**Elementos de Mecânica Clássica:**

Vamos usar os dois formalismos, do Cálculo das Variações e da Teoria do Controle Ótimo sumarizados na tabela abaixo.

|  |  |
| --- | --- |
| Cálculo das Variações | Teoria do Controle Ótimo |
| Problema: Otimizar  sujeito à restrição . |  |
| Usa a Lagrangeana para transformar o problema em: | Problema: Otimizar  sujeito às restrições . |
| Trajetória ótima segue equação de Euler-Lagrange: | Usa a Hamiltoniana  e as trajetórias ótimas seguem equações de Hamilton-Jacobi:  ; ; ; |

**Transformação de Legendre:**

Vamos desenvolver a ideia com uma variável e generalizar. Seja  e  o coeficiente angular da curva em . Queremos considerar  a variável exógena em lugar de  e obter . O problema é a unicidade da função. Transladando na horizontal todas as curvas darão origem ao mesmo . Assim precisamos de mais uma informação para definir univocamente a curva . Para definir uma reta univocamente precisamos da inclinação e do intercepto .

Calculando o intercepto:

Pela inclinação da reta temos  logo .

Por outro lado  e , com .

A função  é uma transformação de Legendre de .

|  |  |
| --- | --- |
| Direta | Transformação de Legendre |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
| Eliminando  e obtemos | Eliminando  e obtemos |
|  |  |

Generalizando:

Seja   e  então:



Mas  logo  e .

**Mecânica Clássica no Cálculo das Variações.** Trocam-se as leis de Newton pelo princípio da Ação Mínima em que a trajetória é aquela que minimiza  . Agora basta mostrar que que usando:



Recuperamos as leis de Newton.

 e , portanto a equação de Euler-Lagrange  nos leva a:



Vale notar que  é o momento.

Generalizando o Cálculo das Variações para  coordenadas  temos que resolver  equações de Euler-Lagrange do tipo . Se temos um sistema com  partículas com 3 graus de liberdade (x,y,z) para cada partícula teremos  coordenadas no total que vamos denotar por .

A grande vantagem do formalismo Lagrangeano na Mecânica Clássica é a possibilidade de mudar as variáveis para satisfazer restrições específicas. Então vamos mudar das coordenadas cartesianas  para um conjunto de coordenadas dado pelas transformações:

 e sua transformação inversa .

Agora vamos usar a notação de Einstein do somatório , ou seja, repetir um índice significa somar sobre o mesmo, para facilitar a álgebra. Nesta notação temos que:

 ou seja  [note que a somatória é realizada apenas sobre j, o índice repetido, e não sobre i]

A energia cinética é dada por:

 e estamos somando em i. Em termos das coordenadas q temos:

 onde usamos dois índices, j e k, porque são duas somatórias diferentes.



Agora  então:



Nas coordenadas cartesianas sabemos que o momento é dado por  então, por analogia, vamos definir um momento generalizado através de . Neste caso:





Usando o fato de que  e que  então:



Usando os  de Kronecker para eliminar uma somatória temos:



Novamente  então

 ou seja .

Por outro lado  logo  então:

 ou seja . Além disso dderivando  então  logo:



**Forças e Trabalhos generalizados.**

Suponha uma transformação de coordenadas em que não há uma dependência explícita do tempo, então:



A força generalizada é definida por . Se as forças são conservativas então existe uma função potencial  tal que  e  só depende de  mas não de  e , então:

 logo:



Agora vamos re-examinar a segunda lei de Newton .



 mas  então:

 ou seja:

 que nos leva a uma equação muito similar à equação de Euler-Lagrange:

 ou 

Agora construímos o Lagrangeano  e vemos que  e que , ou seja, . Substituindo em termos do Lagrangeano temos a equação de Euler-Lagrange de volta em termos das coordenadas generalizadas  ,  e :



**Coordenadas ignoráveis:**

Suponha que  não depende explicitamente da coordenada . Neste caso  logo  significando que  é constante. Nesse caso  será determinado pelas condições de contorno sobre as outras variáveis  , tornando a Lagrangeana uma função apenas das outras coordenadas mas não de  e . Assim diminuímos o número de variáveis independentes da Lagrangeana por 2 para cada coordenada ignorável.

**Sistema sujeito a restrições ou vínculos:**

Suponha que existam  restrições do tipo:



O número de graus de liberdade do sistema será . Como podemos escolher as coordenadas generalizadas escolhemos  delas da forma:



E as  restantes como  constantes. Cada  será uma função do tipo:



Daí obtemos os equações:





Forças de vínculo não realizam trabalho, logo  e as  coordenadas que definem as restrições são ignoráveis. A intensidade das forças de vínculo devem ser as necessárias para manter as restrições, ou vínculos. Assim, um sistema com  partículas,  vínculos e  coordenadas ignoráveis terá  graus de liberdade.

**Formalismo Hamiltoniano:**

Primeiro vamos analisar o caso univariado na  coordenada. No formalismo Lagrangeano achar o extremo de  nos leva às equações de Euler-Lagrange , ou seja,  ou seja . No formalismo Hamiltoniano queremos o extremos de  sujeito à restrição  sobre a qual fazemos a transformação de Legendre:  que nos leva às equações de Hamilton:

, logo  e o significado do mulitplicador de Lagrange nesse caso é que  é o momento generalizado. Além disso:

 portanto 

e

 logo 

As equações de Hamilton-Jacobi são:  e .

O Hamiltoniano é obtido do Lagrangeano através da transformação de Legendre: .

Agora, se as coordenadas cartesianas só dependem do tempo através das coordenadas generalizadas e não explicitamente, i.e., , então  e a energia cinética é dada: .

Agora





Logo  e .



Hamiltoniano do Sistema é dado pela energia total:

 e as equações de Hamilton-Jacobi:  e .

As coordenadas  e  são chamadas coordenadas conjugadas.

**Parêntesis de Poisson.**

Suponha uma função  que só depende do tempo  via  e , e não explicitamente. Nesse caso:



Usando  e  temos:



O parêntesis de Poisson entre duas funções é definido por: .

A dinâmica do sistema é dada então por:

 muito semelhante à dinâmica da mecânica quântica em que  onde  é o comutador entre os operadores e .

**Espaço das fases, ou espaço  .**

Se soubermos  e  em um dado tempo, em princípio, pela mecânica clássica, saberíamos  e  em qualquer momento posterior (e anterior). Assim um ponto no espaço das fases  vs define um estado do Sistema, e uma trajetória. O ponto  possui  coordenadas. Restrições em  e ou  limitam a região de possibilidades do espaço das fases.

**Equação da continuidade:**

Fluxo de algo, que chamaremos de  é a quantidade de  que passa or unidade de área perpendicular ao fluxo por unidade de tempo. É um vetor na direção do movimento de . Assim:





Vamos fazer o balanço entre o que entra e o que sai de  na direção :







Ou seja:



Repetindo os argumentos para as faces  e  temos que:

 ou ainda .

Vamos definir uma fonte de no volume  pela quantidade de  criado por unidade de volume por unidade de tempo na forma , e um sumidouro pela quantidade de  destruída por unidade de volume por unidade de tempo na forma . No intervalo de tempo  então se criou  e se destruiu  no volume .

O balanço total entre os fluxos, criação e destruição de  é dado por:



Logo:

 onde  é a densidade de . Dessa forma chegamos à equação da continuidade:



Na ausência de fontes e sumidouros então:



Usando o fato de que  então a equação pode ser escrita como:



**Teorema de Liouville:**

Agora vamos considerar  o número de estados no espaço das fases e  a densidade de estados. Nesse caso  e . Nesse caso:





Agora usamos as equações de Hamilton-Jacobi:  e . Da primeira equação tiramos que  e da segunda  portanto:



Logo:



Da equação da continuidade então:



Conclusão .

Note a difeença entre a derivada total e a parcial. Na parcial o elemento de volume é fixo no espaço e só observamos o que entra e o que sai desse volume no tempo. No total escolhemos uma dada quantidade de  que ocupava um volume em  e muda para outro volume em . Daí comparamos as duas densidades.

Como o  é o mesmo, o fato de que  significa então que . Se a área em  é maior o comprimento em  deve compensar a perda de área. Funciona como um fluido incompressível. Mas isso não quer dizer que , pois mesmo mantendo o volume o fluxo total pode estar mudando no tempo.

Sistema em equilíbrio significa que nada muda no tempo, devendo estar em um estado estacionário no qual . Trata-se de um suposição mais forte do que . Nesse caso a equação da continuidade significa que:



Se a densidade de estados só depende das coordenadas  através do Hamiltoniano, i.e.,  então:





Nesse caso o sistema está em equilíbrio.

Entre as opções para a densidade de estados temos:



Essa função leva a um sistema em equilíbrio no qual a densidade de estados não se modificará no tempo. Trata-se do ensemble microcanônico. Outra densidade de estados possível é a do ensemble canônico em que:



Síntese desse ponto é: se a densidade de estados só depende do Hamiltoniano então  e o sistema está em equilíbrio termodinâmico.