<u>RELATÓRIO FINAL F- 809</u>

<u>O ESTUDO DA DISTRIBUIÇÃO NORMAL POR GALTON</u>

Universidade Estadual de Campinas

Junho/2004

<u>Aluna</u>: Priscila Massetto de Aquino (<u>RA</u>: 009637)

<u>Professor Orientador</u>: Fernando Cerdeira

1. Introdução

Montamos a chamada tábua de Galton para entendermos experimentalmente a probabilidade. Queremos entender a distribuição normal de Gauss, e como a tábua descreve exatamente esta distribuição.

A tábua montada é a seguinte:

figura 1.1 – Fotografia de uma tábua de Galton montada

A idéia é soltar M bolinhas sempre do mesmo local, e mostrar que a probabilidade de que a bolinha caia nas divisórias do meio é maior que a probabilidade da bolinha cair nas divisórias das extremidades.

Assim, se tivermos um número M de bolinhas muito grande, veremos que a curva formada pelas bolinhas nas divisórias segue uma distribuição normal de Gauss (ou uma gaussiana, se o número de divisórias for muito grande).

2. Modelo teórico

Vamos primeiramente pensar no problema de caminho aleatório. Um indivíduo caminha sobre uma reta dando passos de igual comprimento *l* para a direita e esquerda. Vamos supor que a probabilidade dele ir para a direita é *p*, e dele caminhar para a esquerda é *q=1-p* (pois não existe outra possibilidade). O problema que precisamos resolver é justamente encontrar qual a probabilidade $P_n(m)$ para que o indivíduo esteja na posição *x=ml* depois de ter dado N passos.

Se o indivíduo dá n_1 passos para a direita, e n_2 passos para a esquerda (obviamente $n=n_1+n_2$), a probabilidade de uma seqüência de *n* passos será:

$(ppp....p)(qqq....q)=p^{n1}q^{n2}$

E o número de seqüências de passos de um mesmo tipo será: $\frac{n!}{n_1!n_2!}$

Então teremos que a probabilidade de um indivíduo dar exatamente n_1 passos para direita e n_2 para a esquerda (num total de *n* passos) é dada por:

$$W_n(n_1)=\frac{n!}{n_1!n_2!}p^{n_1}q^{n_2}$$ (1) - Esta é a famosa distribuição binomial.

Podemos fazer uma analogia com o problema da tábua de Galton, onde teremos:

- p= probabilidade de que a bolinha, após sofrer uma colisão, caia para a direita;
- q probabilidade de que a bolinha, após sofrer uma colisão, caia para a esquerda;
- n= número de linhas (supondo que a bola bate uma única vez em cada linha, então este também é o número de colisões totais de cada bolinha);
- n_1= número de colisões que farão a bolinha ir para a direita;
- n_2= número de colisões que farão a bolinha ir para a esquerda.

Se a bolinha for lançada sempre do mesmo lugar (entre os dois pregos do topo), então ela cairá sobre n pregos até chegar nas divisórias, onde n é o número de linhas de pregos:

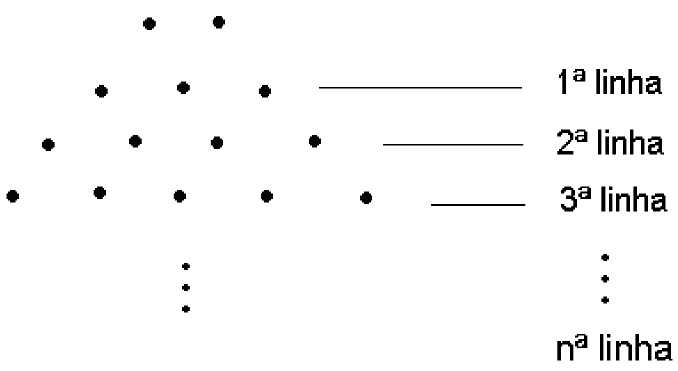


figura 2.1. Esquema demonstrativo das linhas de pregos

Como temos a probabilidade de uma bolinha cair sobre n pregos($W_d(n_1)$), então conseguimos calcular o valor das probabilidades da bolinha cair em cada divisória.

Por exemplo, vamos pensar qual a probabilidade da bolinha cair exatamente na divisória do meio. A bolinha deverá cair sobre n pregos (n_1 pela direita, e n_2 pela esquerda). Para que ela caia na divisória do meio, $n_1 - n_2 = 0$, ou seja, ela tem que escolher a direita o mesmo número de vezes que ela escolher a esquerda. Como sabemos que $n = n_1 + n_2$, então $n = 2n_1$, e a probabilidade fica sendo:

$$W_{metade}(n_1) = \frac{(2n_1)!}{n_1!n_1!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n_1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n_1} \Rightarrow W_{metade}(n_1) = \frac{(2n_1)!}{(n_1!)^2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n_1} \quad (2)$$

Desta forma, podemos calcular as probabilidades da bolinha cair em cada divisória, e mostrar experimentalmente que a probabilidade dela cair na divisória do meio é a maior de todas.

OBS. O fato de que a probabilidade deve ser maior quando a bolinha cai na divisória do meio pode ser provado teoricamente se usarmos a fórmula de Stirling:

$$\ln(n!) = n\ln n$$

E então, usando em Wn (n1):

$$\ln(W_n(n_1)) = n\ln n - n_1\ln n_1 - (n-n_1)\ln(n-n_1) + n_1\ln p - (n-n_1)\ln q$$

Quero encontrar qual o valor de n1 para que a probabilidade seja máxima, então faço:

$$\frac{\partial \ln(W_n(n_1))}{\partial n_1} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \ln(W_n(n_1))}{\partial n_1} = -1 - \ln n_1 + 1 + \ln(n-n_1) = 0$$

$$\Rightarrow -\ln n_1 + \ln(n-n_1) = 0 \boxed{\Rightarrow n_1 = \frac{n}{2}}$$

Assim vemos que a probabilidade é máxima quando n1 é a metade de n, portanto a probabilidade da bolinha cair na divisória do meio é a maior de todas!

E a curva da distribuição normal é a seguinte:

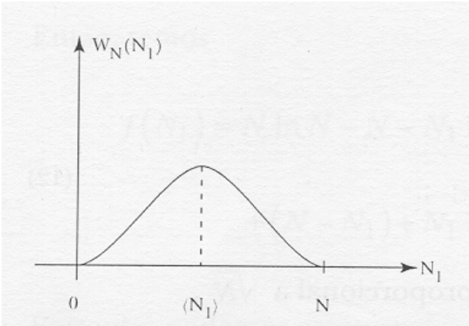


figura 2.2 – curva da probabilidade com distribuição binomial

Mas, sabemos que se tivermos um n >>1 no problema de caminho aleatório:

$Wn(n_1) \rightarrow P(x)$, pois $npq >> 1$. Assim, temos:

$$p(x) = \left(2\pi\sigma^2\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \text{ com } \begin{array}{l} \mu = np \\ \sigma = \sqrt{\mu pq} \end{array} \quad (3)\ *$$

Fazendo a analogia para a nossa tábua, como temos um número grande de divisórias e colisões, podemos usar esta aproximação.

E a curva para a distribuição gaussiana será:

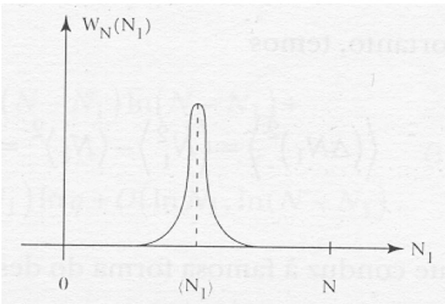


figura 2.3 – curva gaussiana

Portanto, podemos prever que em nossa tábua o acumulo das bolinhas formará a curva de distribuição normal, se aproximando da gaussiana.

* Veja em F. REIF, " Fundamentals of statistical and thermal physics", Cap. I – pag.22

3. Montagem do experimento

Faremos o experimento um pouco diferente do que havíamos projetado. Como queremos jogar um número grande de bolinhas, precisamos ter um número razoavelmente grande de divisórias (mas bem menor que o número de bolinhas), para que a curva gaussiana se forme da melhor forma possível.

Tínhamos pensado em uma caixa com uma tampa de vidro (ou plástico), de forma que ela sempre ficasse de pé (fundo da caixa formando 90º com a horizontal), e o vidro (ou plástico) seguraria as bolinhas para que elas não caíssem para frente.

O problema é que a caixa teria que ser muito grande e seu custo seria muito alto, além de que seria difícil fazermos a tampa de vidro (ou plástico) encaixar corretamente na caixa de madeira. Então resolvemos a situação fazendo uma tábua mesmo, de tal forma que ela fica inclinada (formando um ângulo θ com a horizontal) e não precisa da tampa para segurar as bolinhas.

Temos que lembrar também que a idéia é talvez até mais interessante, já que agora podemos fazer essa inclinação variar e mostrar que as probabilidades das bolinhas (caírem em cada divisória) deve continuar a mesma, não dependendo da inclinação da tábua.

Além disso, vamos fazer uma coisa que talvez deixe o experimento ainda mais interessante: montar duas tábuas (uma com poucas divisórias, e outra com muitas). Isso será feito para podermos ver as diferenças entre as curvas formadas. Apesar de termos duas curvas seguindo uma distribuição normal, uma delas (a da tábua com mais divisórias) será uma aproximação gaussiana, sendo um pouco mas estreita, como vimos nas figuras 2.2 e 2.3.

3.1) O material Utilizado:

- Duas tábuas de madeira com as seguintes medidas:

	Comprimento (m)	Altura (m)
1	0,4	0,6
2	0,6	1,0

- Pregos de diâmetro desprezível
- Bolinhas de diâmetro 16 mm
- Fita crepe (divisórias)

3.2) A montagem:

Construímos duas tábuas com o objetivo de notarmos a diferença entre as duas curvas formadas. Enquanto uma delas (tábua (1)) terá apenas 17 divisórias (formando uma curva que segue a distribuição normal), a outra (tábua (2)) terá 29 (poderemos aproximar a curva formada por uma gaussiana).

Montamos as duas tábuas da maneira descrita no projeto, deixando um espaçamento de 20 mm entre um prego e outro (tanto para cima quanto para baixo):

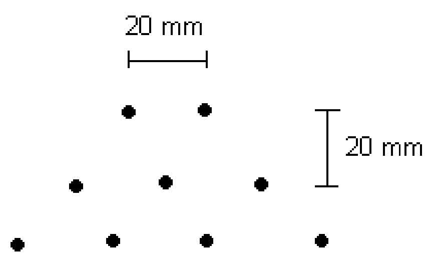


figura 3.2.1 - esquema da montagem dos pregos nas tábuas

E assim, começamos a construir:

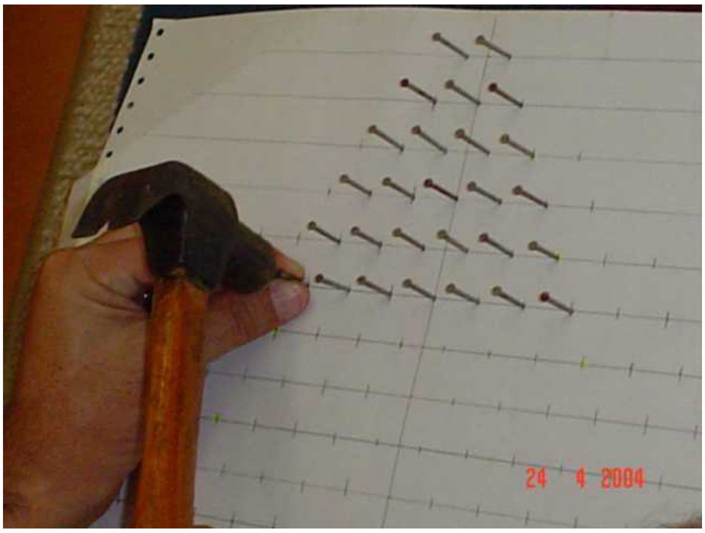
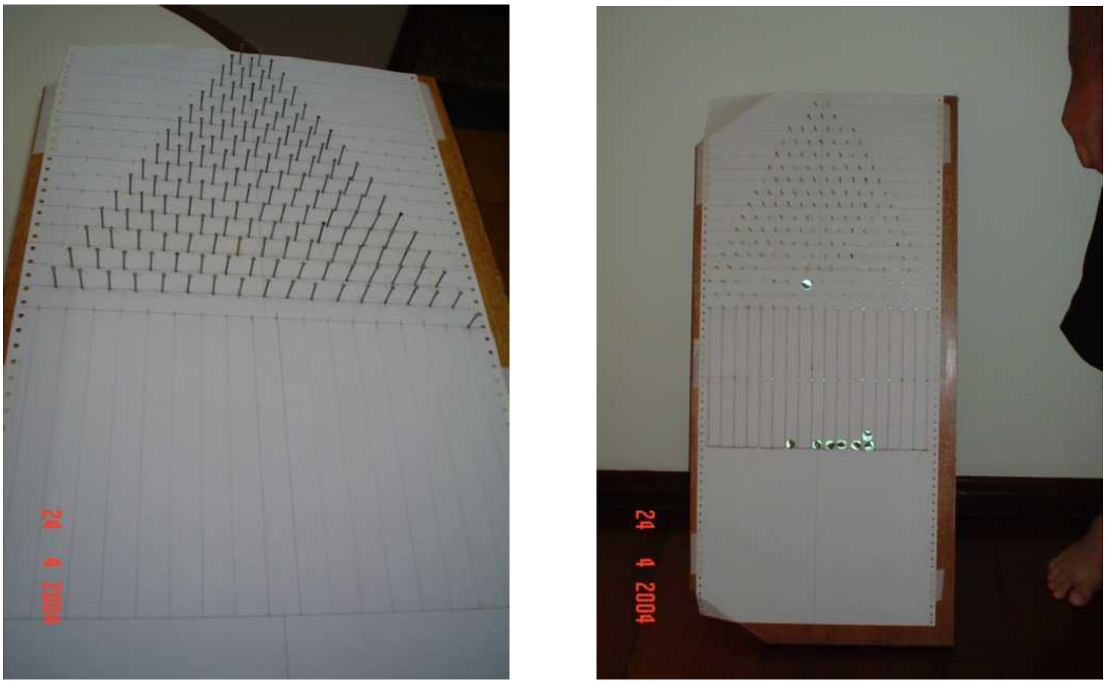


figura 3.2.2 - foto da tábua (1) sendo construída

Fizemos as tábuas com 17, e 29 linhas respectivamente. Como na teoria vimos que começamos a contar as linhas a partir da segunda, teremos 16 e 28 colisões das bolinhas com os pregos.

Podemos ver duas fotos da tábua (1) quase pronta, onde fica fácil contarmos o número de linhas, e o número de divisórias:



(a) (b)

figura 3.2.3 – (a) foto da tábua (1) quase pronta, faltando somente as divisórias (b) foto da tábua (1) com uma bolinha caindo

4. As incertezas do experimento

É importante ressaltar que este experimento está sendo feito completamente por uma amadora! Desta forma os erros e incertezas são muito grandes.

Podemos listar alguns cuidados que podemos tomar para minimizar os erros, fazendo com que a curva formada fique muito próxima à da teoria:

- A madeira utilizada precisa estar muito bem lixada, de maneira uniforme, para que não seja priorizado nenhum lado da tábua;
- Os pregos devem estar pregados de tal forma que fiquem o mais perpendicular com a tábua possível, pela mesma razão anterior;

- As bolinhas não podem ter nenhum tipo de rachadura, ou sobras de plástico, assim estas não ficarão viciadas.

Mas, mesmo tomando o maior cuidado, não conseguiremos ainda sim fazer com que a curva experimental fique idêntica à teórica. Isso porque estamos lidando com probabilidades, e uma vez ou outra teremos uma curva um pouco diferente.

Sendo assim, se obtivermos curvas muito parecidas com as esperadas (levando em conta claro, que teremos ainda uma curva que segue a distribuição normal) então o experimento terá sido cumprido.

5. Resultados experimentais

5.1) Valor da probabilidade de uma bolinha cair em cada uma das divisórias

Usando a equação (1) podemos calcular a probabilidade de **uma bolinha** cair em cada uma das divisórias.

Definindo cada divisória com um número, começando da divisória 1 (extrema esquerda) até as divisórias 17 ou 29 (extrema direita) para as tábuas (1) e (2) respectivamente, temos o **valor teórico** das probabilidades para cada tábua:

→ A tábua de 17 divisórias

divisória	N	n_1 (dir)	n_2 (esq)	W_d
1	16	0	16	0,0000153
2	16	1	15	0,0002441
3	16	2	14	0,0018311
4	16	3	13	0,0085449
5	16	4	12	0,0277710
6	16	5	11	0,0666504
7	16	6	10	0,1221924
8	16	7	9	0,1745605
9	**16**	**8**	**8**	**0,1963806**
10	16	9	7	0,1745605
11	16	10	6	0,1221924

12	16	11	5	0,0666504
13	16	12	4	0,0277710
14	16	13	3	0,0085449
15	16	14	2	0,0018311
16	16	15	1	0,0002441
17	16	16	0	0,0000153

Tabela 5.1) Valores teóricos das probabilidades de uma bolinha cair em cada uma das divisórias da tábua (1).

→ A tábua de 29 divisórias

divisória	N	n_1 (dir)	n_2 (esq)	W
1	28	0	28	3,725x10-09
2	28	1	27	1,043x10-07
3	28	2	26	1,408x10-06
4	28	3	25	1,220x10-05
5	28	4	24	7,628x10-05
6	28	5	23	3,661x10-04
7	28	6	22	1,403x10-03
8	28	7	21	$4{,}411\times10^{-03}$
9	28	8	20	$1{,}158\times10^{-02}$
10	28	9	19	$2{,}573\times10^{-02}$
11	28	10	18	$4{,}889\times10^{-02}$
12	28	11	17	$8{,}000\times10^{-02}$
13	28	12	16	$1{,}133\times10^{-01}$
14	**28**	**13**	**15**	**$1{,}395\times10^{-01}$**
15	28	14	14	$1{,}494\times10^{-01}$
16	28	15	13	$1{,}395\times10^{-01}$
17	28	16	12	$1{,}133\times10^{-01}$
18	28	17	11	$8{,}000\times10^{-02}$
19	28	18	10	$4{,}889\times10^{-02}$
20	28	19	9	$2{,}573\times10^{-02}$
21	28	20	8	$1{,}158\times10^{-02}$
22	28	21	7	$4{,}411\times10^{-03}$
23	28	22	6	$1{,}403\times10^{-03}$
24	28	23	5	$3{,}661\times10^{-04}$
25	28	24	4	$7{,}628\times10^{-05}$
26	28	25	3	$1{,}220\times10^{-05}$

27	28	26	2	$1{,}408x10^{-06}$
28	28	27	1	$1{,}043x10^{-07}$
29	28	28	0	$3{,}725x10^{-09}$

Tabela 5.2) Valores teóricos das probabilidades de uma bolinha cair em cada uma das divisórias da tábua (2).

Note que o valor das probabilidades da 9ª e 14ª divisórias (que são as divisórias da metade das tábuas (1) e (2) respectivamente) são realmente os maiores valores obtidos para cada tábua (justamente o que provamos no modelo teórico deste relatório). Além disso, é importante observarmos mais duas coisas:

i) A soma das probabilidades de todas as divisórias das duas tábuas (separadamente) é igual a 1.

ii) Quando temos $|n_1 - n_2|$ iguais, então as probabilidades também serão iguais (como por exemplo nas divisórias 8 e 10 da tábua (1), ou 8 e 22 da tábua (2)). Portanto teremos uma simetria par se plotarmos os gráficos da divisória X W_d.

Desta forma, com os dados das tabelas, podemos plotar estes gráficos (dados teóricos de W_d X d) aos quais nos referimos acima:

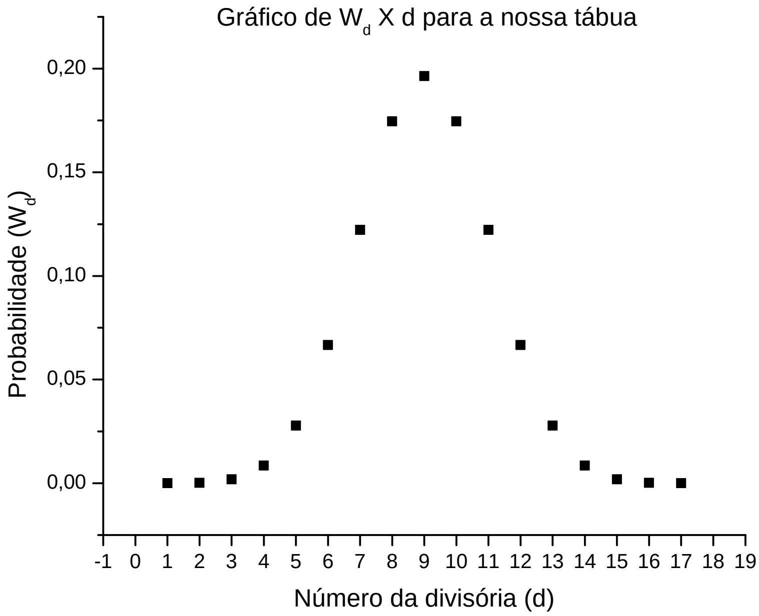


*figura 5.1.1- gráfico **teórico** de Wd X d para uma tábua com 17 divisórias*

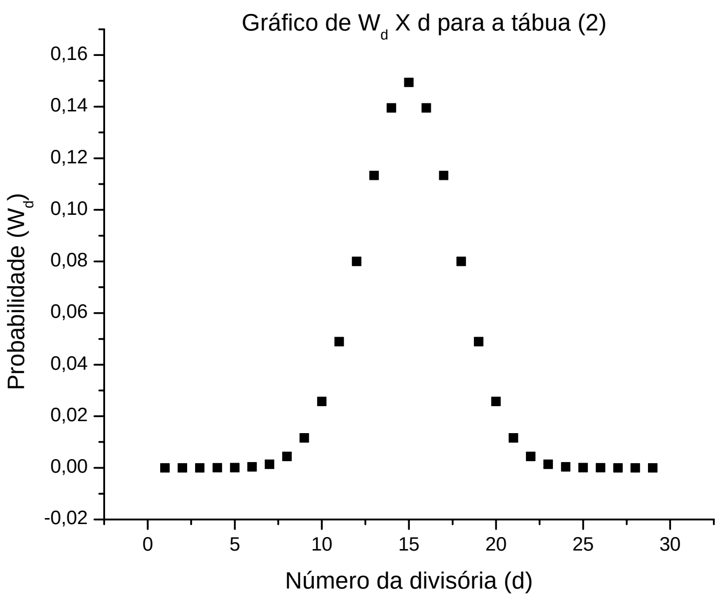


*figura 5.1.2 - gráfico **teórico** de Wd X d para uma tábua com 29 divisórias*

Estes são, portanto, os dois formatos <u>teóricos</u> das curvas esperadas experimentalmente.

5.2) As tábuas prontas e as curvas obtidas

Construímos as tábuas com o maior cuidado possível, para minimizar o erro que obteremos nas curvas experimentais.

É importante frisar que estamos trabalhando com probabilidades, portanto as curvas esperadas não serão obtidas em 100% das vezes que realizarmos o experimento, mas devem seguir a distribuição desejada. Com isso podemos ver as duas tábuas prontas:

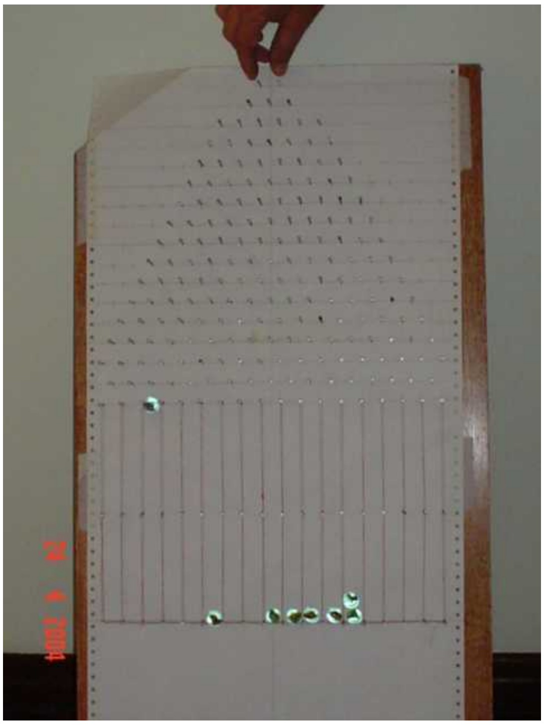


figura 5.2.1 – foto da tábua (1)

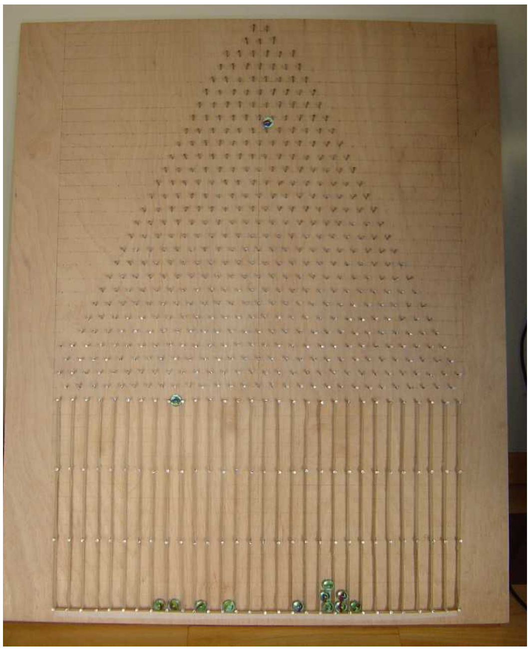
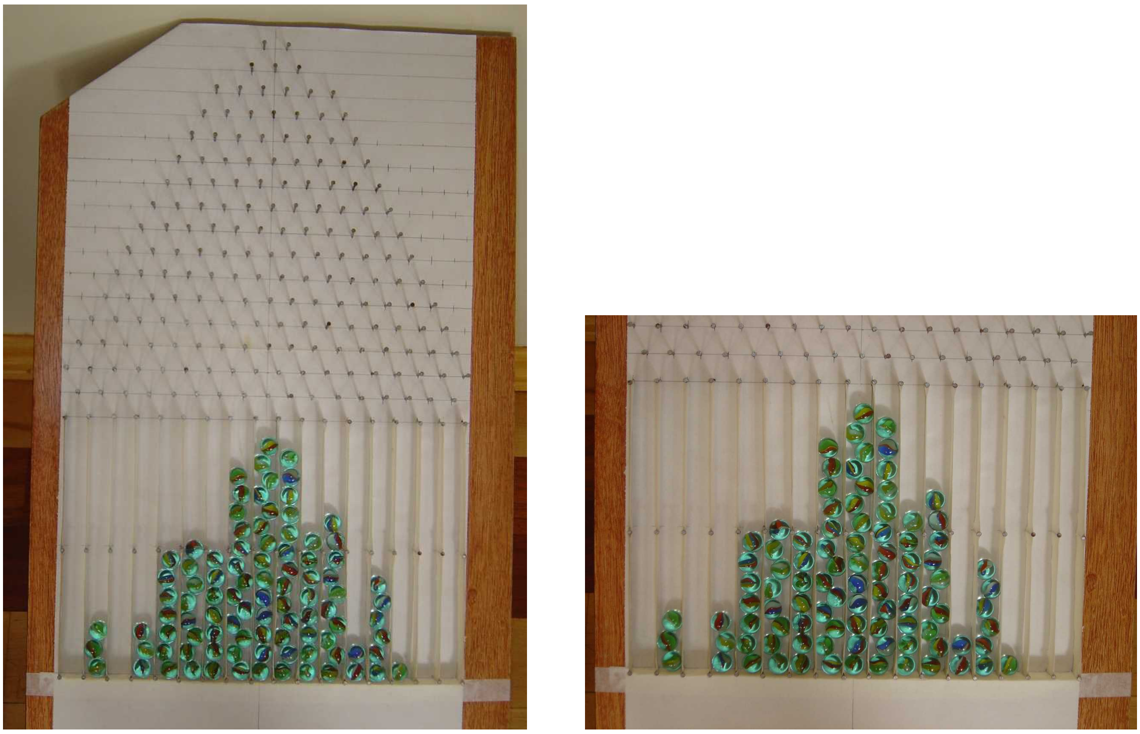


figura 5.2.2 - foto da tábua (2)

Com ambas tábuas prontas, realizamos o experimento diversas vezes com 100 bolinhas em cada tábua, e pudemos ver que apesar dos grandes erros experimentais, a maioria das curvas tendem a seguir a distribuição normal em tábuas.

Nas fotos a seguir estão os resultados obtidos para a tábua (1) e logo após para a tábua (2).



(a) (b)

figura 5.2.3 – (a) foto da tábua (1) com a curva (i) formada pelas bolinhas.

(b) foto com zoom na curva (i) formada pelas bolinhas

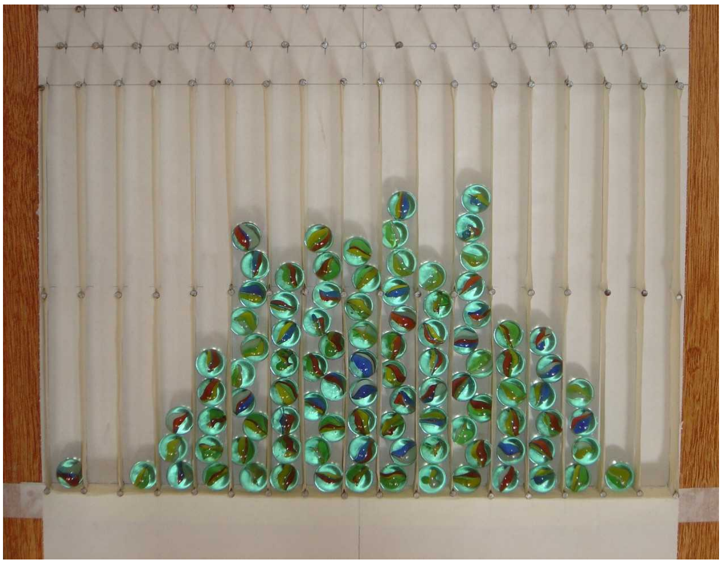


figura 5.2.4 - foto com zoom na curva (ii) formada pelas bolinhas

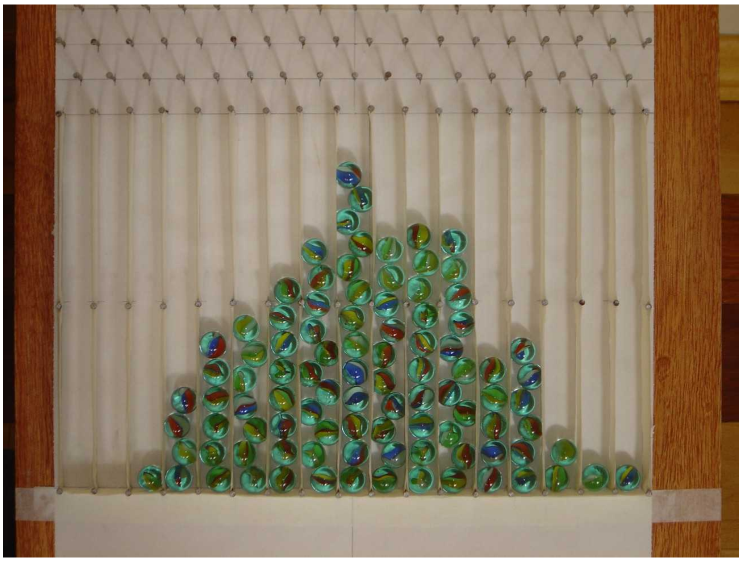
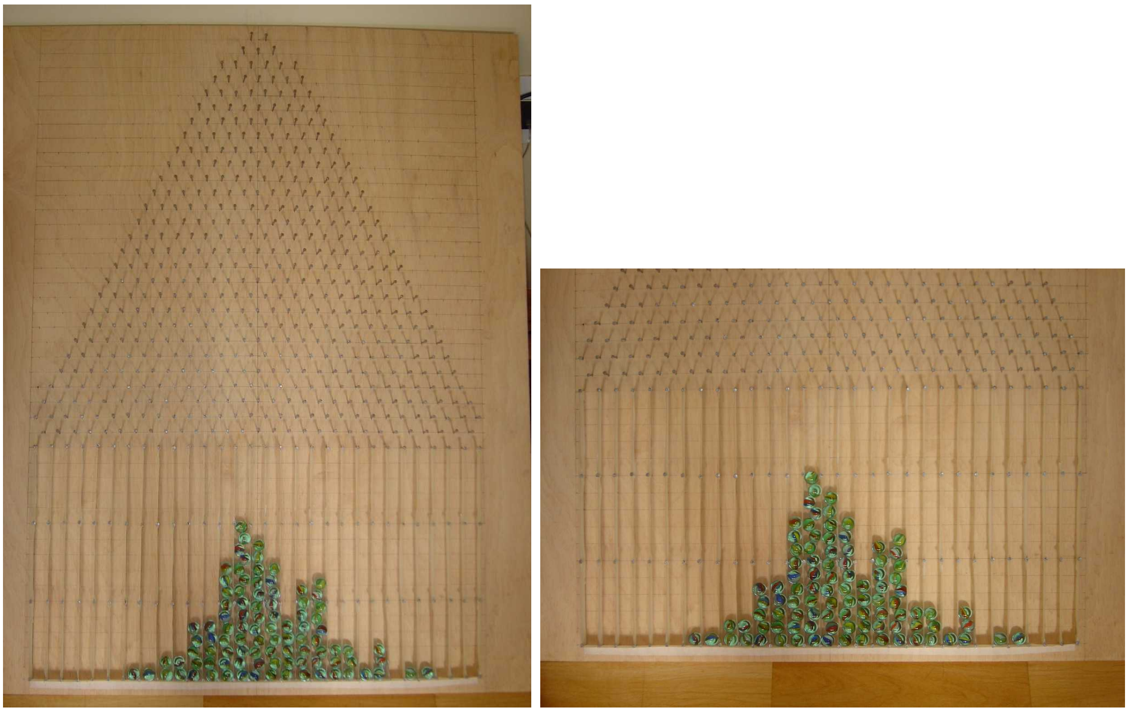


figura 5.2.5 - foto com zoom na curva (iii) formada pelas bolinhas

→ Tábua (2)



(a) (b)

Figura 5.2.6 – (a) foto da tábua (2) com a curva (i) formada pelas bolinhas.
(b) foto com zoom na curva (i) formada pelas bolinhas

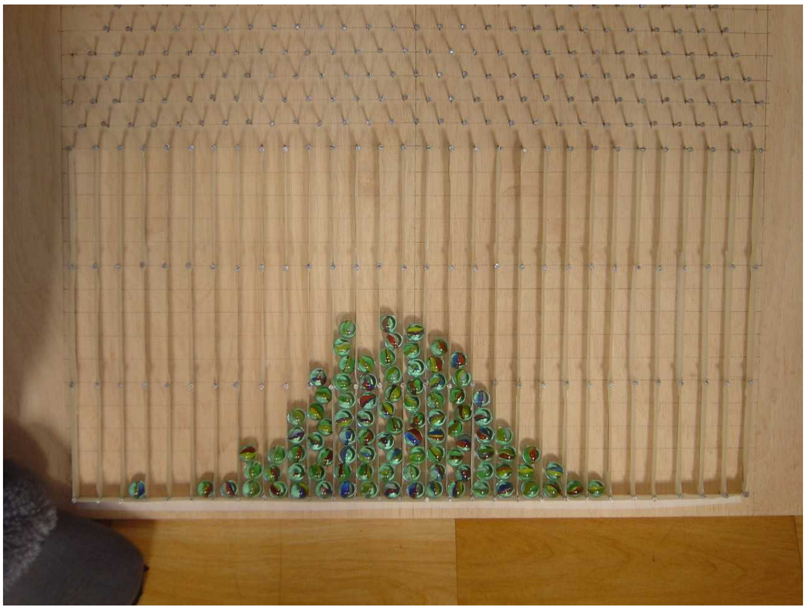


figura 5.2.7 - foto com zoom na curva (ii) formada pelas bolinhas

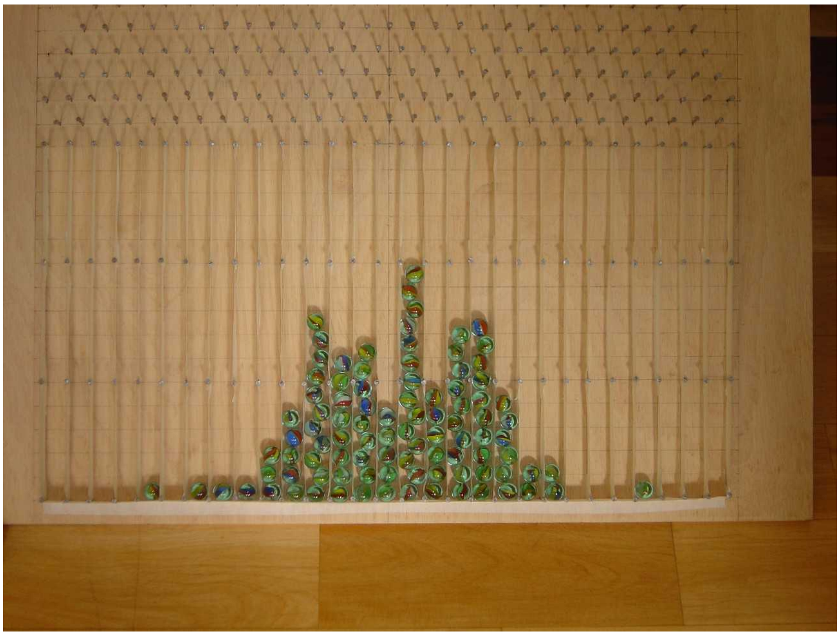
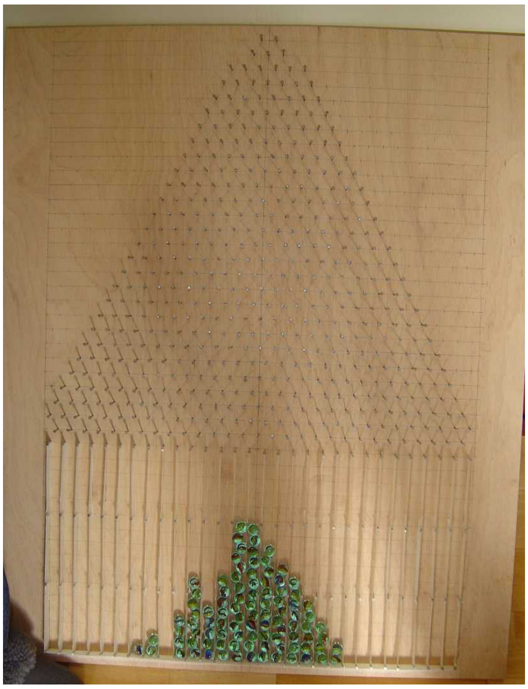
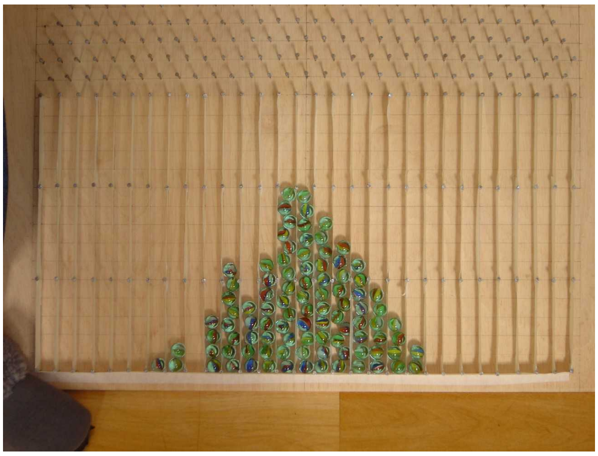


figura 5.2.8 - foto com zoom na curva (iii) formada pelas bolinhas





(a) *(b)*

figura 5.2.9 - (a) foto da tábua (2) com a curva (iv) formada pelas bolinhas.

(b) foto com zoom na curva (iv) formada pelas bolinhas

Note que a curva formada na tábua (2) é um pouco mais estreita que a formada na tábua (1), e que raramente alguma bolinha cai nas divisórias do canto da tábua (2), . Olhando para os valores das probabilidades da primeira (ou última) divisória das duas tábuas, temos:

tábua	W_1
1	$1{,}52\text{x}10^{-5}$
2	$3{,}72\text{x}10^{-09}$

Vemos aí que o valor da probabilidade da tábua (1) é bem maior que o da tábua (2), então é esperado que as bolinhas caiam com uma freqüência maior na primeira (ou última) divisória da tábua (1) do que na da tábua (2), justamente como acontece!

Vamos agora nos concentrar em uma curvas de cada tábua para que possamos ver que as curvas obtidas (como vimos nas fotos acima) são bons resultados.

Primeiramente vamos graficar a curva (i) da tábua (1), e analisar seus dados.

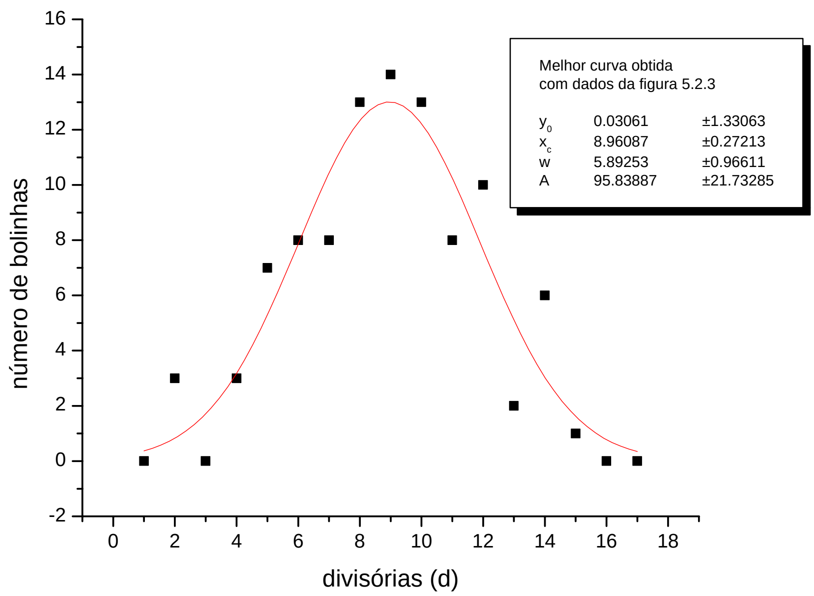


Figura 5.2.10 - gráfico experimental (curva (i) da tábua (1)) do número de bolinhas X número da divisória (d)

Vemos aí que a média obtida foi: μ=8.9±0,3. Assim, pela aproximação gaussiana, temos que μ=np. Sabemos que n=16 neste caso, assim, podemos obter p:

p=0.56, na realidade $\boxed{p=0,5\pm0,3}$.

Como na teoria p=0.5, então temos um bom resultado, já que o teórico está dentro do intervalo experimental obtido acima!

Vamos ainda fazer um outro gráfico desta mesma curva: como tínhamos o gráfico teórico da probabilidade de uma bolinha cair em cada divisória, vamos fazer este mesmo gráfico, mas como os resultados experimentais.

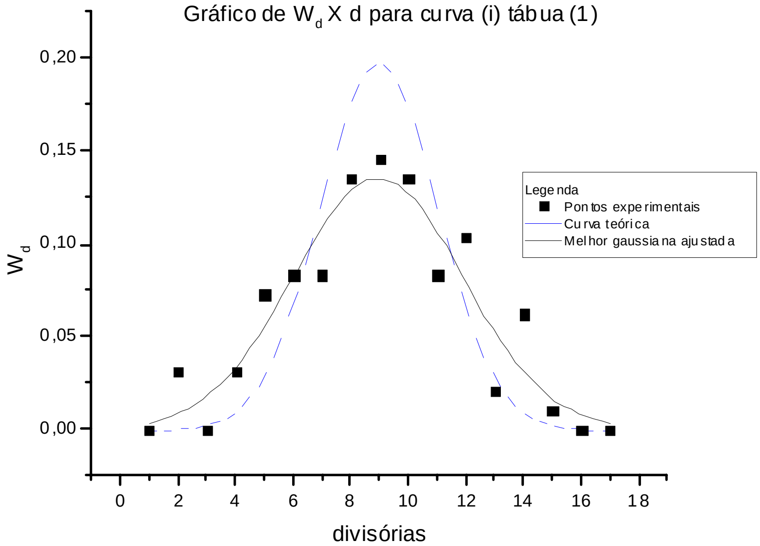


figura 5.2.11 – gráfico de W_d X d da curva (i) da tábua (1)

Note que, como temos um número pequeno de divisórias, a aproximação gaussiana não é tão ajustável, mas que a curva segue (como já discutimos) uma distribuição normal. Assim, para um número grande de divisórias, a curva teórica deve estar muito próxima à experimental!

Fazendo estas mesmas análises para a curva (ii) da tábua (2):

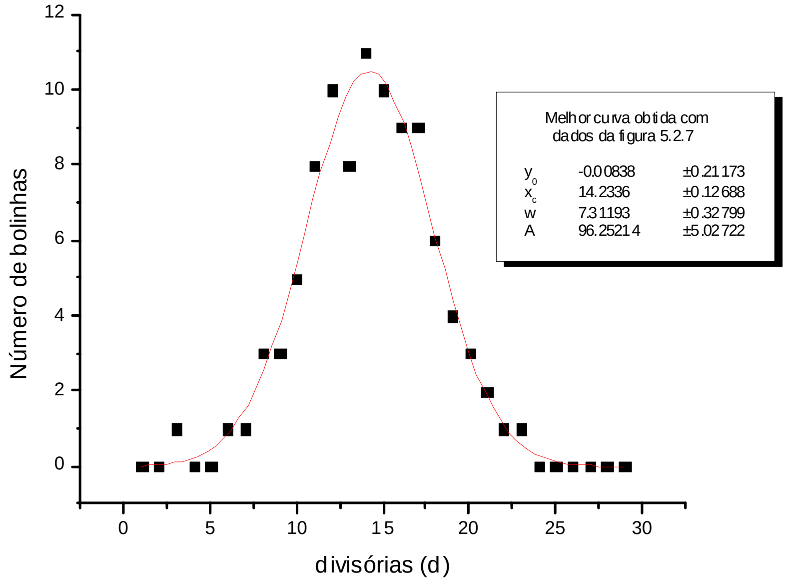


figura 5.2.12 - gráfico experimental (curva (ii) da tábua (2)) do número de bolinhas X número da divisória (d)

Vemos aí que a média obtida foi μ=14,2±0,1. Como neste caso n=29, então temos que p=0,49. Considerando o erro: $\boxed{p=0,5\pm0,1}$

Desta forma, podemos observar que o valor teórica (p=0,5) está dentro do intervalo experimental obtido.

Fazendo um gráfico das probabilidades obtidas experimentalmente de uma bolinha cair em cada divisória:

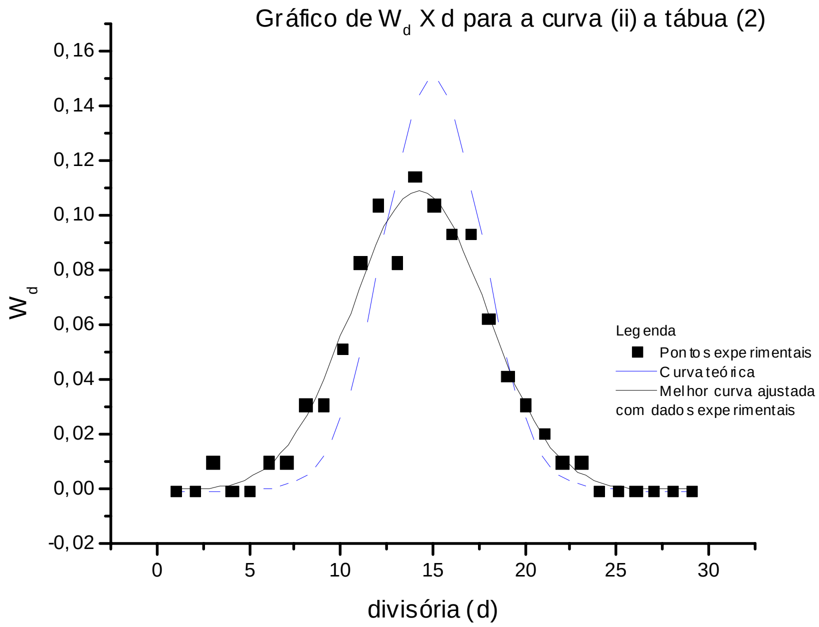


figura 5.2.11 – gráfico de W_d X d da curva (ii) da tábua (2)

Vemos agora que a curva experimental já chega mais perto da aproximação gaussiana teórica (curva tracejada). Isso pois neste caso o número de divisórias é grande, bem maior do que na tábua (1).

Ainda sim, temos que lembrar que experimento realizado tem grandes erros e incertezas (como aquele já previamente discutidos na seção 4), e por isso a curva obtida não pode ser perfeita.

Podemos ainda, da mesma forma como fizemos para estes dois casos, obter as médias, e calcular os valores de p, verificando que o valor teórico está dentro do intervalo experimental obtido.*

Desta forma tivemos:

* Os gráficos foram feitos para obtermos as médias, mas não foram colocados explicitamente pois já demonstrei como as obtive.

Tábua (1)			Tábua (2)		
curva	μ	P	curva	μ	p
i	8,96	0,5±0,3	i	15,13	0,5±0,3
ii	9,45	0,6±0,2	ii	14,2	0,5±0,1
iii	9,19	0,5±0,1	iii	15,56	0,5±0,3
			iv	15,08	0,5±0,1

Tabela 5.2.1 – Resultados obtidos para μ e p de cada curva.

5.3) A inclinação da tábua

Além disto, faltou uma última coisa a ser falada: a relação entre a inclinação da tábua e a curva obtida.

Fizemos 5 experiências com os seguintes ângulos com a horizontal (nos baseando no chão): 30, 45, 60 e 90.

Obtivemos curvas muito próximas, e obviamente seguindo a distribuição normal em todos os casos. A diferença maior entre as inclinações foi que quanto menor o ângulo de inclinação, menor era a velocidade da bolinha, demorando então mais para chegar nas divisórias.

Teoricamente a inclinação da tábua não deve alterar as probabilidades das bolinhas chegarem em cada divisória, já que a mudança no ângulo de inclinação deve alterar apenas força na descida da bolinha, como nos diz a teoria de plano inclinado.

OBS. Observe que este resultado experimental demonstra a teoria de plano inclinado:

Se a bolinha estiver descendo um plano inclinado, as forças que agem neste sistema são apenas a força peso e a normal (desconsiderando o atrito com o plano):

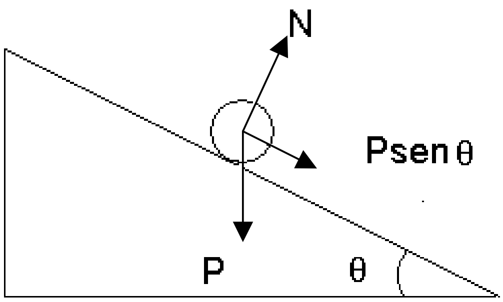


figura 5.3.1- esquema da tábua como um plano inclinado.

Assim, quanto menor for θ, menor será minha força de descida, menor será então a velocidade de descida.

6. Discussão sobre a didática do trabalho

Vimos que em todos os momentos a física estatística está em nossas vidas, por isso é importante que uma pessoa mesmo leiga no assunto consiga entender alguns conceitos básicos. A distribuição normal é muito importante para isso, pois ela nos mostra quais são as maiores chances de que algum evento que nós realizamos dê certo.

É muito importante que os professores que forem utilizar este trabalho saibam as implicações do mesmo nas áreas da física e matemática. Por isso, separamos esta seção em 3 partes:

(I) A distribuição normal para iniciantes

Aqui faremos uma discussão didático-pedagógica para aquele aluno que não está familiarizado com este conceito.

(II) Como este trabalho experimental (a tábua de Galton) demonstra este conceito?

Utilizaremos diretamente a tábua de Galton para fazer a conexão entre o experimental e o conceito teórico desenvolvido na parte anterior.

(III) A teoria de erros e incertezas e a distribuição normal.

E, por último, mostraremos porque utilizamos a distribuição normal nas teorias de erros utilizadas na física experimental.

6.1) A distribuição normal para iniciantes

Quando dados numéricos são organizados para serem colocados em um gráfico, geralmente os colocamos em ordem numérica, do menor para o maior, dividindo-os em grupos de algum tamanho específico. Montamos então gráficos, para podermos interpretar os dados que obtivemos no experimento, analisando o formato da curva, ou a distribuição que a curva segue.

O tipo mais comum de distribuição é a distribuição normal de Gauss, onde a maioria dos dados experimentais estão centrados em torno da média (que no caso, está exatamente na metade da curva), e a medida que vamos nos aproximando dos extremos da curva, os pontos experimentais vão ficando cada vez mais raros. Este tipo de distribuição é a que mais encontramos por causa de um importante teorema: o teorema do limite central. Ele faz com que o aluno possa medir o quanto a média de sua amostra deve variar, mesmo que este aluno não tenha outras amostras para compará-las. Portanto, o teorema basicamente diz que a média de sua amostra deve seguir uma distribuição normal, não importando qual a distribuição que ela seguia inicialmente.

A figura 6.1.1 nos mostra um exemplo de distribuição normal (assim como a figura 2.3 no modelo teórico deste relatório):

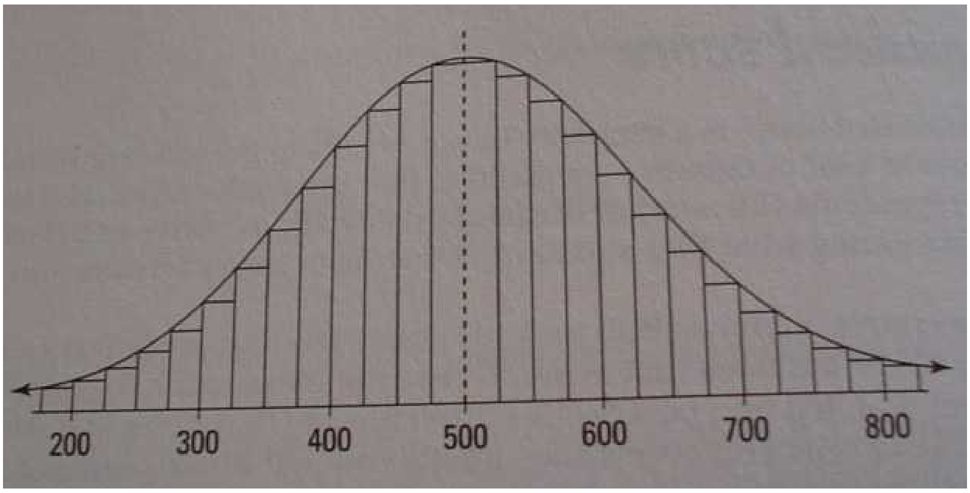


figura 6.1.1 – gráfico ilustrativo de uma distribuição normal

Esta distribuição é usada para descrever dados que seguem o padrão de um formato de “morro” como o da figura acima. Usando esse tipo de distribuição, conseguimos prever que um dado individual deve cair numa faixa de valores esperados (os mais prováveis), e saber quão bom é este resultado se comparado com os outros. No caso da distribuição normal, os valores mais prováveis são os da metade, onde temos a média dos valores, e a mediana.

Mas, o que são a média e a mediana, e quais suas diferenças?

Quando temos um conjunto de dados, a média será a soma de todos os dados dividida pelo número total de dados. Por exemplo, se temos 5 alunos numa classe que tiraram as seguintes notas:

	Aluno 1	Aluno 2	Aluno 3	Aluno 4	Aluno 5
notas	5,0	6,0	3,5	8,0	8,5

Então a média (μ) será a somas dos dados experimentais, no caso as notas, dividida pelo número total de dados, que são o número total de notas, no caso cinco:

$$\mu = \frac{5{,}0 + 6{,}0 + 3{,}5 + 8{,}0 + 8{,}5}{5} = 6{,}2$$

Já a mediana é um outro jeito de medir o centro de um conjunto de dados. A mediana é o ponto em que temos para os dois lados da curva o mesmo número de pontos experimentais.

Então podemos perceber facilmente que no caso de uma distribuição com o formato da figura 6.1.1 a média é igual a mediana, dada no centro da curva!

Além disso, podemos perceber que a distribuição normal segue um padrão com algumas propriedades. Estas são dadas por:

- O formato da curva é simétrico;
- A curva tem um máximo bem no meio;
- A média está diretamente na metade da distribuição. Esta será designada pela letra μ.
- A média e a mediana têm o mesmo valor, por causa da simetria;
- O desvio padrão (σ) representa a distância entre os dois pontos consecutivos do eixo x: x_1 e x_2.

Com tudo isso fica mais identificarmos se a distribuição que temos é a normal, para podermos interpretar melhor os dados experimentais obtidos em geral!

6.2) Como a tábua de Galton demonstra este conceito?

Na tábua de Galton (como nestas que construímos) vemos que a bolinha deve ser solta bem do meio. Assim, a probabilidade desta colidir com o primeiro prego e escolher o lado direito para cair é ½, e o lado esquerdo tb é ½. Quando ela for colidir com o segundo prego, teremos as seguintes probabilidades de colisões:

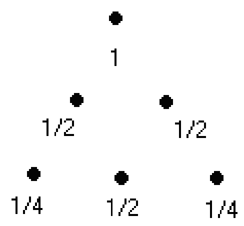


figura 6.2.2 – esquema demonstrativo das probabilidades da bolinha bater nos cinco primeiros pregos da tábua

Vemos então que a probabilidade das bolinhas colidirem com os pregos dos cantos será menor. Imagine agora um triângulo com 29 pontos horizontais (que é exatamente o número de pregos que temos na nossa tábua, resultando no mesmo número de divisórias). Na última linha de pregos teremos as probabilidades de colisões W_d calculadas (dadas pela tabela 5.2):

figura 6.2.2 – esquema das probabilidades das bolinhas baterem nos últimos pregos da tábua (2)

Desta forma, o gráfico da probabilidade X número de divisórias deve seguir uma distribuição com as mesmas características da distribuição normal.

Este gráfico (figura 5.1.2) foi feito na seção 5.1, e podemos claramente observar que este possui todas as propriedades citadas na seção 6.1!

Experimentalmente, quando jogamos as 100 bolinhas, obtemos uma curva que como teoricamente esperávamos, também segue as características de uma distribuição normal:

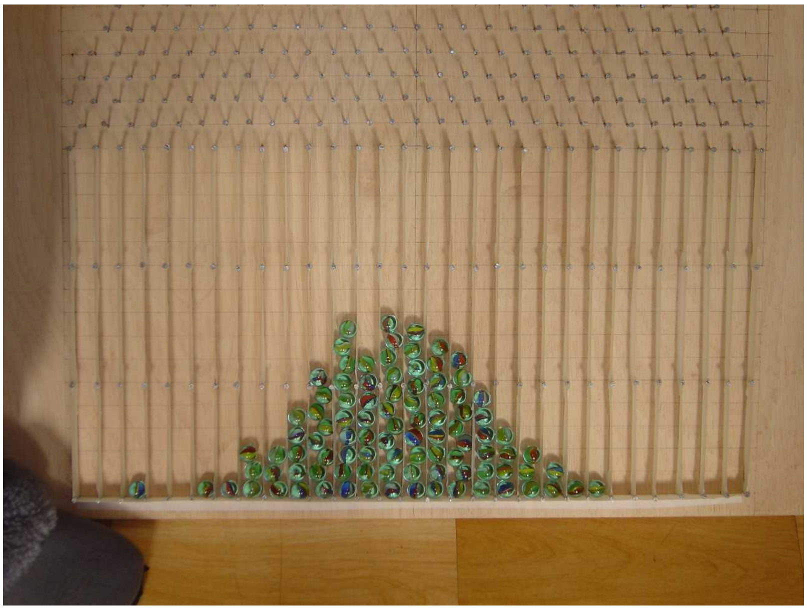


Figura 6.2.1 – foto de uma das curvas obtidas na tábua (2)

O fato é que ver que isso realmente acontece faz com que o aluno entenda e acredite em toda a teoria demonstrada na seção anterior!

6.3) A teoria de erros e a distribuição normal

Uma medida nunca é igual a outra. Não conseguimos isto pois existem fatores que as fazem diferir uma das outras como por exemplo o desgaste de instrumentos, ou as alterações do meio ambiente (como uma mudança de temperatura, umidade do ar, ou outras coisas).

Quando fazemos uma série de medidas que sejam tão idênticas quanto se queira, vemos que elas se distribuem em torno de um valor médio de forma um tanto quanto simétrica. Isto pois quando fazemos uma série de medidas, vamos obter valores que devem estar em volta de um valor médio, que será o valor teórico real no caso de medidas bem feitas. Assim, deve ser mais difícil obter alguma medida longe daquele valor que estávamos esperando (isto se o experimento for realizado de forma correta, claro). Portanto, temos uma probabilidade grande de obtermos valores próximos ao real, enquanto a medida que vamos nos afastando deste valor, a probabilidade de que ele seja obtido vai diminuindo, até que seja praticamente nula. Desta forma, teoricamente, as medidas experimentais devem seguir uma distribuição normal! Quando fazemos um grande número de medidas, a distribuição se aproxima de uma gaussiana, ou seja, a curva deve ficar mais estreita, o que significa que teremos uma incerteza menor, já que existem mais valores se aproximando de um único ponto (o valor médio, que no caso deve ser o teórico).

Com essas idéias foram desenvolvidas teorias para minimizar os erros e incertezas quando precisamos fazer as medidas, e principalmente quando temos que analisá-las.

Primeiramente precisamos saber alguns conceitos:

(a) Média : é a melhor estimativa do valor real da grandeza, e é adotada como resultado da série de medidas.

$$\overline{x} = \sum \frac{x_i}{n}$$

(b) Desvio de uma medida: é o tanto que uma medida se afasta da média.

$$x_i = x_i - \overline{x}$$

(c) Desvio quadrático médio: mede o espalhamento de medidas

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{x_i^{\ 2}}{n-1}}$$

(d) Erro: feita uma série de medidas, este é o erro que afeta o valor da grandeza

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

Neste caso, esta distribuição é centrada em x=0, e simétrica em torno deste valor (que corresponde à média). Então, a distribuição gaussiana é dada por:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{- x^2 \big/ 2\sigma^2\right\}$$

Como vemos na figura 6.3.1, a probabilidade de que a medida esteja entre –3σ e 3σ é muito grande, e pelo teorema do limite central pode ser calculada: 99,7%. Assim esperamos que quase que todas as medidas devem estar neste intervalo.

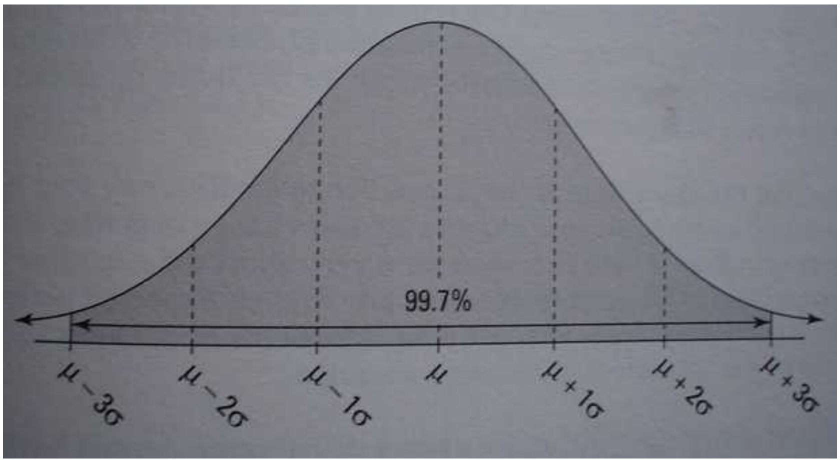


Figura 6.2.1 – esquema de distribuição normal entre –3σ e 3σ.

Então, como vimos, a base desta teoria é justamente perceber que as medidas devem se distribuir no formato de uma gaussiana, portanto quanto mais medidas conseguimos fazer, mais preciso será meu resultado!

7. Conclusão

Observando as fotos dos resultados obtidos, e comparando com os gráficos teóricos que tínhamos na seção 5.1 deste relatório, vemos que as curvas experimentais estão muito boas, pois considerando os erros, elas seguem o que esperávamos teoricamente.

Além disso, vimos que a inclinação da tábua não muda a probabilidade da bolinha cair em cada divisória, já que temos apenas um plano inclinado.

Ainda com este trabalho podemos mostrar ao aluno que experimentalmente a curva é formada e que a base teórica é realmente comprovada. Assim, se o professor for explicar sobre outros tipos de distribuição, ou mesmo outros conceitos de matemática ou física estatística, este experimento terá dado credibilidade ao aluno, que aceitará e entenderá estes outros conceitos.

Bibliografia

- REIF, F. em “Fundamentals of statistical and thermal physics” McGraw-Hill Inc,1965

- SALINAS, Silvio R.A. em “Introdução à física estatística”, Ed. da Universidade de São Paulo, 1997

- RUMSEY, Deborah em “ Statistics for Dummies”, Wiley Publishing Inc, 2003

- GUIMARÃES, Wladimir O.N. e ROVERSI, José A. em “Problemas experimentais em Física” Volume I, 2ª edição, Ed. da Unicamp, 1988

- Eric W. Weisstein et al. "Galton Board." de *MathWorld* --A Wolfram Web Resource: http://mathworld.wolfram.com/GaltonBoard.html

- "Galton's Board ou Quincunx." http://www.stattucino.com/berrie/dsl/Galton.html.
- Physics at Davidson. "Galton Board." http://webphysics.davidson.edu/Applets/galton4/galton_mean.html.
- University of Alabama in Huntsville. "The Galton Board Experiment." http://www.math.uah.edu/stat/applets/GaltonBoardExperiment.html.