**Leis de uma Álgebra:**

Uma lei interna associa dois elementos  e  de um conjunto à um terceiro elemento . Por exemplo:  onde a lei interna é a adição , ou , onde a lei interna é a multiplicação . Na nossa notação se afirma que  ou .

A lei será associativa se:  e será comutativa se . O elemento será REGULAR se  e . O elemento será unitário sobre a lei  se . O elemento  possui elemento inverso sobre a lei  se .

Teorema: se uma lei  possui elemento unitário, é associativa e  possui inversa, então a inversa é única e é regular.

Provar por absurdo: supor que inversos de . Nesse caso:

 e  além disso . Agora, como é associativo então  o que implica que  em contradição com . Logo a inversa é única. Falta a regularidade:

Seja  e . Queremos mostrar que se  então . Aplicando a inversa de  de ambos os lados temos que  e usando a associatividade  logo  e, finalmente  C.Q.D.

Álgebra com duas Leis. Vamos chamar a lei  de lei 1 e uma outra lei 2 de . A lei  será distributiva frente à lei  se  ou  para . Exemplo: mostrar que a multiplicação é distributiva frente à adição mas o inverso não é verdade.  logo a mulitplicação é distributiva. Entretanto .

GRUPO. Um conjunto G é um grupo se uma lei interna  com as seguintes propriedades:

1. é associativa
2.  admite elemento unitário 
3. admite inversa 

Se, além da propriedade associativa,  for comutativa, o grupo é chamado de Abeliano.

CAMPOS. Seja um grupo Abeliano de  com uma segunda lei  associativa e distributiva frente à . Seja  o elemento unitário de e  o conjunto de todos os elementos de exceto . Se é uma lei de grupo para  então é um campo.

Exemplo: vamos considerar as leis  e  para o conjunto dos números reais.

Primeira lei :

 associativa

 comutativa

 então  é o elemento unitário da adição.

Inversa  e é a inversa de . Note que se o conjunto fosse o dos naturais não haveria inversa pois ele não inclui números negativos. Então  e . Agora vamos analisar o comportamento da multiplicação frente ao .

 associativa

 comutativa

 distributiva frente à adição

 então  é o elemento unitário da multiplicação. Logo a inversa será dada por , ou seja, . Note que sem a exclusão do zero teríamos problema com a inversa do elemento unitário da adição pois . Então é um CAMPO frente à adição e multiplicação. Note a necessidade de ampliar os conjuntos para a obtenção de grupos e campos. Partindo dos naturais  e da operação  foi necessário incluir os números negativos para a existência da inversa, chegando ao conjunto . Já para a operação multiplicação foi-se obrigado a inlcuir o conjunto dos racionais para admitir inversas . Além disso, para admitir operações como  com  e  percebe-se a necessidade de inclusão dos irracionais e dos imaginários, caso .

**Teoria dos Conjuntos.**

Um conjunto é uma coleção de elementos distinguíveis, i.e., cada elemento só aparece uma vez no conjunto. É preciso ficar bem claro que elementos pertencem ou não pertencem ao conjunto[[1]](#footnote-1). Geralmente isso é feito através de propriedades partilhadas por todos os elementos do conjunto. Exemplo:

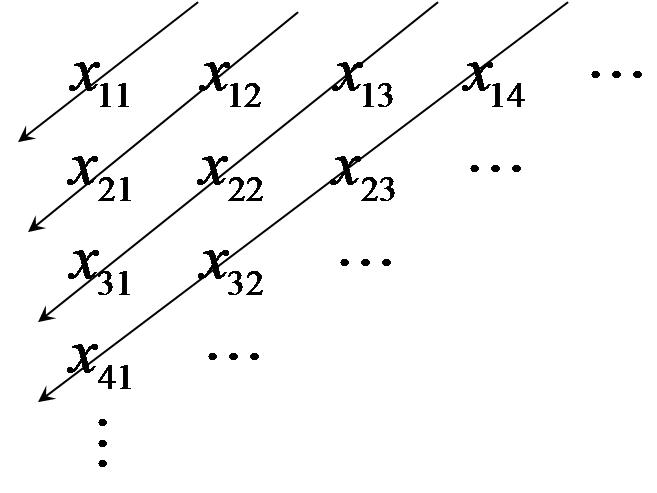
Seja A o conjunto de todos os elementos que possuem a propriedade P, então a sentença

 x possui a propriedade P.

 x é inteiro positivo ou zero.

O conjunto vazio  não possui qualquer elemento. Um conjunto finito tem um número finito de elementos, e um conjunto infinito possui um número infinito de elementos. Dois conjuntos A e B possuem a mesma potênica se for possível estabelecer uma relação biunívoca entre seus elementos, ou seja, a cada elemento de A pode-se associar um, e só um, elemento de B. O conjunto pode ser enumerável [countable] ou não enumerável. Se for enumerável o conjunto tem uma associação biunívoca com o conjnto dos núemros naturais. Um conjunto infinito pode ser enumerável, como o dos números naturais. Todo conjunto finito é enumerável pois podemos ordenar seus elementos e associá-los a 1, 2, 3, etc.

Os elementos de um conjunto de conjuntos enumeráveis formam um conjunto enumerável. Pense em uma matriz



Podemos enumerá-los pela seqüência triangular, e dentro da diagonal pelo primeiro índice, como mostra a tabela xx abaixo:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **x11** | **x12** | **x21** | **x13** | **x22** | **x31** | **x14** | **x23** | **x32** | **x41** |
| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |

Assim fizemos a correspondência com . Conseqüência dessa fato é que o conjunto dos núemeros racionais é enumerável, pois  contém dois índices, o n e o m, logo pode ser enumerado usando a mesma regra acima.

Entretanto, o conjunto de todos os números em um intervalo não é enumerável. Basta trabalhar com o intervalo . A pergunta é: o conjunto de todos os números no intervalo  é enumerável? Vamos provar que não por absurdo.

Suponha que seja. Então temos  e podemos ordená-los em ordem crescente:

 uma vez que dois números não podem ser iguais. Neste caso  é tal que  e  não pertence ao conjunto dado. Logo o conjunto não incluiu todos os números entre 0 e 1. Note então que existem  números racionais entre 0 e 1 e que também existem  números irracionais entre 0 e 1. Só que o conjunto dos irracionais não é enumerável, e dos racionais é enumerável, ou seja, .

Álgebra dos conjuntos.

São duas as operações principais entre conjuntos: a UNIÃO e a INTERSEÇÃO.

**Operação UNIÃO:**

Seja A o conjunto dos elementos com a propriedade PA e B o conjunto dos elementos com a propriedade PB. Se então  ou . Ou seja, x ou tem a propriedade PA  ou tem a propriedade PB. Note que a operação lógica da união é OU. Vamos usar a notação 0 para falso e 1 para verdadeiro. A tabela da verdade para essa operação é dada por:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **PA** | **PB** |  |
| **1** | **1** | **1** |
| **1** | **0** | **1** |
| **0** | **1** | **1** |
| **0** | **0** | **0** |

Ou seja se x possui PA e PB então ; se x possui PA mas não PB então ; se x não possui PA mas possui PB então  e, finalmente, se x nem possui PA nem possui PB então . Em linguagem de conjuntos estamos afirmando que:



Na nossa álgebra de lógica em que só existem 0 e 1, falsa ou verdadeira, então , ,  e . Por isso é comum associar o sinal de + à operação lógica OU.

Ou seja  quando A e B são conjuntos.

Propriedades da operação união[[2]](#footnote-2).

Associativa: 

Comutativa: 

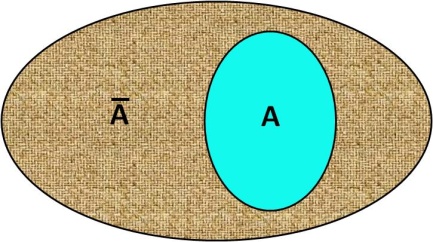
Elemento unitário: 

Observação: apesar da operação união possuir o elemento unitário  ela não admite inversa pois  se  ou .

**CONJUNTO UNIVERSO**

O conjunto universo é definido como o conjunto contendo todos os elementos possíveis, com todas as propriedades existentes em dado contexto e denominado por S. Note que  sempre e que .

**CONJUNTO COMPLEMENTAR .**

****

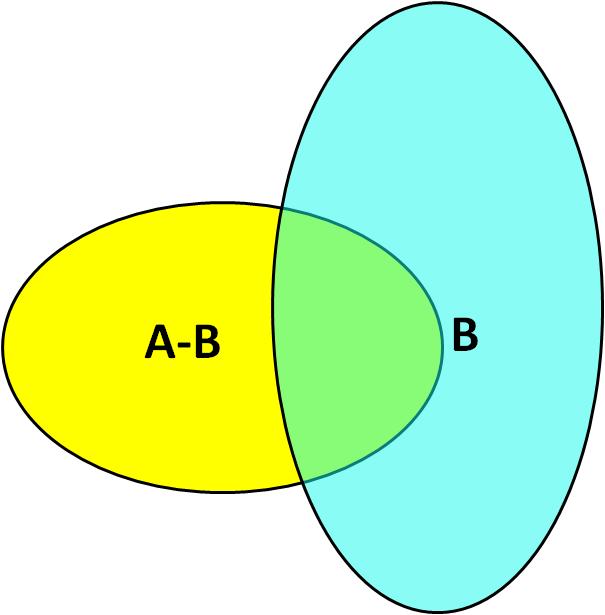
Se  então  e .

Propriedades:

; ; ; se  então  e se  então .

**Operação DIFERENÇA **

Se  então  e  OU  e . Se  então  e .



**Operação INTERSEÇÃO:**

Dizemos que  se  E . A operação lógica nesse caso é E (AND). Ou seja, agora temos que:



A tabela da verdade para essa operação é dada por:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **PA** | **PB** |  |
| **1** | **1** | **1** |
| **1** | **0** | **0** |
| **0** | **1** | **0** |
| **0** | **0** | **0** |

Como , ,  e , usamos também a notação de multiplicação na forma .

Propriedades da operação união.

Associativa: 

Comutativa: 

Distributiva frente à união: 

Se  então ; ; ;  e.

Conjuntos disjuntos: se  dizemos que A e B são disjuntos, ou mutuamente exclusivos. Se pertence a A não pertence a B e se pertence a B não pertence a A.

PARTIÇÃO. Uma partição de um conjunto A é uma coleção de subconjuntos Ai tais que: , ou seja, , entretanto .

Algumas partições clássicas:

1.  e 
2.  e 
3.  e 
4.  e 

**Leis de De Morgan:**

São leis super importantes na teoria dos conjuntos e muito úteis para demonstração de teoremas. Podem ser apresentadas em duas formas equivalentes:

Forma 1: 

Forma 2: 

A estratégia para demonstrá-la e usar o fato de que se  e  então .

Forma 1: Se 

Com isso demonstramos que se  então  o que significa que . Entretanto, como todas as setas são bidirecionais também concluímos que se  então  logo , significando que .

Forma 2: Se . Com isso mostramos que se  então  logo que significa que . Com a bidirecionalidade das setas concluímos que se  então  logo , e .

Parecem duas leis mas na realidade é uma só. Dado uma a outra será verdadeira e vice-versa. Passando de uma forma à outra:

Na forma 2 fazer  e  logo  agora tirar o complementar de ambos os lados  a forma 1. Na forma 1 fazer  e  logo  tirar o complementar de tudo novamente .

Exemplo de utilização das leis de De Morgan:



1. Teorema: se em uma identidade de conjuntos substituirmos todos os conjuntos por seus complementos, todas uniões por interseções e vice-versa, a identidade é preservada.

Exemplo:  usando o teorema deve ser verdadeira. Provando:

 pela segunda lei, e  pela primeira lei. Por outro lado  logo  C.Q.D.

Princípio da DUALIDADE:

Se em uma identidade de conjuntos substituirmos todas as uniões por interseções e vice-versa, os conjuntos vazios por S e vice-versa, a identidade é preservada.

Exemplo 1:  usando a dualidade 

**CAMPOS [Também chamados de álgebras booleanas ou simplesmente álgebra]**

Vamos chamar um conjunto de conjuntos de CLASSE. Uma classe de conjuntos será um campo  [FIELD] se:

1.  é não vazio
2. Se  então 
3. Se  e  então 

Desses axiomas de campo podemos extrair os seguintes teoremas:

Sejam ,  e  é um campo, então: ,  e .

Pelos axiomas 2 e 3 , ,  e . Agora usando De Morgan  e  logo se  então  logo . Se  e  então . Também .

Dessa forma se  é uma álgebra então , ,  e se . Note que o campo foi definido acima apenas para um conjunto finito.

**Campos de Borel [-álgebra].**

Borel estendeu a definição d campo para conjunto infinito enumerável:

1.  é não vazio
2. Se  então 
3. Se  ,  com infinito mas enumerável, então 

Uma -álgebra, portanto, é um conjunto de conjuntos fechado sobre um número contável de operações união, interseção e complementos.

**Probabilidade.**

Vocabulário:

Experimento. Na estatística designa uma atividade para a qual não se pode especificar antecipadamente o resultado final. Jogar um dado, por exemplo, é um experimento. Jogar um dado duas vezes seguidas é um experimento. Se é possível especificar o resultado antecipadamente se diz que estamos no campo determinístico. Experimento nas ciências exatas possui outra conotação – é uma experiência determinística utilizada para comprovar ou falsificar uma teoria ou modelo.

TRIAL (ensaio, tentativa). Cada performance isolada de um experimento é um trial.

Resultado (outcome). É o resultado do experimento. Exemplo, joguei o dado e obtive 5 – 5 é o resultado. Cada trial dá origem a um resultado. Jogar dois dados, por exemplo, pode dar o resultado (2,3).

Espaço amostral S ou . O conjunto de todos os resultados do experimento é o espaço amostral. Esse conjunto pode conter mais resultados do que os possíveis, mas não pode deixar de conter todos os possíveis. No caso de um dado . Agora suponha o conjunto da quantidade de gordura no leite, x. Sabemos que  embora se saiba que  é praticamente impossível. Logo  também é um espaço amostral. Todo resultado, portanto, é um elemento do espaço amostral. O espaço amostral pode ser finito, infinito, enumeráel ou não enumerável.

Evento. Evento é um sub-conjunto do espaço amostral. São coleções de resultados de um experimento.

**Teoria da Medida de Conjuntos.**

Lebesgue e Borel definiram e estudaram uma grandeza que pode ser definida como a medida de um conjunto finito ou infinito enumerável. No apêndice xxx apresentamos uma breve introdução à teoria da medida. Eles mostraram que se a partição infinita  for composta de conjuntos mensuráveis então ,  e   também são mensuráveis. Note então que o conjunto desses conjuntos é um campo de Borel. A probabilidade é uma medida de conjuntos só pode, portanto, ser aplicada à conjuntos mensuráveis. Isso significa que o espaço dos eventos tem que ser um sub-conjunto de  contendo apenas conjuntos mensuráveis, que correspondem a um campo de Borel ou a uma -álgebra. Nem todos os sub-conjuntos de  são mensuráveis. Se  é um conjunto finito todos os seus sub-conjuntos serão mensuráveis e não há qualquer problema. Se for infinito, entretanto, é necessário restringir os sub-conjuntos possíveis.

Exemplo: é razoável admitir que a probabilidade de um dardo atingir um sub-conjunto do alvo seja proporcional à área do sub-conjunto. Entretanto existem sub-conjunto sem área, não mensuráveis, como ponto, pontos, retas, etc. Ou seja podem ter largura mas não possuem altura e vice-versa. Logo esses sub-conjuntos não são eventos e não fazem parte do campo de Borel .

Por isso a probabilidade é definida no espaço , para definir  precisamos saber quem o conjunto espaço amostral , e o campo de Borel , o conjunto de conjuntos mensuráveis. Assim a união, interseção e conjunto complementar de qualquer evento também serão eventos e possuem probabilidades associados à eles.

Exemplo1. Jogar dois dados. Espaço amostral é dado pelos pontos vermelhos da figura xxx.

Evento 1: obter 6 no dado 1 e 5 no dado 2. 

Evento 2: obter 4 para a soma dos dois dados. 

**FUNÇÃO**. Uma função é uma regra de associação entre elementos de um conjunto chamado domínio com elementos de outro conjunto chamado contra-domínio. Para ser função a regra deve ser clara, sem dar origem a impasses, deve se saber exatamente a que elemento associar e o que fazer com todos os elementos do domínio. Não pode portanto, associar um elemento do domínio a mais de um elemento do contra-domínio pois haveria dúvida sobre qual regra seguir. Além disso, todos os elementos do domínio devem poder ser associados para evitar não saber o que fazer com um elemento que não se pode associar.

Estamos acostumados à funções de um conjunto de números em outro conjunto de números, mas podemos perfeitamente associar um conjunto a uma número, ou conjuntos a conjuntos. Um exemplo de uma função de conjunto que associa elementos de um conjunto a um número é o indicador do conjunto:



Probabilidade é uma função de conjunto, que deve associar um número real à todo evento A do espaço amostral.

**Definições de probabilidade.**

Subjetiva: uma pessoa julga qual a probabilidade de ocorrência dos eventos.

Freqüência relativa. Executa um experimento N vezes e conta quantas vezes o evento A ocorreu e assim associa à probabilidade . A dificuldade dessa definição é que seria preciso repetir o experimento inifinitas vezes. Também só seria útil se for possível provar que  estabiliza para certo valor à medida que N cresce, ou seja, que  converge.

Clássica. Seja um espaço amostral finito com N resultados igualmente PROVÁVEIS e A um evento com NA elementos, então . A maior dificuldade com essa definição [é que ela usou o conceito de probabilidade para definir probabilidade [igualmente prováveis]. Ou seja, é uma definição circular. Também, da forma como foi definida, seria impossível analisar o comportamento de um dado desonesto. Finalmente restringe o estudo a espaços amostrais finitos.

Dadas todas as dificuldades apontadas acima finalmente chegou-se a conclusão que a probabilidade deveria ser definida através de axiomas.

**Definição Axiomática.**

São apenas três os axiomas para uma função de conjuntos , com , que pode representar uma probabilidade:

1. 
2. , é chamado de evento certo.
3. Se  então 

Tudo o que pode ser demonstrado através dos axiomas é teorema e não deve ser colocado na mesma categoria de axioma. Com esses 3 axiomas podemos mostrar vários teoremas:

1. .

Prova:  mas , logo  e .

1. 

Prova:  e  logo pelo axioma 3 mas , logo  . Por outro lado  pelo axioma 2. Então  e .

Corolário: Se ,  e  então  e , pois  e . Repetindo o argumento temos também que . Como  e  e  pelo axioma 1 então  e .

1. 

Prova:  logo . Fazendo a união com A temos  entretanto  logo  e . Note que  e  representam duas partições pois  e . Aplicando axioma 3 nas duas partições temos:  e . Extraindo  da primeira partição e substituindo na segunda temos:



Esse teorema implica em que a probabilidade é sub-aditiva, ou seja, a união dos conjuntos leva a uma probabilidade menor do que a da soma das probabilidades.

1. Se então . Prova  logo  . Mas como  então , então  e como  então.

Note que o mesmo tipo de lógica pode ser usada para extrair propriedades dos Indicadores.

1. pois 
2. sai diretamente da tabela da verdade da operação interseção
3.  logo 
4. Se  então . Se  e  então ou  ou . No primeiro caso, que implica  enquanto no segundo caso  que também implica em . Se  então  e . O importante a notar aqui é que não há a possibilidade de somar 1 + 1 = 2 por conta da exclusão mútua de A e B.
5. Também vale . A prova é idêntica à da probabilidade usando as identidades de conjuntos:  e .

**Eventos independentes:**

Os eventos  e  são independentes se .

Daí podemos mostrar como teoremas que se  e  são independentes então ( e ), ( e ) e ( e ) também são independentes entre si. Isso significa que os eventos complementares também são independentes.

Prova: Usando  e , percebemos que , logo . Como  e  são independentes, então , provando que  e  são independentes. Chamando  de  e vice-versa temos que  e  são independentes. Se  e  são independentes então mudando  para  temos que  e  são independentes.

**Probabilidade Condicional.**

Pergunta: qual a probabilidade do evento  sabendo que o evento  ocorreu? Denotamos essa probabilidade por , [leia-se: p de A dado B]. Se  ocorreu então  e podemos restringir o espaço amostral para . Agora basta mostrar que  obedece aos axiomas da probabilidade.

1. 
2.  pois  e 
3. Se  então:



Teorema da propabilidade total:

Seja  uma partição de  e  um evento arbitrário. Então:



Prova:  e , logo  é uma partição de . Nesse caso:



Agora basta substituir  para provar o teorema.



**Teorema de Bayes.**

 logo:



Thomas Bayes [1701 – 1761] estabeleceu o teorema de Bayes em uma obra póstuma Bayes ***“An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances”*** [1763] editada pelo seu amigo Richard Price, da tabela Price.



A inferência de Bayes está sendo hoje, cada vez mais, considerada mais robusta do que a inferência frequentista de Fisher.

Suppose someone told you they had a nice conversation with someone on the train. Not knowing anything else about this conversation, the probability that they were speaking to a woman is 50%. Now suppose they also told you that this person had long hair. It is now more likely they were speaking to a woman, since women are more likely to have long hair than men. Bayes' theorem can be used to calculate the probability that the person is a woman.

To see how this is done, let W represent the event that the conversation was held with a woman, and L denote the event that the conversation was held with a long-haired person. It can be assumed that women constitute half the population for this example. So, not knowing anything else, the probability that W occurs is P(W) = 0.5.

Suppose it is also known that 75% of women have long hair, which we denote as P(L|W) = 0.75 (read: the probability of event L given event W is 0.75). Likewise, suppose it is known that 25% of men have long hair, or P(L|M) = 0.25, where M is the complementary event of W, i.e., the event that the conversation was held with a man (assuming that every human is either a man or a woman).

Our goal is to calculate the probability that the conversation was held with a woman, given the fact that the person had long hair, or, in our notation, P(W|L). Using the formula for Bayes' theorem, we have:

P(W|L) = \frac{P(L|W) P(W)}{P(L)} = \frac{P(L|W) P(W)}{P(L|W) P(W) + P(L|M) P(M)}

where we have used the law of total probability. The numeric answer can be obtained by substituting the above values into this formula. This yields

P(W|L) = \frac{0.75\cdot0.50}{0.75\cdot0.50 + 0.25\cdot0.50} = 0.75,

i.e., the probability that the conversation was held with a woman, given that the person had long hair, is 75%. You will notice this example presents an ambiguous answer, where P(W|L) = P(L|W). More telling examples are provided below.

Another way to do this calculation is as follows. Initially, it is equally likely that the conversation is held with a woman as to a man. The prior odds on a woman versus a man are 1:1. The respective chances that a man and a woman have long hair are 75% and 25%. It is three times more likely that a woman has long hair than that a man has long hair. We say that the likelihood ratio or Bayes factor is 3:1. Bayes' theorem in odds form, also known as Bayes' rule, tells us that the posterior odds that the person was a woman is also 3:1 ( the prior odds, 1:1, times the likelihood ratio, 3:1). In a formula:

\frac{P(W|L)}{P(M|L)} = \frac{P(W)}{P(M)} \cdot \frac{P(L|W)}{P(L|M)}.

**In statistics, Bayesian inference is a method of inference in which Bayes' rule is used to update the probability estimate for a hypothesis as additional evidence is learned. Bayesian updating is an important technique throughout statistics, and especially in mathematical statistics. For some cases, exhibiting a Bayesian derivation for a statistical method automatically ensures that the method works as well as any competing method. Bayesian updating is especially important in the dynamic analysis of a sequence of data. Bayesian inference has found application in a range of fields including science, engineering, philosophy, medicine, and law.**

**Apêndice: Teoria da Medida e a integração:**

Para achar a integral  com b > a quebramos o intervalo a, b em n partes da forma: . Vamos chamar mínimo de no intervalo  e máximo de de no intervalo . [[3]](#footnote-3) Também chamamos  e . Se então a função é integrável segundo Riemann e .

Considere agora função . Se  for inteiro  e como 2n é par . Se  não for inteiro  e como está elevado a um número muito grande . Se x é racional, , então  será inteiro pois com m tendendo a infinito sempre haverá um j no m! Para cancelar com o j do denominador. Já se x for irracional  não será inteiro. Acabamos de criar uma função com a seguinte propriedade:



Qualquer que seja o intervalo  ele contém números racionais e irracionais – logo e . Mas neste caso  e  e a função não é integrável segundo Riemann.

Nesse ponto Lebesgue e Borel entraram. Precisa definir outra grandeza que substitua o intervalo de um segmento  por outra que chamaremos de medida do conjunto. Note que da definição da função indicador se  então  corresponde ao intervalo . Vamos definir  para os conjuntos de pontos , ,  ou . O caso particular .

Conjunto de pontos nulo.

Um conjunto  terá medida nula se  em que  é arbitrariamente pequeno para qualquer j, ou, em outras palavras, . Daí podemos afirmar que um conjunto de pontos enumerável é um conjunto de medida nula. Seja . Vamos “cobrir” o conjunto A da seguinte forma:

 logo  e 

 logo  e 



 logo  e 

Dessa forma mas . Para então  e o conjunto tem medida nula. A medida do conjunto dos números racionais é nula. A intuição aqui é que área é altura multiplicada pela largura. Um ponto tem altura mas não tem largura, logo sua área será nula. Um conjunto enumerável só tem pontos sem largura, logo a área será nula.

Conjuntos abertos e fechados. Um ponto P é interior a um conjunto de pontos se uma vizinhança de P na qual todo ponto pertence a . Um conjunto é aberto se todo ponto de E é um ponto interior. O conjunto será fechado se é aberto. A questão é sempre saber se a fronteira do conjunto pertence ou não ao conjunto. Se não pertence o conjunto é aberto e se pertence é fechado. Podem existir conjuntos que nem são abertos nem fechados.

Os axiomas para a medida de conjuntos abertos são quase os mesmos da probabilidade com excessão do axioma 1 que limitaria a medida à 1. Usamos a notação  para a medida do conjunto E.

1. 
2. Se  então 

Sem o axioma  ainda valem os teoremas:

1. 
2. 
3. Se então .

Prova:  e , então , como então .

**Medida de um conjunto fechado.**

Essa medida será definida por  com . Note que se F é fechado e E aberto então é aberto e todas as medidas do lado direito estão definidas. Essa definição, entretanto, só pode ser útil se for possível demonstrar que qualquer conjunto E aberto escolhido que obedeça à restrição  gera o mesmo valor de .

Para mostrar isso vamos tomar dois conjuntos abertos  e  com as propriedades ,  e . Agora , pois o  uma vez que  e . Então . Mas  logo:



Trocando  por  temos:



Subtraindo uma da outra:



Logo o valor da medida independe da escolha do conjunto aberto. Aceitando essa definição então podemos mostrar alguns teoremas envolvendo conjuntos abertos e fechados. Seja um conjunto aberto não nulo, então

1. Se  então 
2. Se então 

Prova. Para (a)  como  então . Para (b) se F é fechado e E aberto então é fechado. Vamos tomar então  e  por definição. Mas  e  pois . Então  logo  como  então  e . Daí se conclui que então .

Percebe-se então que a medida de um conjunto aberto é um limite superior para as medidas dos conjuntos fechados contidos no mesmo e que a medida de um conjunto fechado é um limite inferior para as medidas dos conjunto abertos que o contém.

Definição de medidas externa e interna de um conjunto qualquer. [pode ser nem aberto nem fechado].

Medida externa m\* (outer measure): é o limite inferior para as medidas dos conjuntos abertos que contém A, ou seja, . Então, para achar a medida de A é necessário encontrar o conjunto aberto E de menor medida que contém A.

Medida interna (inner measure): é o limite superior para as medidas dos conjuntos fechados contidos em A, ou seja, . Trata-se então de encontrar o conjunto fechado F de maior medida contido em A. Claro que 

**Definição de medida de um conjunto:**

Se  dizemos que A é MENSURÁVEL e que .

Agora precisamos de uma forma mais prática para definir que conjuntos são mensuráveis e estabelecer propriedades dos conjuntos mensuráveis e das operações entre si.

O desenvolvimento à partir desse ponto é mostrar que se  e são mensuráveis então , ,  e  são mensuráveis. Ou seja, o conjuntos dos conjuntos mensuráveis forma um campo de Borel, ou uma -álgebra.

Vamos começar com a propriedade da sub-aditividade



Melhor ainda, podemos provar uma afirmação mais forte:



Considere  e , então sempre é possível encontrar  e  abertos para os quais:





Para qualquer valor de . Como  e  então:



Fazendo  temos que



Com raciocínio complementar podemos mostrar que:



Considere  e , então sempre é possível encontrar  e  para os quais:

 logo 

 logo 



Para  temos







Seja  um conjunto mensurável e  seu complemento frente a um conjunto aberto , então  e .Mas  é aberto, logo mensurável, então  e .

Teorema 2. Se  e  são disjuntos, o que significa que, então:



Vamos partir de:



E fazer  e  e 

Nesse caso

 pois .



Substituindo na desigualdade da medida interna:



Agora vamos fazer  e , logo  e usar as leis de de Morgan para mostrar que:



Considere  um conjunto contendo todos esses conjuntos, então temos:







Logo





Com esse resultado podemos provar o seguinte teorema importante:

Se  é mensurável, então para  com  finita vale a relação:



Vamos partir de .

1. Fazer  e  logo  e  então 

Para mostrar a igualdade basta então provar que se é mensurável então .

1. Fazer  e . Note que , então. Por outro lado  então logo então . Mas se é mensurável então  e  que nos leva ao resultado .

Caratheodory usou essa proprieadade como a propriedade que define um conjunto mensurável, ou seja, ele afirmou que o conjunto  é mensurável se  para  com  finita.

Se  e  são mensuráveis então  e  são mensuráveis. Para isso usamos as duas desigualdades:





Pois  e . Mas isso implica em:



Ou seja:  que só não entra em contradição com  e  no caso em que  e . Ou seja, ambos  e  são mensuráveis. Além disso podemos afirmar mais, que .

Se, além disso, e  são disjuntos então 

Seja  um conjunto mensurável e  seu complemento frente a um conjunto aberto , então  e  então  e , ou seja,  e . Mas  é aberto, logo mensurável, então

 e 





Porém, como  e  as desigualdades só são válidas se  ou 

1. Se a fronteira entre o que pertence e o que não pertence ao conjunto é NEBULOSA, não claramente definida, aceita uma gradação, o con junto é nebuloso, ou FUZZY. Existe toda uma lógica, chamada FUZZY LOGIC, para lidar com esses caso hoje. [↑](#footnote-ref-1)
2. Vamos evitar a letra C para conjuntos por que é a letra usada para estar contido. [↑](#footnote-ref-2)
3. É comum se usar as expressões ínfimo e supremo. [↑](#footnote-ref-3)