteremos:

.

Cuja convergência depende se o produto  é maior ou menor do que 1. Em lugar de fazer a expansão direta da função vamos expandir seu logaritmo na forma: , que não apresenta problemas de convergência para . Agora retorna-se à função inicial para reescreve-la como .

**Teorema Central do Limite e o truque do logarítmo:**

Agora vamos tomar uma variável aleatória  dada pela adição de  v.a. independentes no limite . Sabemos que . Note que se as v.a. fossem, além de independentes, idênticas [i.i.d.], teríamos , um caso semelhante ao utilizado no truque do logarítmo. Também sabemos que  e que . Um número menor do que 1 elevado à uma potência muito alta tende a zero. Mas não em  porque , o que significa que a função  se torna concentrada em torno de , caindo a zero para fora desse intervalo. Com isso podemos fazer uma expansão em série de Taylor-McLaurin da função característica, mas usando o truque do logarítmo, . Mas essa é a expansão dos cumulantes . Se as v.a. não são idênticas a expansão em Taylor agora será dada por .

**Teorema Central do Limite:**

Truncando a expansão até segunda ordem em  temos . Mas  e , logo  que é a função característica de uma normal com  e . Se as variáveis são independentes e idênticas [i.i.d.] então  e  e a distribuição tende para uma normal com  e . Então notamos que a variável  tem esperança  e desvio padrão , ambos crescendo com .

Vamos usar agora  em lugar de  . Note que nesse caso ,  e , portanto a nova fdp será  e a nova função característica será:



Nesse caso a função caracetrística da distribuição da média será dada por:



Que é a função característica da Normal , com  e . Note que se as v.a. são iid então  e . Agora e esperança fica parada e o desvio padrão vai diminuindo com o aumento de . Para manter os dois parados fazemos a última mudança de variável ,  e , logo  e a nova função característica será dada por:



Ou seja  que é a função característica da distribuição Normal padrão .

A melhor forma, portanto, de especificar o Teorema Central do Limite é afirmando que:

Se  e  são independentes, e  existem e são finitos então a v.a.:



Note que não foi necessário que as v.a. fossem idênticas ou que sigam uma distribuição normal mas apenas que a média seja feita em um número muito grande de v.a.s.

Se as v.a.s são iid então:



**Cuidados com o Teorema Central do Limite.**

Primeiro cuidado é em relação as condições de validade do teorema: momentos de ordem 1 e 2 finitos. Se o momento de ordem for infinito então o teorema pode falhar. Veremos o que ocorre com as ditribuições estáveis, ou distribuições de Lévy mais adiante.

Entretanto, mesmo no caso em que a variância é finita, garantindo a validade do teorema, cuidados extras são necessários para o comportamento das caudas. Note que o TCL depende da validade da expansão dos cumulantes, que truncamos na ordem 2. Isso significa que a região central, próxima do pico, vai coincidir com a Normal, mas essa aproximação vai se tornando pior nas caudas, bem longe do pico. No limite de  o teorema é 100% válido, mas dado um número grande  mas finito, a região de validade é um função de  que vai com  se a skewness é diferente de zero ou  se apenas a curtose existe.

Quem se interessa pelas caudas? A probabilidade nas caudas é obviemnte pequena, mas para muitas situações é essa probabilidade que interessa. No caso em que a probabilidade é muito pequena mas os efeitos do evento são devastadores o estudo das caudas é fundamental.

**Metodologias da expansão nos cumulantes:**

Para v.a.s iid o truque do logarítmo foi de fazer . Nesse ponto existem duas estratégias para estudar o comportamento de soma de  cópias independentes de .

1. Fazer uma expansão em série de Taylor-McLaurin, i.e., centrada em , de , que sai em termos dos cumulantes . Truncando a expansão até segunda ordem obtemos a função característica da Normal. Problemas que podem surgir são: (1) o cumulante de ordem 2 não existe, é infinito, logo a expansão não pode ser feita. Isso ocorre com distribuições com variância infinita que não obedece ao teorema central do limite. Se precisarmos de uma aproximação melhor é necessário levar a expansão até ordem 3, se , ou ordem 4 no caso de  que sempre ocorre para distribuições simétricas [todos os momentos ímpares são nulos]. Se  ou existem, i.e. são finitos, então teremos um controle da qualidade da aproximação até ordem 2. A continuação dessa expansão até ordens superiores [supondo que todos os momentos necessários existem] é chamada de EXPANSÃO DE EDGEWORTH. O bom dessa expansão é que ele nos permite definir até para que valores de  a aproximação da Normal é boa. Quaisquer dessas séries só podem ser utilizadas matematicamente com rigor se os momentos até a ordem necessária existirem.
2. A outra idéia é utilizada na metodologia de Laplace, ou da fase estacionária e expandir a função geradora dos cumulantes em um ponto especial que maximiza o expoente de uma função. O resultado dessa nova metodologia vale para qualquer intervalo de  desde que  seja grande o suficiente.

**Método de Laplace ou método da fase estacionária:**

O método da fase estacionária [**STATIONARY PHASE METHOD**], também denominado **STEEPEST DESCENT** ou **SADDLE POINT** [ponto de sela] – extensão do método de Laplace é mais adequado para o estudo do comportamento assimptótico das distribuições após a soma de  v.a.s, com  muito grande. Não é necessário que a integral tenha um como faremos aqui, poderia ter um  ou mesmo ser uma função real. Ambos os métodos são muito semelhantes, um usa funções exponenciais reais e o outro complexas.

Método de Laplace:

Suponha que se deseje calcular a integral , onde  é uma função que varia lentamente e  [na realidade basta  ser muito grande]. Note que o termo  será máximo quando  for mínimo, e que esse termo será tanto mais dominate quanto maior for . Se  possui pontos de mínimo então, nesses pontos,  e que . Então a idéia é expandir  nos pontos de mínimo como , fazer  e tirá-lo da integral obtendo: .

Podemos aumentar o intervalo de integração para  desde que . Agora só falta achar . Mas essa é uma integral de uma função Gaussiana e pode ser calculada rapidamente como:

Ou seja: , portanto:



Onde . Se existirem mais de um ponto de mínimo então:



**Método da Fase Estacionária:**

Suponha agora que a integral seja do tipo  , novamente com  e  uma função que varia pouco. Em relação ao método de Laplace a única mudança foi o  no expoente, que nos leva a uma função oscilatória. Nesse caso a função  é chamada de fase. Vamos expandir a fase em série de Taylor em torno de um ponto  qualquer:



Nesse caso teremos



O termo linear com  é o mais importante porque trata-se de uma função que oscila muito rapidamente, uma vez que ,



e cuja área é nula, ou seja:



Porque as áreas positivas se cancelam com as negativas.

Note que isso não é verdade para outras potências de , ou seja:



porque deixou de ser periódica. Assim com  muito grande e a função  variando pouco no período de oscilação de  a integral tende a zero. Então só haverá resultado diferentes de zero nas vizinhanças dos pontos em que , ou seja nos quais a fase é estacionária. [Note que coincidem com os pontos de máximo ou mínimo da fase].

Nas vizinhanças desses pontos temos:



Só consideramos o valor da função  em fora da qual a integral se anula. Agora falta a integral:





A única restrição aqui para cair na integral da Gaussiana é que .

Então, temos que:



Se existir apenas um ponto de fase estacionária  então



Esse é em esência o método da fase estacionária para integrais univariadas. O método deve ser ligeiramente modificado se a função for de mais de uma variável.

**Método da fase estacionária na probabilidade:**

Harald Cramér (1893 – 1985), figura xxx, foi um matemático sueco considerado um dos gigantes da teoria da probabilidade. Seu trabalho para um seguradora o levou a se perguntar sobre o comportamento das caudas das distribuições para além do teorema central do limite, no qual utilizou essencialmente o método da fase estacionária ou seus congêneres.



Figura xxx. Fotografia de Harald Cramér <http://www.insurancehalloffame.org/laureateprofile.php?laureate=72>

Vamos aplicar o método da fase estacionária para o caso da probabilidade de  cópias [iid] da v.a. . Sabemos que  e que a fdp da v.a.  é dada por:





Ou seja, queremos:

 com .

Chamando , a função geradora dos cumulantes, e aplicando o método da fase estacionária nesse caso, temos:







 ou seja precisamos da raiz da equação: . Note que essa raiz da equação define  como uma função de .

**Operacionalidade do Método da Fase Estacionária:**

1. 
2. Resolver a equação para  e com esse valor calcular:
3.  e .
4. Finalmente utilizá-los em .

**Função de Crámer:** O que Crámer fez foi estabelecer que  com , , sendo a função de Crámer. Para reobter a forma de Crámer devemos escrever:

 como 

A função de Crámer será dada por:

.

**Caso em que  é real:**

Se  for simétrica então  será real e simétrica, ou seja, teremos uma . Vamos começar da integral:



E agora  não temos mais que nos preocupar com o módulo.



Agora aplicamos o método da fase estacionária da mesma forma que anteriormente.



**Método de Laplace utilizando a função geradora dos momentos em lugar da função característica.**

Se a função geradora dos momentos existe então sabemos que . Entretanto, uma das grandes vantagens da função característica é que sabemos a transformada inversa  então  mas não sabemos ainda como, dado  encontrar . Em outras palavras precisamos da transformada de Laplace inversa. Para tanto é melhor partir da função característica com inversa bem conhecida:



Agora mudamos a variável para  então  . O cálculo de resíduos afirma que a integral será a mesma para qualquer  então podemos escolher  que torna  máximo, ou seja: , ou . Nesse ponto expandimos  e teremos:







Finalmente  onde  é a solução de .

Resumo do método de Laplace:

Encontrar  onde ,  e .

**Vamos apresenta vários exemplos com solução analítica para mostrar como o método funciona.**

1. **Distribuição Normal com** .

 e  então  e . Temos que resolver a equação, ou seja,  de onde . Nesse caso então 







Um resultado que já sabíamos à priori.

Note que o método passou por uma raiz complexa. Sempre que a distribuição for simétrica então  será real e a raiz da equação  será complexa.

1. **Bernoulli - Binomial:**

Nesse caso  só pode ser 0 ou 1 e o  após jogar a moeda  vezes está no intervalo , que pode ser também expresso como . A função geradora dos cumulantes da distribuição de Bernoulli é dada por:

.

Portanto:



e ,

que pode ser desenvolvido como:



para gerar o resultado final .

No caso de Bernoulli, portanto, temos:

, e .

Primeira etapa é achar a raiz de . A equação em t é dada por , ou , com as soluções que necessitaremos dadas por  e .

Neste caso , ou seja, . O termo , cujo resultado final é:

.

Para encontrar , substituimos  e vemos que , ou seja:



A fdp da variável , será dada portanto por:



Com 

Vamos analisar o comportamento da função :





Como a derivada segunda é sempre positiva a função só pode ter ponto de mínimo, o qual se localiza em:



Nesse ponto , logo  sempre. Além disso nesse ponto de mínimo temos que . Expandindo o expoente em série de Taylor nesse ponto temos que . Por outro lado, nesse ponto  logo a fdp nessa região será dada por , ou seja, a distribuição NORMAL:



Entretanto a função:



Se aplica a todos os pontos  e não apenas nas vizinhanças do pico onde vale a distribuição normal.

Exercício: usar as duas funções e  com  no Excel e comparar os resultados, principalmente nas caudas. Sugestão, usar a escala LOG no eixo y para realçar as diferenças das duas nas caudas.

1. **Distribuição Gama:**

A função característica da distribuição Gama centrada em zero é dada por. Portanto ,  e . A equação a ser resolvida é  de onde se extrai  e .



e, por outro lado, . Daí temos o resultado final de  é dado por:



A função  tem derivada primeira  e derivada segunda , logo, novamente, só tem ponto de mínimo em  no qual  vale , significando então que  sempre. Nesse ponto  e a função  e  é a normal com  e . Fora dessa aproximação a expressão geral do método da fase estacionária é:



Essa ditribuição tem um pico forte nas proximidades da Gaussiana mas as caudas basicamente caem com . Entretanto sabemos que a distribuição Gama  possui propriedade da aditividade, logo  segue a distribuição:



A aproximação de Stirling para a função fatorial para muito grande é  que pode ser extraída da comparação com a integral pois:

.

Isso significa que . Entretanto, uma análise mais precisa mostra que: . Neste caso podemos substituir na expressão para a distribuição obtendo:

,  

Ou seja:



que é o mesmo resultado obtido com o método da fase estacionária. Notamos então que o método da fase estacionária foi muito além da aproximação do teorema central do limite, dando conta do comportamento também nas caudas da distribuição.

**Distribuição de Student.**

Para entender melhor o comportamento das caudas e da adição de muitas v.a.s vamos tomar uma distribuição simétrica que segue uma lei de potência nas caudas do tipo:



Note que para  então  e precisamos que  para que . Note que no outro limite, para  a fdp tende a uma constante. Logo trata-se de uma distribuição que segue uma lei de potência nas caudas mas é finita em . Deixamos a constante  para normalizar a distribuição , ou melhor, obrigando que . Nesse caso temos que:

.

Agora, uma consulta nas propriedades das funções de Bessel modificadas de segundo tipo mostra que:



Portanto:



A função característica será dada por:



Falta a constante  a ser extraída de . Um exame das propriedades das funções de Bessel mostra que para  a função de Bessel se comporta da forma  com a restrição de que . Assim



Assim encontramos a constante  e as funções característica e fdp:





Vale notar que a  tem a dimensão correta de . Vamos chamar  e re-escrever o resultado como:





Esses resultados podem ser utilizados no Excel se o valor de for inteiro e par, pois o Excel só permite calcular a função K de Bessel de ordem inteira. No Mathematica podemos usar qualquer valor de . Valores semi-inteiros possuem expressões fechadas. Para calcular os momentos de ordem temos que:

, ou seja, , em que a integral só converge para .

Para fazer a integral mudamos a variável para  então  e 



Mas sabemos da distribuição Beta que . Então podemos colocar a integral acima na forma correta fazendo:





Chegando, finalmente, a: 

**Teste do comportamento assimptótico.** Suponha que não conhecessemos a fdp mas apenas a sua função característica. Sabemos que o comportamento assimptótico da fdp vai com . Vamos testar para ver se recuperamos esse resultado.







Agora mudamos a variável para , logo  e  então:





Se  é real a função modificada de Bessel é real e dada por:

 então 

A fdp agora é dada por:



A qual simplifica para:



Note que a função exponencial morre após  e que se  ou seja, para  estamos na região em que o argumento da função de Bessel tende a zero. A expansão em série das funções de Bessel, , e de Neumann, , são dadas por:

 e 

Note que  precisamos ficar com a potência mais baixa de todas, nesse caso:

 e .

Então para  teremos 





Agora vamos usar as propriedades de recorrência  e a fórmula de duplicação de Legendre  para reescrever:





Basta comparar então com a função original para 



E temos o mesmo resultado. Então estamos controlando o comportamento assimptótico.

Agora podemos enfrentar o problema da forma assimptótica para qualquer valor de :











Agora mudamos a variável para , logo  e  então:









Agora vamos usar o comportamento das funções de Bessel para argumentos muito pequenos, como é o caso de :

 e .

Note que para  as funções de Neumann serão muito maiores do que as de Bessel . Entretanto precisamos manter as duas porque um dos termos é real e o outro imaginário e precisaremos extrair apenas a parte real no final dos cálculos. Assim podemos desprezar todas as potências mais altas de cada uma delas, mas manter as duas.









De novo usando , obtemos:

 com .

Note que fazendo  recuperamos o resultado anterior. O comportamento da cauda não muda, continua com a mesma lei de potência simplesmente multiplicada por n, mesmo somando muitas cópias da v.a.s.

**Função característica para ímpar**. Se é inteiro e par a função característica é dada pela função de Bessel modificada de ordem inteira. Mas se é ímpar a ordem será semi-inteira. No entanto nesses casos podemos fazer a integral por resíduos.





Já sabemos que a função característica será simétrica, então basta calcular para  positivos e depois substituir  por . Com dois polos de ordem  em  e  e  fechamos o círculo por cima e pegamos o resíduo em .

Para . Como é um polo de ordem  o resíduo é dado por:



Agora:





Logo



E 

E 



Para  o único termo que sobra é para  e 









Casos particulares:

 então 

 então 

 então 

**Método da fase estacionária com distribuição de Student:**



**Vamos re-escrever **

**Então** 









Vamos começar com  e para acertar o passo no método da fase estacionária. Nesse caso:







1. Resolver a equação :

, logo 

Checando a parte real de t:



Nesse caso a parte real deu negativo em contradição. Vamos tentar com t negativo com  e . Nesse caso:







1. Resolver a equação :

, logo 

Checando a parte real de t:



Nesse caso a parte real deu negativo em contradição.

e:



















Vamos ao método da fase estacionária:



Aplicando o método da fase estacionária  com 







E queremos a solução de



Temos então que resolver a equação



Agora vamos fazer  com e usar o fato de que  então 

Logo: 

A equação fica:



Apesar de parecer que poderíamos jogar fora o termo com J precisaremos dele por conta das partes real e imaginária.

 e 

Então 







Então









Agora vamos usar a fórmula de duplicação de Legendre  para reescrever:







