



F 609 – Tópicos de Ensino de Física I
Coordenador: Joaquim Lunazzi
lunazzi@ifi.unicamp.br

Quase-Levitação Induzida Magneticamente



Aluno: André Luiz de Oliveira (IFGW – UNICAMP)
andrefismat@gmail.com
Técnico: Jorge Baudin (IFGW – UNICAMP)
Co-orientador: George Dourado Loula (IFGW – UNICAMP)
Orientador: Prof. Dr. Flávio César G. Gandra (IFGW - UNICAMP)

Índice:

1 - Resumo	3
2 - Introdução Teórica.	
2.1 - Como é produzido o Campo \vec{B}	4
2.2 - Definição do Campo \vec{B}	4
2.3 - Fluxo magnético	5
2.4 - Indução eletromagnética	7
2.5 - Correntes de Foucault	10
2.6 - Material Diamagnético	12
2.7 - Levitação ou Quase-levitação?	14
3 - O projeto	
3.1 - Materiais utilizados	17
3.2 - Montagem	17
3.3 - Equações de força	21
4 - Sugestões do coordenador	23
5 - Comentário do Orientador e Co-orientador	25
6 - Conclusões	26
7 - Referências	26

Resumo

O projeto inicialmente idealizado por mim, em conjunto com o meu orientador, Professor Dr. Flávio C. G. Gandra, corresponde ao protótipo confeccionado. Um segundo projeto, que corresponde a uma outra montagem, mas que segue a mesma temática do atual, foi sugerido pelo coordenador da disciplina. Por falta de tempo hábil para a execução de ambos, resolvi optar pela execução do meu projeto, já que ambos são bastantes similares (ambos abordam o efeito de quase-levitação magnética).

Abaixo, listo as idéias fundamentais de ambos:

1. O projeto tem suas bases fundamentadas na teoria eletromagnética, com ênfase, principalmente na lei de indução de Faraday. O aparato é composto de dois cilindros ocos de cobre, que giram em torno do seu eixo longitudinal. De acordo com a lei de indução de Faraday, ao aproximarmos desses cilindros girantes, um ímã permanente, a variação do fluxo do campo magnético sobre os cilindros, gera nesses uma corrente parasita (corrente de Foucault¹) e, por conseqüência, uma força magnética aparece também no ímã e se opõe ao seu peso, mantendo-o “levitando”..
2. A montagem sugerida pelo coordenador, e que não foi construída por falta de tempo hábil, consiste na “levitação” decorrente da repulsão entre pólos iguais de diferentes ímãs. Uma discussão mais detalhada da montagem pode ser encontrada com maiores detalhes podem ser encontrado no item 4 desse relatório.

¹ Jean Bernard Léon Foucault (18/09/ 1819 – 11/02/1868) foi físico e astrônomo francês. Foucault era filho de um editor de Paris. Estudou Medicina, que ele abandonou rapidamente para se dedicar à Física. Interessou-se pelos métodos fotográficos de Danguerre. Foucault é particularmente conhecido pela sua experiência demonstrando a rotação da Terra em torno de seu eixo (Pêndulo de Foucault), tendo determinado a velocidade da luz e inventado o giroscópio.

Introdução teórica

Como é produzido o campo \vec{B}

O campo elétrico eletrostático é gerado por cargas elétricas, o que nos leva a intuir, que o campo magnético também é gerado por cargas magnéticas. Porém, estas cargas não existem. O campo magnético deve, então, ser gerado de outras formas:

1 – Partículas eletricamente carregadas em movimento.

2 – Por uma propriedade intrínseca dos materiais.

Para este segundo caso, o magnetismo é consequência do momento magnético de spin eletrônico, presente em materiais que possuem íons com elétrons desemparelhados. Em alguns destes materiais, a interação entre os momentos individuais gera um momento macroscópico quando o material é dito orientado. Com estes materiais são confeccionados ímãs permanentes.

Quando a interação é muito fraca ou inexistente, não há ordenamento magnético.^[1]

Definição do Campo \vec{B}

Para determinarmos um campo elétrico \vec{E} colocamos uma partícula de prova com carga q em um ponto qualquer do espaço e medimos a força \vec{F}_E que este campo faz sobre ela. Assim, podemos medir o campo elétrico através da relação:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_E}{q} \quad (1.0)$$

Como não possuímos um monopolo magnético, não podemos definir de forma análoga o campo \vec{B} . No entanto, observou-se experimentalmente que uma corrente elétrica forte poderia alterar a orientação de uma bússola, que foi associado ao efeito de um campo magnético gerado por esta corrente. Posteriormente, uma partícula movimente-se ao longo desse campo magnético com uma velocidade \vec{V} sofrerá uma força magnética, \vec{F}_B , caso \vec{V} e \vec{B} não sejam paralelos ou antiparalelos entre si. Sabemos que a direção de \vec{F}_B é sempre perpendicular à direção da velocidade, o que sugere que

esta seja resultado de um produto vetorial entre a velocidade e o campo magnético. Desta forma, medimos o campo magnético \vec{B} :

$$\vec{B} = \frac{\vec{F}_B}{q\vec{v}}$$

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (1.1)$$

$$\vec{F}_B = qvB \sin\theta \quad (1.2)$$

Onde θ é o ângulo entre a velocidade da partícula de carga q , e o campo magnético. A direção da força pode ser facilmente encontrada pela regra da mão direita conforme a figura 1:

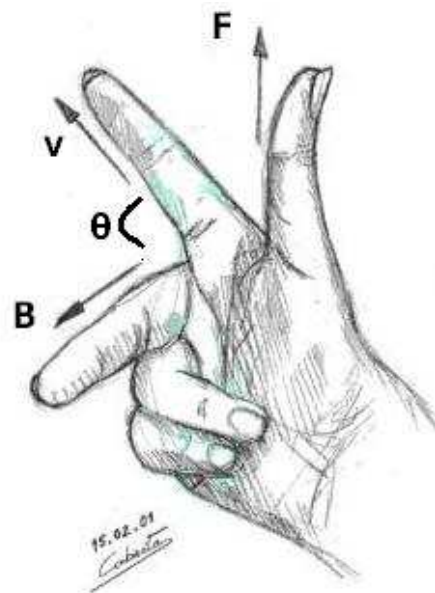


Figura 1: Regra da mão direita para determinar a direção da força magnética.

Fluxo Magnético

De acordo com a figura 2 abaixo, o fluxo magnético (Φ) através da superfície fechada, S , cujo vetor de área \vec{A} é dado por $\vec{A} = \hat{n} A$ é definido por:

$$\Phi = \oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS \quad (1.3)$$

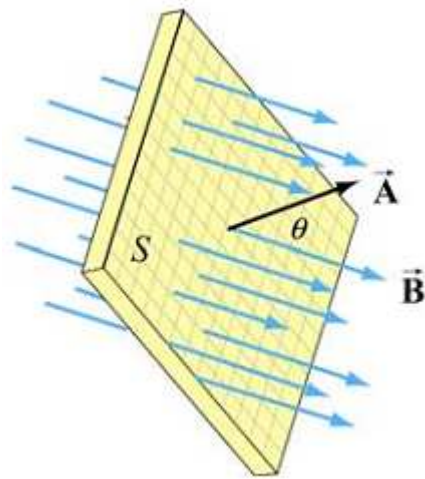


Figura 2: Fluxo de \vec{B} através de uma superfície S

Como já sabemos, não existem cargas magnéticas (monopólos magnéticos) e fazendo uma analogia com a lei de Gauss¹ para o caso elétrico, temos que, para essa superfície S:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (1.4)$$

Sendo V o volume contido na superfície S, usando o teorema da divergência temos:

$$\oint_S \vec{\nabla} \cdot \vec{B} dV = 0 \quad (1.5)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.6)$$

Com isso, já temos uma das equações de Maxwell², que representa uma das propriedades fundamentais do campo \vec{B} , em que as linhas de força magnética são sempre fechadas. O fluxo magnético tem como unidade de 1 Wb (Weber)^[1].

² James Clerk Maxwell (13/06/1831 - 05/11/1879) foi Físico e Matemático britânico. Conhecido por finalizar a teoria moderna do eletromagnetismo, unindo eletricidade, magnetismo e óptica demonstrando que a luz é uma onda eletromagnética que alguns anos a frente serviu de base para a teoria da relatividade, teve trabalhos importantes em mecânica estatística servindo como uma das bases da mecânica quântica.

³ Johann Carl Friedrich Gauss (30/04/1777 - 23/02/1855) foi Matemático, Astrônomo e Físico alemão, aprendeu a ler e escrever sozinho, aos dez anos demonstrou a fórmula da soma de uma progressão aritmética. Iniciou os estudos de análise matemática ainda jovem ultrapassando seus antecessores, aos dezoito anos inventou o método dos mínimos quadrados, descobriu através de cálculos o planeta Ceres, assentou os fundamentos da teoria matemática do eletromagnetismo e inventou o telégrafo elétrico.

$$1T = 1 \frac{Wb}{m^2}$$

Indução eletromagnética

Se inserimos uma espira C num campo magnético \vec{B} , conforme mostrado na figura 3 abaixo, teremos que o fluxo através dessa espira será:

$$\Phi = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (1.7)$$

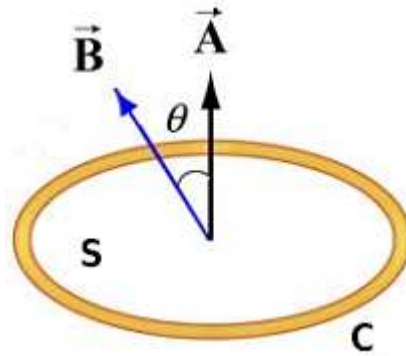


Figura 3: espira imersa num campo magnético \vec{B} , com ângulo θ entre \vec{A} e \vec{B} .

De acordo com a lei de Faraday¹, temos:.

“A corrente elétrica induzida pelo campo magnético em um circuito fechado (espira C), é proporcional ao número de linhas do fluxo que atravessa a área envolvida do circuito, por unidade de tempo”.

de fato, a fem induzida na espira é igual à variação no tempo do fluxo magnético através da espira

¹ Michael Faraday (22/09/1791 - 25/08/1867) foi Físico e Químico britânico, considerado um dos cientistas mais influentes de todos os tempos, teve contribuições importantes para a eletricidade e magnetismo e para a química. Foi um grande experimentalista não tinha conhecimentos profundos de matemática avançada, porém suas contribuições são de grande impacto, suas descobertas serviram de base para o trabalho de grandes industriais e engenheiros como Edison, Siemens, Tesla e Westinghouse tornando possível a eletrificação de nossa sociedade atual. Na química descobriu o benzeno, produziu os primeiros cloretos de carbono, e contribuiu para a metalurgia e a metalografia.

$$\epsilon = Ri = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (1.8)$$

mas

$$\epsilon = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (1.9)$$

então

$$\epsilon = -\frac{d}{dt} \Phi_B = -\oint E dl \quad (1.10)$$

Temos então:

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} &= \int_S \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{A} \\ \int_C \text{rot} \vec{E} da &= -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{A} \end{aligned} \quad (1.11)$$

e portanto,

Podemos assim dizer que, $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ que é outra das equações de Maxwell. onde E, neste caso, não corresponde ao campo eletrostático.

A variação do fluxo Φ_B pode ser pela movimentação da espira ou pela variação do campo magnético no tempo.

O sinal de menos nas equações que aparece na lei de indução é devido à lei de Lenz¹.

“A corrente induzida em uma espira tem um sentido tal que o campo magnético produzido pela corrente se opõe à variação do fluxo magnético que induz a corrente”.

¹ Heinrich Friedrich Emil Lenz (12/02/1804 - 10/02/1865) foi Físico alemão, estudou Química e Física, fez três expedições em volta do mundo, onde em uma dela estudou as propriedades físicas da água do mar, ganhou fama a formular sua lei em 1833 e a lei de Joule em 1842. Pesquisou condutividade elétrica de vários materiais, o efeito da temperatura sobre a condutividade, descobriu a reversibilidade das máquinas elétricas.

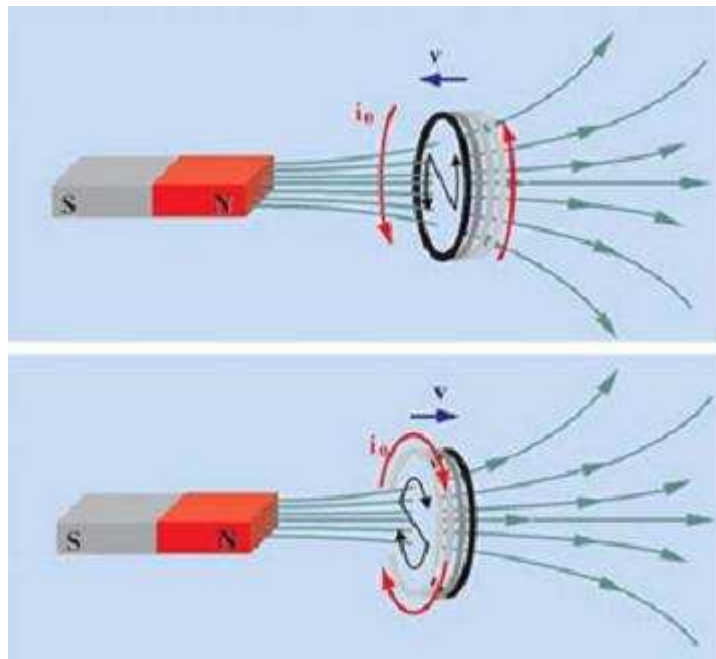


Figura 4: sentido das correntes induzidas pela variação de fluxo

Estas correntes induzidas produzem seus próprios campos magnéticos, cuja direção é normal à superfície^{[1], [2]}. A lei de Lenz está diretamente vinculada ao princípio de conservação de energia.

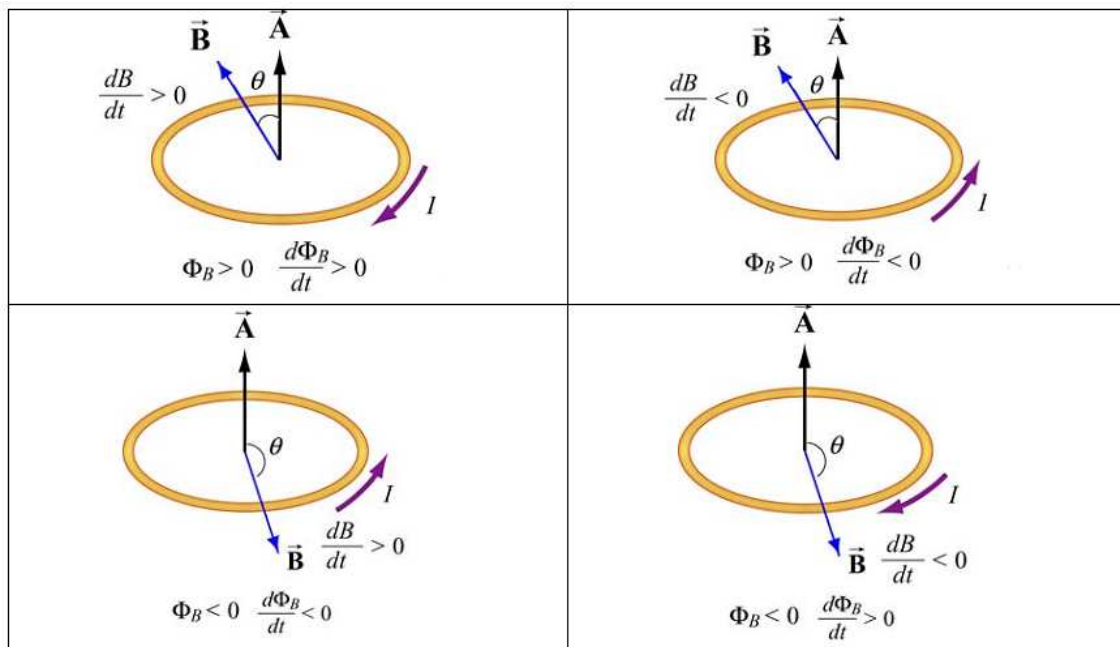


Figura 5: Direção das correntes induzidas usando a lei de Lenz

Correntes de Foucault

Se um ímã é solto em queda livre dentro de um tubo de material condutor, a corrente elétrica induzida na superfície do tubo, criará sobre o ímã uma força magnética que se opõe ao movimento de queda.

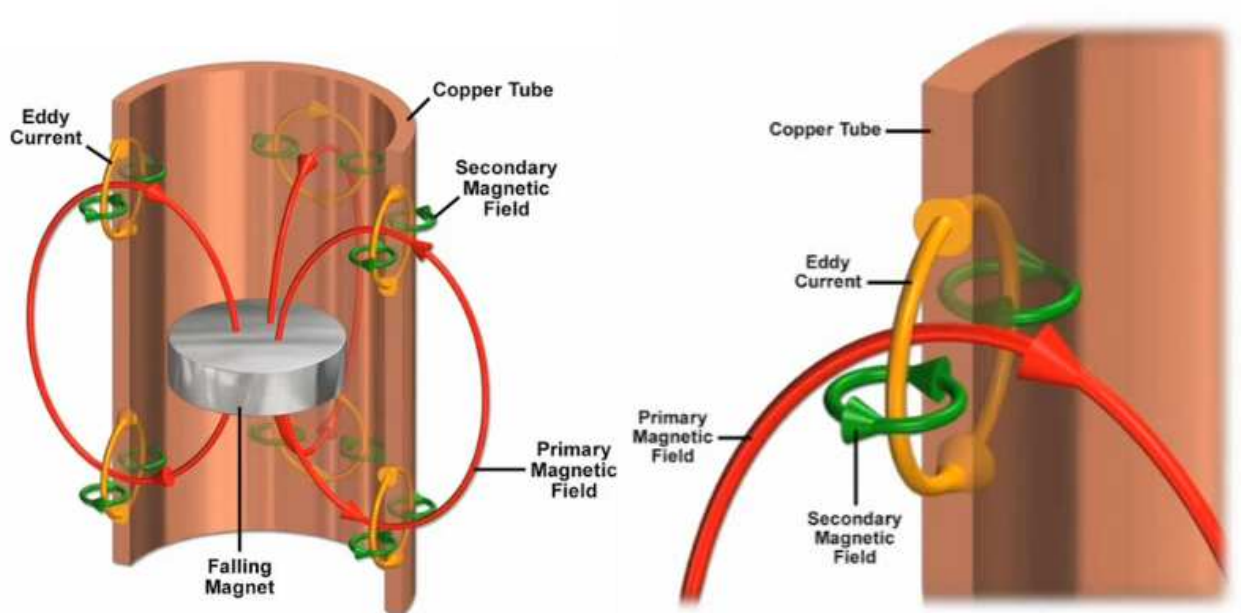


Figura 6: corrente de Foucault induzidas pela queda do ímã dentro do tubo, gerando os campos induzidos.

Podemos também pensar em um pêndulo constituído de um material condutor, posto a oscilar numa região de campo magnético, conforme figura 7 abaixo:

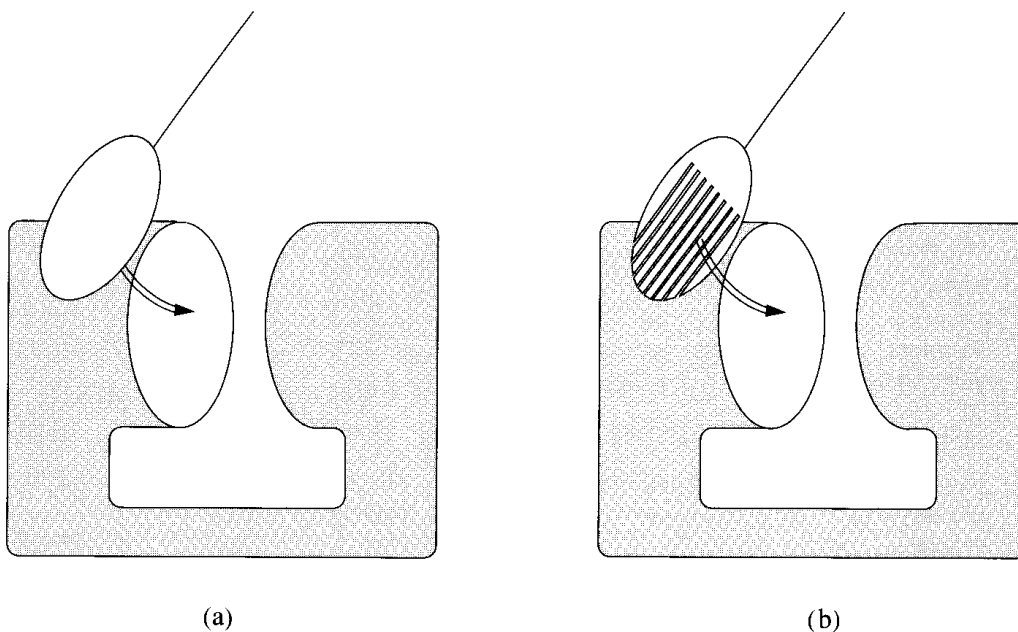


Figura 7: Pendulos de material condutor entrando em região de campo magnético.

A figura 7a mostra um pendulo entrando na região dos pólos de um imã. No disco metálico aparecerão correntes, cujos sentidos são especificados pela lei de Lenz. As forças magnéticas proporcionadas por essas correntes (correntes de Foucault) são equivalentes a uma força de atrito viscoso. Se quisermos reduzir este efeito, basta fazermos uma série de fendas como figura 7b. Com isso, reduzimos muito o fluxo nas partes metálicas e obrigamos cada corrente a percorrer um caminho mais longo, aumentando a resistência e diminuindo a intensidade das correntes induzidas. Conseqüentemente, diminuímos a força magnética proporcionada.

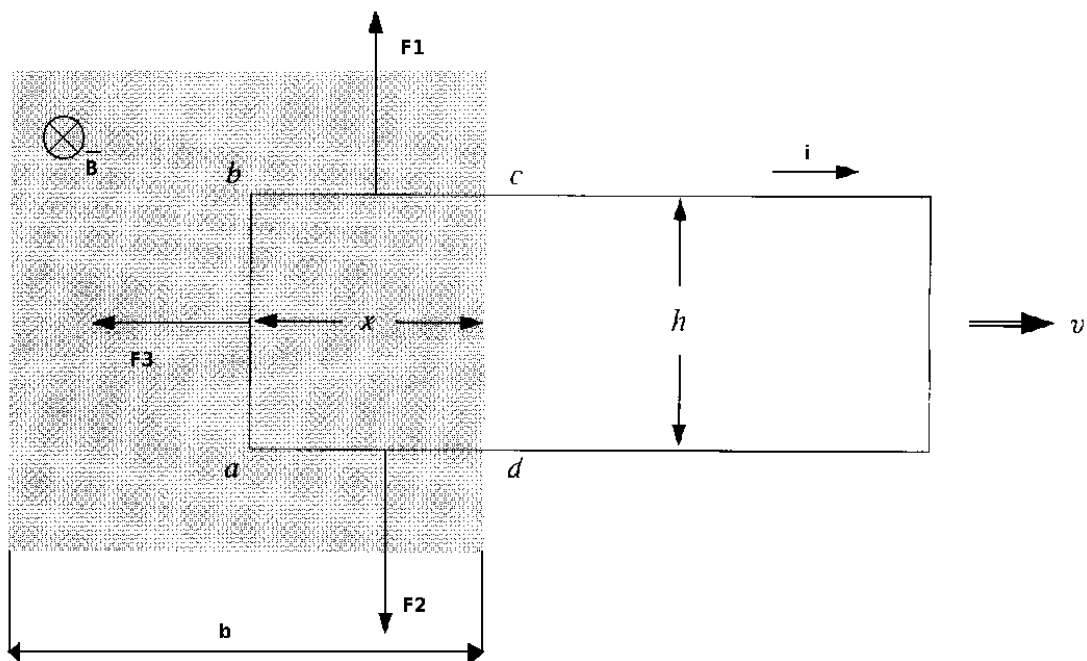


Figura 8: Espira retangular com velocidade v passando sobre um campo \vec{B} entrando no plano do papel.

Vamos estudar um caso simples que servirá de base para as equações que dominam o projeto. Uma espira retangular com largura h está parcialmente imersa em um campo magnético uniforme \vec{B} , que entra no plano do papel. Portanto é perpendicular ao plano da espira. Esta espira é movida com velocidade v para isto é preciso dar uma força \vec{F} constante para esta locomoção parte da espira que esta sobre a ação do campo diminui e por conseqüência o fluxo também diminui, e de acordo com a lei de Faraday uma corrente é induzida.

Para determinar esta corrente usamos da equação (1.8) para o calculo deste fluxo.

$$\Phi_B = BA = Bhx$$

Quando diminuimos x o fluxo também diminui e de acordo com a equação (1.9) temos.

$$\epsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{d}{dt}Bhx = Bh\frac{dx}{dt} = Bhv$$

$$\epsilon = Ri = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Assim podemos obter a corrente induzida no circuito.

$$i = -\frac{Bhv}{R}$$

Observando a figura temos três forças para a parte de espira imersa no campo por simetria as forças \vec{F}_1 e \vec{F}_2 se anulam sobrando somente a força \vec{F}_3 . De acordo com a equação (1.1).

$$\vec{F}_3 = i\vec{h} \times \vec{B}$$

Como o ângulo entre o campo e h é 90°

$$\vec{F}_3 = ihB$$

$$\vec{F}_3 = \frac{B^2h^2v}{R}$$

Podemos também calcular o trabalho para isto usamos a relação $P = Fv$ e obtemos:^[3]

$$P = \frac{\vec{B}^2h^2\vec{v}^2}{R}$$

Material Diamagnético

Para o cálculo da susceptibilidade diamagnética para um agrupamento de átomos, é importante que se conheça sobre o movimento eletrônico de cada átomo. Para o nosso modelo se tornar simples vamos considerar a órbita dos elétrons em torno do átomo como circular de raio r em um plano de tal forma que tenha ângulos retos com o campo magnético aplicado.

Antes de aplicarmos o campo magnético o elétron está em equilíbrio em sua órbita:

$$F_E = m_e \omega_0 r \quad (1.12)$$

\vec{F}_E é a força elétrica que age sobre o elétron e m_e e ω_0 é a massa e a frequência angular do elétrons respectivamente.

Quando aplicamos o campo uma força adicional é dada ao elétron $-ev \times B = -e\omega r \times B$, vamos supor que o elétron permaneça na mesma órbita temos:

$$F_E \pm e\omega r B_m = m_e \omega^2 r \quad (1.13)$$

Quando combinamos com a equação (1.14) e assumindo que o raio da órbita é fixo, obtemos:

$$\pm e\omega B_m = m_e (\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0) \quad (1.14)$$

$(\omega - \omega_0) = \Delta\omega$ É a variação na frequência angular do elétron. Ou seja, o elétron acelera ou diminui a velocidade em sua órbita, e este movimento possui um momento que chamamos de momento magnético orbital e sua variação será sempre no sentido oposto ao campo aplicado.

$$\Delta\omega = \pm \frac{e}{2m_e} B_m \quad (1.15)$$

Quando o campo é aplicado há uma variação de fluxo através da órbita do elétron considerando-as como espiras temos $\Phi_B = \pi r^2 \Delta B_m$. Este fluxo passa por Δn espiras eletrônicas, Δn é o número de revoluções que o elétron faz no tempo em que o campo varia. Este fluxo variável produz um fem de acordo com a lei de Faraday.

$$\epsilon = \pi r^2 \frac{dB_m}{dt} \Delta n = \pi r^2 \frac{dn}{dt} \Delta B_m \quad (1.16)$$

A energia dada ao elétron neste processo é ϵe , que aparece como uma variação de energia cinética. Dando o mesmo resultado da equação (1.17), o que mostra que a nossa simplificação não esta errada.

A variação da velocidade angular produz uma variação no momento magnético.

$$\Delta \vec{m} = -\frac{e}{2\pi} \pi r^2 \frac{e}{2m_e} \vec{B}_m = -\frac{e^2}{4m_e} r^2 \mu_0 \vec{H}_m \quad (1.17)$$

Para termos a magnetização devemos somar todos os elétrons de um volume unitário. Para uma substância contendo N moléculas por unidade de volume.

$$\vec{M} = -\frac{Ne^2\mu_0}{4m_e}\vec{H}_m\sum_i r_i^2 \quad (1.18)$$

Para os materiais Diamagnéticos, \vec{H}_m é ligeiramente diferente de \vec{H} , assim temos a susceptibilidade diamagnética.

$$\chi = -\frac{Ne^2\mu_0}{4m_e}\sum_i r_i^2 \quad (1.19)$$

Quando há uma inclinação da orbita de θ com o campo.

$$\chi_m = -\frac{Ne^2\mu_0}{4m_e}\sum_i r_i^2 \cos^2 \theta_i \quad (1.20)$$

O diamagnetismo está presente em todos os materiais, entretanto este efeito é sobrepujado pelo comportamento paramagnético ou ferromagnético que são mais intensos. [4]

Levitação ou Quase-Levitação?

Quando dois ímãs estão próximos, com os pólos iguais voltados para si, eles se repelem. Earnshaw em 1842 estudando este comportamento chegou a um teorema onde dizia “*É impossível realizar levitação estática de objetos usando qualquer que seja a combinação de ímãs permanentes*”. Entretanto este teorema possui algumas exceções como é o caso dos materiais diamagnéticos.

Suponha que esta força estática $\vec{F}(z)$ que esta agindo sobre o corpo pode ser definida em função da posição z somente., Para haver equilíbrio entre a força magnética e a gravidade no ponto de equilíbrio estas forças devem se anular e se este equilíbrio for estável, a força tem o divergente nulo para o ponto de equilíbrio. Vamos considerar uma esfera em torno deste ponto e, pelo teorema de Gauss.

$$\int_V \text{grad } \vec{F} dV = \oint_S \vec{F}(z) d\vec{A}$$

Então, a integral da força deve ser nula, implicando que $F(z)$ é constante, o que não é verdade.

Este teorema é aplicado também é para corpos extensos que podem ser flexíveis e condutores, a exceção é dada aos materiais diamagnéticos. [5]

Para um caso simples vamos mostrar esta exceção. As equações (1.21) e (1.22) dão o tamanho do campo magnético induzido é o que chamamos de suscetibilidade magnética χ que pode ser também definida pela magnetização induzida $\vec{M} = \frac{\chi}{\mu_0} V \vec{B}$ onde

\vec{B} é o Campo magnético externo e V é o volume do material e μ_0 é a permeabilidade magnética no vácuo. Para os materiais diamagnéticos $\chi < 0$, onde pela lei de Lenz nos diz que o campo induzido tem direção contrária ao campo externo aplicado, diferente do que ocorre para materiais paramagnéticos e ferromagnéticos onde $\chi > 0$.

Tomando somente o eixo z para nosso estudo temos que a energia potencial do conjunto é.

$$U = \rho V g z - \frac{\vec{M} \vec{B}}{2} = \rho V g z - \frac{\chi V}{2 \mu_0} \vec{B}^2 \quad (1.21)$$

Onde g é a aceleração da gravidade, ρ é densidade do material e z é a altura do corpo. Para que a levitação seja estável temos que ter uma condição de equilíbrio onde a força tem de ser nula.

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U = -\rho V g dz + \frac{\chi V}{2 \mu_0} \vec{\nabla} \vec{B}^2 = 0 \quad (1.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\chi V}{2 \mu_0} \vec{\nabla} \vec{B}^2 &= \rho V g dz \\ \vec{B} \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} &= \frac{\mu_0 \rho g}{\chi} \end{aligned} \quad (1.23)$$

O campo precisa ser não homogêneo (em materiais diamagnéticos o campo deve diminuir de intensidade em razão inversa à distância). Para que este equilíbrio seja estável a força da equação (1.24) deve ser uma força restauradora $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} < 0$.

$$\frac{\chi V}{2\mu_0} = \vec{\nabla}^2 \vec{B}^2 < 0 \quad (1.24)$$

Como já foi discutido não existe monopolos magnéticos $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$. A equação (1.26) implica que χ deva ser menor que zero, ou seja, a levitação magnética pode ocorrer para materiais diamagnéticos.

Esta exceção ao teorema de Earnshaw se dá que nos materiais diamagnéticos a característica é o movimento dos elétrons em torno do núcleo, portanto não há uma configuração fixa. ^{[5] [6]}

Com isto temos a resposta a nossa pergunta, para o nosso caso o correto é Levitação magnética.

Projeto

Materiais utilizados.

Um dos objetivos principais é a utilização de materiais de baixo custo dando preferências a sucatas e materiais alternativos. Para o projeto utilizamos:

- Ímãs de Neodímio com diâmetro 10 mm
- Dois tubos de cobre com 3 cm de diâmetro por 33 cm de comprimento
- 4 rolamentos ABEC 7 com diâmetro interno de 8 mm
- Chapa de acrílico com as dimensões 50X50X1 cm
- Motor de liquidificador comprado em sucateiros
- Tarugo de alumínio de 50 mm de diâmetro por 100 mm de comprimento
- Tarugo de alumínio de 28 mm de diâmetro por 150 mm de comprimento

Montagem

O primeiro passo fundamental é a confecção dos dispositivos para acoplar os tubos aos rolamentos e os mancais. Eles são as peças fundamentais em nosso sistema girante.



Figura 9: Mancais e Buchas, dispositivos para acoplamento dos tubos de cobre



Figura 10: Tubos de cobre rolamentos e rolamentos acoplados nas buchas.

Após ficarem prontos os mancais e as buchas, acoplamos os tubos, um problema inicial que tivemos era a transmissão do giro de um tubo ao outro, uma das alternativas era usinar duas engrenagens o que levaria muito tempo e material. Uma alternativa melhor empregada foi vestir uma das pontas do tubo com um anel de borracha desta forma por atrito transmitiríamos o movimento efetivando nosso objetivo.

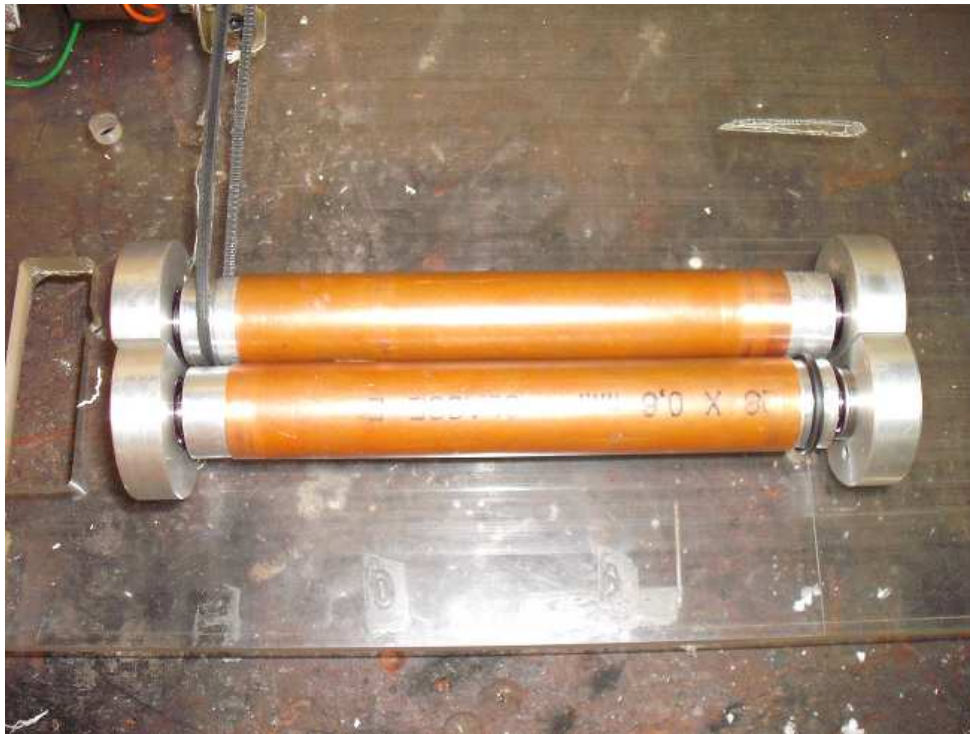


Figura 11: Sistema tubos e Mancais observe o tubo com anel de borracha responsável pela transmissão do movimento

O giro destes tubos deve ser feito com o trabalho de algum mecanismo, que poderia ser manual, porém não atingiríamos a velocidade angular necessária. Então utilizamos de um motor utilizado em liquidificador, este motor foi comprado por um valor irrisório em sucateiros, este motor possui a seleção de velocidades o que se torna muito interessante, pois podemos demonstrar a dependência da força induzida com a velocidade angular do cilindro.



Figura 12: Motor elétrico, utilizado para o trabalho de giro dos cilindros.

Para o suporte deste aparato experimental poderíamos utilizar de diversos materiais, tais como madeira ou chapas de metal. Um material que estava disponível e daria uma melhor estética ao trabalho foi uma chapa de acrílico com as especificações já dadas acima.



Figura 13: Esféricas de NdFeB com diâmetro de 10 mm usadas para o experimento

Com todos os elementos já prontos foi possível montar todos os componentes sobre a chapa de acrílico, dando fim as montagens e iniciando a fase de testes.

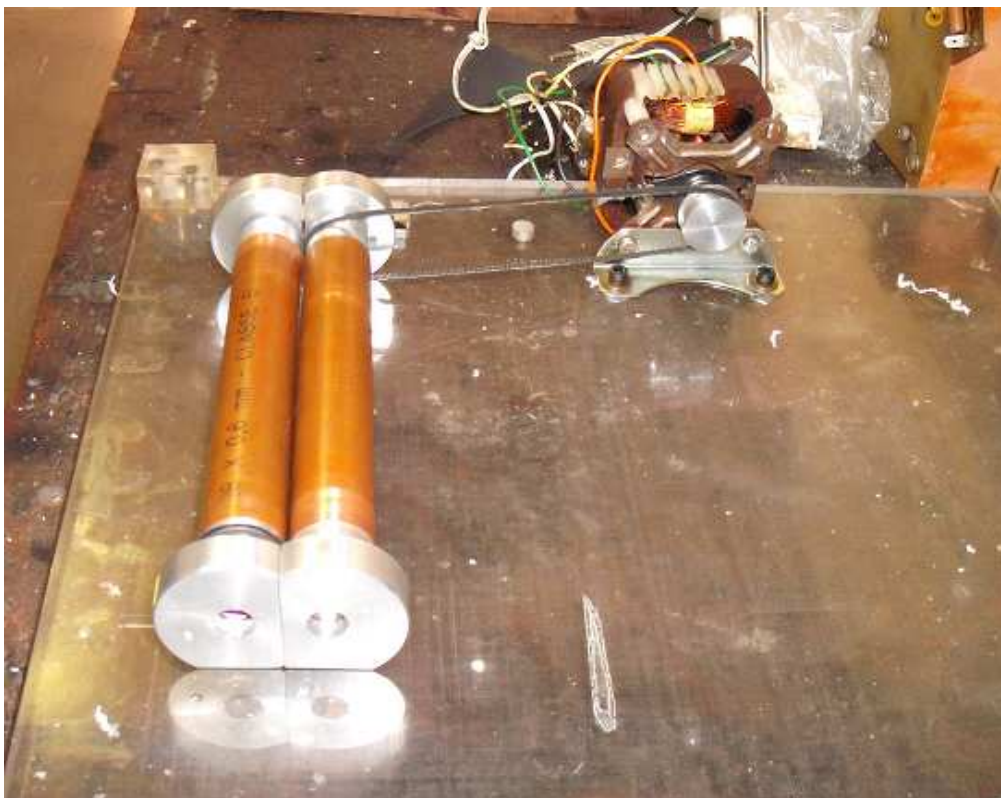


Figura 13: Dispositivo montado.

Equações de Força

Em nosso sistema quando, para simplificar os cálculos vamos considerar apenas um dos cilindros, vamos considerar uma superfície retangular sobre o cilindro o fluxo magnético que atravessa essa área é dado pela equação (1.4), assim temos.

$$\Phi_B = BA \cos \theta \quad (1.25)$$

Para derivarmos este fluxo devemos considerar-lo como função do campo, da área e do ângulo entre o campo e a normal da área, $\Phi_B = \Phi(\vec{B}, A, \theta)$.

Vamos inicialmente definir a diferencial exata deste fluxo diferenciando parcialmente temos:

$$d\Phi_B = \frac{\partial \Phi_B}{\partial |\vec{B}|} + \frac{\partial \Phi_B}{\partial A} + \frac{\partial \Phi_B}{\partial \theta}$$

Com isto temos o infinitesimal deste fluxo para o instante $t = t_0$, quando começamos a girar este infinitésimo no tempo $t = t_0 + dt$ temos a variação do fluxo por variação de tempo, como definimos na equação (1.10) para a força eletromotriz fem.

$$d\Phi_B = d\vec{B}A \cos \theta (-\hat{z}) + dA\vec{B} \cos \theta \hat{\alpha} - d\theta \vec{B}A \sin \theta \hat{\alpha}$$

$$\epsilon = Ri = -\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{d\vec{B}}{dt} A \cos \theta \hat{z} - \frac{dA}{dt} \vec{B} \cos \theta \hat{\alpha} + \frac{d\theta}{dt} \vec{B}A \sin \theta$$

$$i = \frac{dB}{dt} \frac{r\alpha h \cos \theta}{R} \hat{z} - \frac{\omega r h B \cos \theta}{R} \hat{\alpha} + \frac{\omega B r \alpha h \sin \theta}{R} \hat{\alpha}$$

Como o nosso corpo é cilindro a área $A = r\alpha h$ onde r é o raio do cilindro e h é o comprimento do lado do retângulo que escolhemos como área e esta orientada no sentido de $-\hat{x}$.

Em nosso sistema consideramos o equilíbrio de força, portanto a força que vamos calcular é a que age no cilindro, entretanto esta força possui a mesma intensidade na coordenada z equilibrando a força peso do imã.

Usando da equação (1.2) a expressão:

$$\vec{F} = i\vec{h} \times \vec{B}$$

Como h e \vec{B} são perpendiculares temos que $\vec{h} \times \vec{B} = hB \text{sen}90 = hB$.

Aplicando a corrente já calculada em $\vec{F} = ihB$ temos:

$$\vec{F} = \frac{rh^2 \cos \theta B}{R} \left(\frac{dB}{dt} \alpha \hat{z} - \omega B \hat{\alpha} \right) + \frac{\omega r \alpha B^2 h^2 \text{sen} \theta}{R} \hat{\alpha}$$

Podemos observar que $\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times E$, que é a forma diferencial da lei de

indução de Faraday, e corresponde a uma das equações de Maxwell. A interpretação física deste resultado é: Um campo magnético variável com o tempo produz um campo elétrico sendo este não mais eletrostático.

Sugestões do coordenador

O coordenador sugeriu no meio do semestre que fizesse a tentativa de quase-levitação. Foram tentativas errôneas foram feitas e algumas foram demonstradas por mim na sala do mesmo. Uma sugestão por email com uma semana e meia antes do termino do semestre foi posta. Não haveria tempo hábil para a confecção. Porem um pequeno estudo e foi feito sobre o dispositivo como segue abaixo.



Figura 13: brinquedo de quase-levitação comumente chamado de revolution.

Percebe-se claramente que este brinquedo possui um encosto, ele possui em seu corpo e em sua base ímãs permanentes. Neste caso encosto é necessário para este sistema o Teorema de Earnshaw é aplicado, não podendo haver o fenômeno de levitação.



Figura 14: Marcações dos pólos dos ímãs

Observe que os pólos norte e sul estão voltados para os pólos também norte e sul do brinquedo. Para ele diferentemente do projeto acima descrito não há o fenômeno de variação de fluxo, nem de correntes induzidas.

Neste brinquedo o fenômeno aplicado é somente a ação de forças repulsivas, Os ímãs da base devem ter força repulsiva de intensidade tal, que equilibre a força peso do brinquedo. O aparato transparente que observamos serve justamente para bloquear a saída do objeto para fora da base.

Estas forças repulsivas não são estáveis não se equilibrando para todos os lados por este motivo há a necessidade deste aparato.

Esta suposta levitação só é possível pelo giro do brinquedo, o tempo que ele permanece em quase-levitação o principal fenômeno aplicado é a conservação de momento angular.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}$$

Este momento angular pode ser expresso por meio da velocidade angular e o momento de inércia do brinquedo, os cálculos deste momento de inércia para este brinquedo seriam muito complicado pelo fato de sua geometria. [7] [8]

$$\vec{L} = \omega \vec{I}$$

Comentários do Orientador e Co-orientador

O meu orientador realizou os seguintes comentários:

O projeto é interessante e mostra aspectos do magnetismo mais complicados de se equacionar matematicamente. O efeito básico que se observa são as correntes induzidas em um condutor que contrabalançam o peso do imã. O aluno se empenhou bastante em realizar este projeto, mas que foi parcialmente prejudicado pela demora na usinagem de peças.

O meu Co-orientador realizou os seguintes comentários

O projeto do aluno é bastante interessante e motiva uma rica discussão da teoria eletromagnética, possibilitando um aprendizado aprofundado, por exemplo, da indução de Faraday, lei de Lenz, correntes de Foucault, etc. O aluno mostrou-se bastante empolgado com o projeto e apresentou uma desenvoltura singular. Alguns contratempos prejudicaram a finalização do projeto num tempo mais curto, como por exemplo, a confecção do protótipo (falta de tempo de máquina para usinagem das peças), que não dependia exclusivamente do aluno.

Conclusões

O objetivo principal do projeto era aplicar parte da teoria eletromagnética, de forma mais didática, na tentativa de preencher algumas lacunas com certo êxito alcançada. As equações para a força no cilindro girante foram encontradas.

Consegui-se com o embasamento teórico em livros e artigos mostrar as exceções para o teorema de Earnshaw.

A exemplificação para o sistema sugerida pelo coordenador foi posta em discussão para futuros alunos desta disciplina.

Referências

- [1] – H. Moysés Nussenzveig. 3 Eletromagnetismo, curso de física básica
- [2] – David J. Griffiths. Introduction to Electrodynamics
- [3] – Halliday Resnick walker. 3 eletromagnetismo, fundamentos da física
- [4] – John R. Reitz. Fundamentos da teoria eletromagnética.
- [5] – Diamagnetically stabilized magnet levitation. M. D. Simon – L.O.Heflinger – A.K.Geim
aceito em 05/04/2001
- [6] – Levitação magnética. Humberto de Andrade Carmona, Universidade Estadual do Ceará, Campus do Itaperi
- [7] - <http://www.profisica.cl/comofuncionan/como.php?id=23>,
- [8] - Halliday resnick Walker. 1 Mecânica, fundamentos da física

Diamagnetically stabilized magnet levitation

M. D. Simon^{a)}

Department of Physics and Astronomy, University of California, Los Angeles, California 90095

L. O. Heflinger

5001 Paseo de Pablo, Torrance, California 90505

A. K. Geim

Department of Physics and Astronomy, University of Manchester, Manchester, United Kingdom^{b)}

(Received 13 November 2000; accepted 5 April 2001)

Stable levitation of one magnet by another with no energy input is usually prohibited by Earnshaw's theorem. However, the introduction of diamagnetic material at special locations can stabilize such levitation. A magnet can even be stably suspended between (diamagnetic) fingertips. A very simple, surprisingly stable room temperature magnet levitation device is described that works without superconductors and requires absolutely no energy input. Our theory derives the magnetic field conditions necessary for stable levitation in these cases and predicts experimental measurements of the forces remarkably well. New levitation configurations are described which can be stabilized with hollow cylinders of diamagnetic material. Measurements are presented of the diamagnetic properties of several samples of bismuth and graphite. © 2001 American Association of Physics Teachers.

[DOI: 10.1119/1.1375157]

I. DIAMAGNETIC MATERIALS

Most substances are weakly diamagnetic and the tiny forces associated with this property make two types of levitation possible. Diamagnetic materials, including water, protein, carbon, DNA, plastic, wood, and many other common materials, develop persistent atomic or molecular currents which oppose externally applied magnetic fields. Bismuth and graphite are the elements with the strongest diamagnetism, about 20 times greater than water. Even for these elements, the magnetic susceptibility χ is exceedingly small, $\chi \approx -170 \times 10^{-6}$.

In the presence of powerful magnets the tiny forces involved are sufficient to levitate chunks of diamagnetic materials. Living things mostly consist of diamagnetic molecules (such as water and proteins) and components (such as bones). Contrary to our intuition, these apparently nonmagnetic substances, including living plants and small animals, can be levitated in a magnetic field.^{1,2}

Diamagnetic materials can also stabilize free levitation of a permanent magnet, which is the main subject of this paper. This approach can be used to make very stable permanent magnet levitators that work at room temperature without superconductors and without energy input. Recently, levitation of a permanent magnet stabilized by the diamagnetism of human fingers ($\chi \approx -10^{-5}$) was demonstrated at the High Field Magnet Lab in Nijmegen, The Netherlands (Fig. 1).^{3,4}

While the approximate magnitude of the diamagnetic effect can be derived from simple classical arguments about electron orbits, diamagnetism is impossible within classical physics. The Bohr–Leeuwen theorem states that no properties of a classical system in thermal equilibrium can depend in any way on the magnetic field.^{5,6} In a classical system, at thermal equilibrium the magnetization must always vanish. Diamagnetism is a macroscopic manifestation of quantum physics that persists at high temperatures, $kT \gg \mu_{\text{Bohr}} B$.

II. EARNSHAW'S THEOREM

Those who have studied levitation, charged particle traps, or magnetic field design for focusing magnets have probably

run across Earnshaw's theorem and its consequences. There can be no purely electrostatic levitator or particle trap. If a magnetic field is focusing in one direction, it must be defocusing in some orthogonal direction. As students, most of us are asked to prove the electrostatic version which goes something like this: Prove that there is no configuration of fixed charges and/or voltages on fixed surfaces such that a test charge placed somewhere in free space will be in stable equilibrium. It is easy to extend this proof to include electric and magnetic dipoles.

It is useful to review what Earnshaw proved and the consequences for physics. As can be seen from the title of Earnshaw's paper,⁷ "On the nature of the molecular forces which regulate the constitution of the luminiferous ether," he was working on one of the frontier physics problems of his time (1842). Earnshaw wrote before Maxwell's work, before atoms were known to be made up of smaller particles, and before the discovery of the electron. Scientists were trying to figure out how the ether stayed uniformly spread out (some type of repulsion) and how it could isotropically propagate the light disturbance.

Earnshaw discovered something simple and profound. Particles in the ether could have no stable equilibrium position if they interacted by any type or combination of $1/r^2$ forces. Most of the forces known such as gravity, electrostatics, and magnetism are $1/r^2$ forces. Without a stable equilibrium position (and restoring forces in all directions), ether particles could not isotropically propagate wavelike disturbances. Earnshaw concluded that the ether particles interacted by other than $1/r^2$ forces. Earnshaw's paper torpedoed many of the popular ether theories of his time.

Earnshaw's theorem depends on a mathematical property of the $1/r$ -type energy potential. The Laplacian of any sum of $1/r$ -type potentials is zero, or $\nabla^2 \sum k_i / r = 0$. This means that at any point where there is force balance ($-\nabla \sum k_i / r = 0$), the equilibrium is unstable because there can be no local minimum in the potential energy. Instead of a minimum in

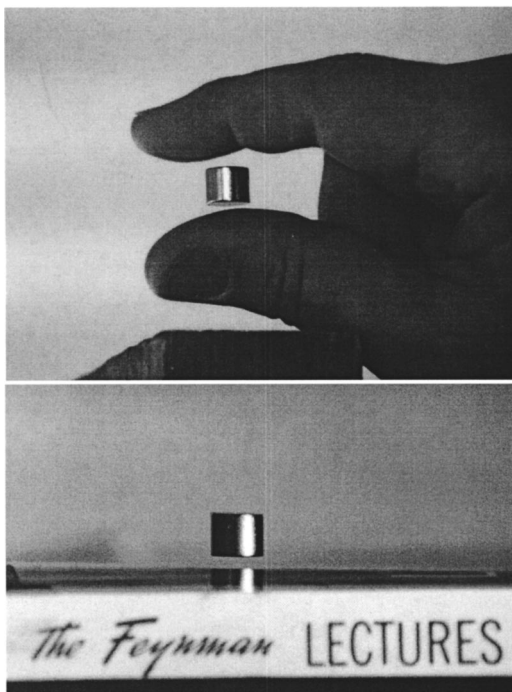


Fig. 1. (Top) Levitation of a magnet 2.5 m below an unseen 11-T superconducting solenoid stabilized by the diamagnetism of fingers ($\chi \approx 10^{-5}$). (Bottom) Demonstrating the diamagnetism of our favorite text explaining diamagnetism.

three dimensions, the energy potential surface is a saddle. If the equilibrium is stable in one direction, it is unstable in an orthogonal direction.

Since many of the forces of nature are $1/r^2$ forces, the consequences of Earnshaw's theorem go beyond the nature of the ether. Earnshaw understood this himself and writes that he could have titled his paper "An Investigation of the Nature of the Molecular Forces which Regulate the Internal Constitution of Bodies." We can be sure that when J. J. Thomson discovered the electron 55 years later, he considered Earnshaw's theorem when he proposed the plum pudding model of atoms. Thomson's static model avoided $1/r^2$ forces by embedding the electrons in a uniform positive charge. In this case the energy obeys Poisson's equation rather than Laplace's. Rutherford's scattering experiments with Geiger and Marsden in 1910 soon showed that the positive charge was concentrated in a small massive nucleus and the problem of atomic structure was not solved until Bohr and quantum mechanics.

Earnshaw's theorem applies to a test particle, charged and/or a magnet, located at some position in free space with only divergence- and curl-free fields. No combination of electrostatic, magnetostatic, or static gravitational forces can create the three-dimensional potential well necessary for stable levitation in free space. The theorem also applies to any array of magnets or charges.

An equivalent way to look at the magnetic case is that the energy U of a magnetic dipole \mathbf{M} in a field \mathbf{B} is

$$U = -\mathbf{M} \cdot \mathbf{B} = -M_x B_x - M_y B_y - M_z B_z. \quad (1)$$

If \mathbf{M} is constant the energy depends only on the components of \mathbf{B} . However, for magnetostatic fields,

$$\nabla^2 \mathbf{B} = 0 \quad (2)$$

and the Laplacian of each component is zero in free space and so $\nabla^2 U = 0$ and there is no local energy minimum.

At first glance, any static magnetic levitation appears to contradict Earnshaw's theorem. There must be some loopholes though, because magnets above superconductors, the spinning magnet top, diamagnets including living things, and the magnet configurations to be described here do stably levitate.

III. BEYOND EARNSHAW

Earnshaw's theorem does not consider magnetic materials except for hard fixed magnets. Ferro- and paramagnetic substances align with the magnetic field and move toward field maxima. Likewise, dielectrics are attracted to electric field maxima. Since field maxima only occur at the sources of the field, levitation of paramagnets or dielectrics in free space is not possible. (An exception to this statement is when a paramagnet is made to behave like a diamagnet by placing it in a stronger paramagnetic fluid. Bubbles in a dielectric fluid act in a similar way. A second exception is when isolated local maxima are created by focusing an ac field as with laser tweezers.⁸)

Paramagnets and diamagnets are dynamic in the sense that their magnetization changes with the external field. Diamagnets are repelled by magnetic fields and attracted to field minima. Since local minima can exist in free space, levitation is possible for diamagnets. We showed above that there are no local minima for any vector component of the magnetic field. However there can be local minima of the field magnitude.

Soon after Faraday discovered diamagnetic substances, and only a few years after Earnshaw's theorem, Lord Kelvin showed theoretically that diamagnetic substances could levitate in a magnetic field.⁹ In this case the energy depends on $B^2 = \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}$ and the Laplacian of B^2 can be positive. In fact,^{1,8}

$$\nabla^2 B^2 \geq 0. \quad (3)$$

The key idea here and in the levitation schemes to follow, the way around Earnshaw's theorem, is that the energy is not linearly dependent on the individual components of \mathbf{B} . The energy is dependent on the magnitude B . Three-dimensional minima of individual components do not exist. For static fields, local maxima of the field magnitude cannot exist in free space away from the source of the field. However, local minima of the field magnitude can exist.

Braunbek¹⁰ exhaustively considered the problem of static levitation in 1939. His analysis allowed for materials with a dielectric constant ϵ and permeability μ different than 1. He showed that stable static levitation is possible only if materials with $\epsilon < 1$ or $\mu < 1$ are involved. Since he believed there are no materials with $\epsilon < 1$, he concluded that stable levitation is only possible with the use of diamagnetic materials.

Braunbek went further than predicting diamagnetic levitation. He figured out the necessary field configuration for stable levitation of a diamagnet and built an electromagnet which could levitate small specks of diamagnetic graphite and bismuth.¹⁰ With the advent of powerful 30-T magnets, even a blob of water can now be levitated.

Superconducting levitation, first achieved in 1947 by Arkadiev,¹¹ is consistent with Braunbek's theory because a superconductor acts like a perfect diamagnet with $\mu = 0$.

Table I. Values of the dimensionless susceptibility χ in SI units for some diamagnetic materials. The measurement method for the graphites is discussed in a later section.

Material	$-\chi(\times 10^{-6})$
Water	8.8
Gold	34
Bismuth metal	170
Graphite rod	160
Pyrolytic graphite \perp	450
Pyrolytic graphite \parallel	85

Flux pinning in Type II superconductors adds some complications and can lead to attractive as well as repulsive forces.

The only levitation that Braunbek missed is spin-stabilized magnetic levitation of a spinning magnet top over a magnet base, which was invented by Roy Harrigan.¹² Braunbek argued that if a system is unstable with respect to translation of the center of mass, it will be even more unstable if rotations are also allowed. This sounds reasonable but we now know that imparting an initial angular momentum to a magnetic top adds constraints which have the effect of stabilizing a system which would otherwise be translationally unstable.^{13,14} However, this system is no longer truly static though once set into motion, tops have been levitated for 50 h in high vacuum with no energy input.¹⁵

The angular momentum and precession keep the magnet top aligned antiparallel with the local magnetic field direction making the energy dependent only on the magnitude $|\mathbf{B}| = [\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}]^{1/2}$. Repelling spinning dipoles can be levitated near local field minima. Similar physics applies to magnetic gradient traps for neutral particles with a magnetic moment due to quantum spin.¹⁶ The diamagnetically stabilized floating magnets described below stay aligned with the local field direction and also depend only on the field magnitude.

IV. MAGNET LEVITATION WITH DIAMAGNETIC STABILIZATION

We know from Earnshaw's theorem that if we place a magnet in the field of a fixed lifter magnet where the magnetic force balances gravity and it is stable radially, it will be unstable vertically. Boerdijk (in 1956) used graphite below a suspended magnet to stabilize the levitation.¹⁷ Ponizovskii used pyrolytic graphite in a configuration similar to the vertically stabilized levitator described here.¹⁸ As seen in Table I, the best solid diamagnetic material is pyrolytic graphite which forms in layers and has an anisotropic susceptibility (and thermal conductivity). It has much higher susceptibility perpendicular to the sheets than parallel.

It is also possible to levitate a magnet at a location where it is stable vertically but unstable horizontally. In that case a hollow diamagnetic cylinder can be used to stabilize the horizontal motion.^{3,4}

The potential energy U of a floating magnet with dipole moment \mathbf{M} in the field of the lifter magnet is

$$U = -\mathbf{M} \cdot \mathbf{B} + mgz = -MB + mgz, \quad (4)$$

where mgz is the gravitational energy. The magnet will align with the local field direction because of magnetic torques and therefore the energy is only dependent on the magnitude of the magnetic field, not any field components.

Taking advantage of the irrotational and divergenceless nature of magnetostatic fields in free space and assuming cylindrical symmetry about the z axis, we can expand the field components as follows:

$$B_z = B_0 + B'z + \frac{1}{2}B''z^2 - \frac{1}{4}B'''(x^2 + y^2) + \dots, \quad (5)$$

$$B_x = -\frac{1}{2}B'x - \frac{1}{2}B''xz + \dots, \quad (6)$$

$$B_y = -\frac{1}{2}B'y - \frac{1}{2}B''yz + \dots,$$

where

$$B' = \frac{\partial B_z}{\partial z}, \quad B'' = \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} \quad (7)$$

and the derivatives are evaluated at the levitation point, $x = y = z = 0$. Converting to cylindrical polar coordinates, we have:

$$B_z = B_0 + B'z + \frac{1}{2}B''z^2 - \frac{1}{4}B'''r^2 + \dots, \quad (8)$$

$$B_r = -\frac{1}{2}B'r - \frac{1}{2}B''rz + \dots. \quad (9)$$

Then

$$B^2 = B_0^2 + 2B_0B'z + \{B_0B'' + B'^2\}z^2 + \frac{1}{4}\{B'^2 - 2B_0B''\}r^2 + \dots, \quad (10)$$

where $r^2 = x^2 + y^2$.

Expanding the field magnitude of the lifter magnet around the levitation point using Eqs. (7)–(9) and adding two new terms $C_z z^2$ and $C_r r^2$ which represent the influence of diamagnets to be added and evaluated next, the potential energy of the floating magnet is

$$U = -M \left[B_0 + \left\{ B' - \frac{mg}{M} \right\} z + \frac{1}{2} B'' z^2 + \frac{1}{4} \left\{ \frac{B'^2}{2B_0} - B'' \right\} r^2 + \dots \right] + C_z z^2 + C_r r^2. \quad (11)$$

At the levitation point, the expression in the first curly braces must go to zero. The magnetic field gradient balances the force of gravity

$$B' = \frac{mg}{M}. \quad (12)$$

The conditions for vertical and horizontal stability are

$$K_v \equiv C_z - \frac{1}{2}MB'' > 0 \quad (\text{vertical stability}), \quad (13)$$

$$K_h \equiv C_r + \frac{1}{4}M \left\{ B'' - \frac{B'^2}{2B_0} \right\} = C_r + \frac{1}{4}M \left\{ B'' - \frac{m^2 g^2}{2M^2 B_0} \right\} > 0 \quad (\text{horizontal stability}). \quad (14)$$

Without the diamagnets, setting $C_r = 0$ and $C_z = 0$, we see that if $B'' < 0$ creating vertical stability, then the magnet is unstable in the horizontal plane. If the curvature is positive and large enough to create horizontal stability, then the magnet is unstable vertically.

We first consider the case where $B'' > 0$ and is large enough to create horizontal stability $K_h > 0$. The top of Fig. 2 shows plots of K_v and K_h for the case of a ring magnet lifter. The dashed line shows the effect of the C_z term. Where both curves are positive, stable levitation is possible if $MB' = mg$. It is possible to adjust the gradient or the weight of the floating magnet to match this condition.

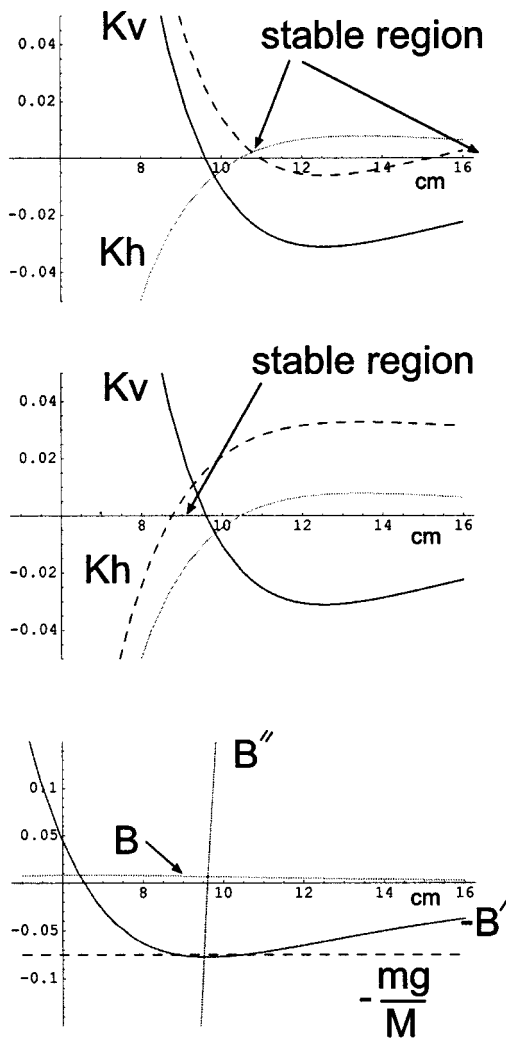


Fig. 2. (Top) Stability functions K_v and K_h for a ring lifter magnet with o.d. 16 cm and i.d. 10 cm. The x axis is the distance below the lifter magnet. The dashed line shows the effect of adding diamagnetic plates to stabilize the vertical motion. Levitation is stable where both K_v and K_h are positive. (Middle) The dashed line shows the effect of adding a diamagnetic material to stabilize the radial motion. (Bottom) Magnetic field (T), gradient (T/m), and curvature (T/m^2) of the lifting ring magnet. The dashed line is equal to $-mg/M$ of a NdFeB floater magnet. Where the dashed line intersects the gradient, there will be force balance. If force balance occurs in a stable region, levitation is possible.

We can see that there are two possible locations for stable levitation, one just below the field inflection point where B'' is zero and one far below the lifter magnet where the fields are asymptotically approaching zero. The upper position has a much stronger gradient than the lower position. The lower position requires less diamagnetism to raise K_v to a positive value and the stability conditions can be positive over a large range of gradients and a large spatial range. This is the location where fingertip stabilized levitation is possible. It is also the location where the magnet in the compact levitator of Fig. 4 floats.

The combined conditions for vertically stabilized levitation can be written

$$\frac{2C_z}{M} > B'' > \frac{1}{2B_0} \left(\frac{mg}{M} \right)^2. \quad (15)$$

C_z is proportional to the diamagnetic susceptibility and gets smaller if the gap between the magnet and diamagnet is increased. We can see that the largest gap, or use of weaker diamagnetic material, requires a large B field at the levitation position.

Here it is interesting to note that the inflection point is fixed by the geometry of the lifter magnet, not the strength of the magnet. The instability is related to the curvature of the lifter field and force balance depends on the gradient. That makes it feasible to engineer the location of the stable zones by adjusting the geometry of the lifter magnet and to control the gradient by adjusting the strength. With a solenoid, for example, the stable areas will be determined by the radius and length of the solenoid and the current can be adjusted to provide force balance at any location.

The middle plot in Fig. 2 shows that it is also possible to add a positive C_r to K_h where it turns negative to create a region where both K_v and K_h are positive, just above the inflection point. The bottom plot shows the lifter field, gradient, and curvature on the symmetry axis and the value of $-mg/M$ for a NdFeB floater magnet of the type typically used. (The minus sign is used because the abscissa is in the $-z$ direction. The plotted gradient is the negative of the desired gradient in the $+z$ direction.) Force balance occurs where the dashed line intersects the gradient curve.

V. EVALUATING THE C_z DIAMAGNETIC TERM

We assume a linear constitutive relation where the magnetization density is related to the applied \mathbf{H} field by the magnetic susceptibility χ , where χ is negative for a diamagnetic substance.

The magnetic induction \mathbf{B} inside the material is

$$\mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi)\mathbf{H} = \mu_0\mu\mathbf{H} \quad (16)$$

where χ , the susceptibility, and μ , the relative permeability, are scalars if the material is isotropic and tensors if the material is anisotropic. A perfect diamagnet such as a Type I superconductor has $\mu=0$ and will completely cancel the normal component of an external \mathbf{B} field at its surface by developing surface currents. A weaker diamagnet will partially expel an external field. The most diamagnetic element in the *Handbook of Chemistry and Physics* is bismuth with $\mu=0.99983$, just less than the unity of free space. Water, typical of the diamagnetism of living things, has a $\mu=0.999991$. Even so, this small effect can have dramatic results.

When a magnet approaches a weak diamagnetic sheet of relative permeability $\mu=1+\chi \approx 1$, we can solve the problem outside the sheet by considering an image current I' induced in the material but reduced by the factor $(\mu-1)/(\mu+1) \approx \chi/2$ (see Sec. 7.23 of Smythe¹⁹),

$$I' = I \frac{\mu-1}{\mu+1} \approx I \frac{\chi}{2}. \quad (17)$$

If the material were instead a perfect diamagnet such as a superconductor with $\chi=-1$ and $\mu=0$, an equal and opposite image is created as expected.

To take the finite size of the magnet into account we should treat the magnet and image as ribbon currents but first, for simplicity, we will use a dipole approximation which is valid away from the plates and in some other conditions to be described. The geometry is shown in Fig. 3.

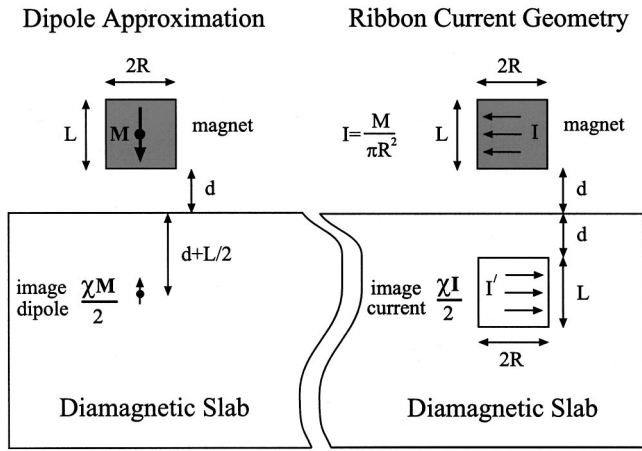


Fig. 3. Geometry for the image dipole and image ribbon current force calculations.

A. Dipole approximation of C_z

We will find the force on the magnet dipole by treating it as a current loop subject to an $\mathbf{I} \times \mathbf{B}$ force from the magnetic field of the image dipole. The image dipole is inside a diamagnetic slab a distance D ,

$$D = 2d + L, \quad (18)$$

from the center of a magnet in free space and has a strength determined by Eq. (17). The magnet has length L and radius R and is positioned at the origin of a coordinate system at $z=0$. We only need the radial component of the field from the induced dipole, B_{ir} at $z=0$.

Using the field expansion equations (7) and (9) for the case of the image dipole, we have

$$B_{ir} = -\frac{1}{2} B'_i r = \frac{\mu_0 \chi M}{8\pi} \frac{3r}{D^4}. \quad (19)$$

The lifting force is

$$F_i = I 2\pi R B_{ir} = \frac{M 2\pi R}{\pi R^2} B_{ir} = \frac{3M^2 |\chi| \mu_0}{4\pi D^4}. \quad (20)$$

For equilibrium at $z=0$, the lifting force will be balanced by the lifting magnet and gravity so that the net force is zero. The net force from two diamagnetic slabs will also be zero if the magnet is centered between the two slabs as shown in Fig. 4. This is the case we want to consider first.

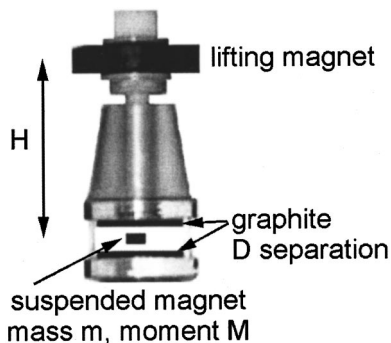


Fig. 4. Diamagnetically stabilized magnet levitation geometry for one compact implementation.

We now find the restoring force for small displacements in the z direction from one slab on the bottom,

$$\frac{\partial F_i}{\partial d} z = \frac{\partial F_i}{\partial D} 2z = -\frac{6M^2 |\chi| \mu_0}{\pi D^5} z. \quad (21)$$

For the case of a magnet centered between two slabs of diamagnetic material, the restoring force is doubled. We can equate this restoring force to the $C_z z^2$ term in the energy expansion equation (11). We take the negative gradient of the energy term to find the force in the z direction and equate the terms. For the two-slab case

$$\begin{aligned} -2C_z z &= -2 \frac{6M^2 |\chi| \mu_0}{\pi D^5} z, \\ C_z &= \frac{6M^2 |\chi| \mu_0}{\pi D^5}. \end{aligned} \quad (22)$$

B. Alternate route to C_z

The same result can be derived directly from the equation for the potential energy of a magnet with fixed dipole M in the induced field B_i of its image in a para- or diamagnetic material,¹⁹

$$U_i = -\frac{1}{2} \mathbf{M} \cdot \mathbf{B}_i. \quad (23)$$

We assume that the magnet is in equilibrium with gravity at $z=0$ due to forces from the lifter magnet and possibly forces from the diamagnetic material and we want to calculate any restoring forces from the diamagnetic material. The energy of the floater dipole M in the fields B_i of the induced dipoles from diamagnetic slabs above and below the magnet is

$$U_i = \frac{|\chi| M^2 \mu_0}{8\pi} \left[\frac{1}{(2d+L+2z)^3} + \frac{1}{(2d+L-2z)^3} \right]. \quad (24)$$

We expand the energy around the levitation point $z=0$,

$$U_i = U_{i0} + U'_i z + \frac{1}{2} U''_i z^2 + \dots \quad (25)$$

$$= \frac{|\chi| M^2 \mu_0}{8\pi} \left[\frac{2}{(2d+L)^3} + \frac{48}{(2d+L)^5} z^2 \right] + \dots \quad (26)$$

$$= C + \frac{6|\chi| M^2 \mu_0}{\pi D^5} z^2 + \dots \quad (27)$$

$$= C + C_z z^2 + \dots \quad (28)$$

This gives the same result as Eq. (22).

C. Maximum gap D in dipole approximation

Adding diamagnetic plates above and below the floating magnet with a separation D gives an effective energy due to the two diamagnetic plates,

$$U_{\text{dia}} = C_z z^2 = \frac{6\mu_0 M^2 |\chi|}{\pi D^5} z^2, \quad (29)$$

in the dipole approximation. From the stability conditions [Eqs. (13) and (14)], we see that levitation can be stabilized at the point where $B' = mg/M$ if

$$\frac{12\mu_0 M |\chi|}{\pi D^5} > B'' > \frac{(mg)^2}{2M^2 B_0}. \quad (30)$$

This puts a limit on the diamagnetic gap spacing

$$D < \left\{ \frac{12\mu_0 M |\chi|}{\pi B''} \right\}^{1/5} < \left\{ \frac{24\mu_0 B_0 M^3 |\chi|}{\pi (mg)^2} \right\}^{1/5}. \quad (31)$$

If we are far from the lifter magnet field, we can consider it a dipole moment M_L at a distance H from the floater. The equilibrium condition, Eq. (12), is

$$H = \left\{ \frac{3MM_L\mu_0}{2\pi mg} \right\}^{1/4}. \quad (32)$$

Then, the condition for stability and gap spacing at the levitation point is²⁰

$$D < H \left\{ 2|\chi| \frac{M}{M_L} \right\}^{1/5}. \quad (33)$$

The most important factor for increasing the gap is using a floater with the strongest possible M/m . Using the strongest diamagnetic material is also important. Lastly, a stronger lifting dipole further away (larger H) produces some benefit.

D. Surface current approximation

Treating the magnets and images as dipoles is useful for understanding the general dependencies, but if the floater magnet is large compared to the distance to the diamagnetic plates, there will be significant errors. These errors can be seen in Eq. (29), where the energy becomes infinite as the distance $D = 2d + L$ goes to zero. Since the gap spacing d is usually on the order of the floater magnet radius and thickness, more accurate calculations of the interaction energy are necessary. (In the special case when the diameter of a cylindrical magnet is about the same as the magnet length, the dipole approximation is quite good over the typical distances used, as can be confirmed in Fig. 6.)

Even treating the lifter magnet as a dipole is not a very good approximation in most cases. A better approximation for the field B_L from a simple cylindrical lifter magnet of length l_L and radius R_L at a distance H from the bottom of the magnet is

$$B_L = \frac{B_{Lr}}{2} \left[\frac{H + l_L}{\sqrt{(H + l_L)^2 + R_L^2}} - \frac{H}{\sqrt{H^2 + R_L^2}} \right], \quad (34)$$

where B_{Lr} is the remanent or residual flux density of the permanent magnet material. (The residual flux density is the value of B on the demagnetization $B-H$ curve where H is zero when a closed circuit of the material has been magnetized to saturation. It is a material property independent of the size or shape of the magnet being considered.) This equation is equivalent to using a surface current or solenoid model for the lifter magnet and is a very good approximation. If the lifter is a solenoid, B_{Lr} is the infinite solenoid field $\mu_0 NI/l_L$.

Figure 5 shows the measured field of a lifter ring magnet we used. The fit of the surface current approximation is better even 4 cm away, which was approximately the levitation force balance position. The ring magnet has an additional equal but opposite surface current at the inner diameter, which can be represented by a second equation of form (34).

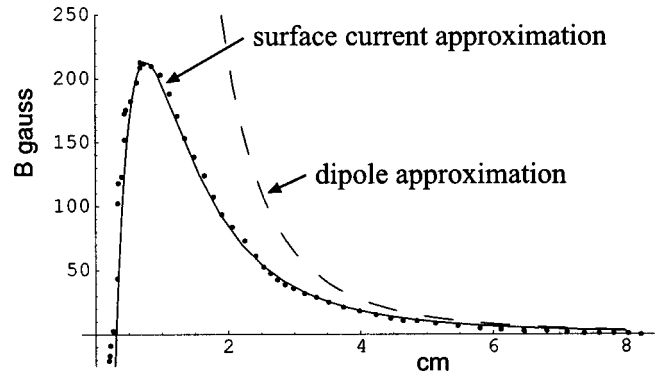


Fig. 5. Measured field from a ring lifter magnet with fits to a dipole approximation and a surface current approximation. The lifter is a ceramic material with B_r of 3200 G. The dimensions are o.d. 2.8 cm, i.d. 0.9 cm, and thickness 0.61 cm.

VI. METHOD OF IMAGE CURRENTS FOR EVALUATING C_z

The force between two parallel current loops of equal radii a separated by a distance c with currents I and I' can be written as (see Sec. 7.19 of Smythe¹⁹)

$$F_{\text{loops}} = \mu_0 II' \frac{c}{\sqrt{4a^2 + c^2}} \left[-K + \frac{2a^2 + c^2}{c^2} E \right], \quad (35)$$

where K and E are the elliptic integrals

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} d\theta, \quad (36)$$

$$E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta, \quad (37)$$

and

$$k^2 = \frac{4a^2}{4a^2 + c^2}. \quad (38)$$

We extend this analysis to the case of two ribbon currents because we want to represent a cylindrical permanent magnet and its image as ribbon currents. The geometry is shown in Fig. 3. We do a double integral of the loop force equation (35) over the length dimension L of both ribbon currents. With a suitable change of variables we arrive at the single integral

$$F = \mu_0 II' \int_{-1}^1 J \{1 - v \operatorname{sgn}(v)\} dv, \quad (39)$$

where

$$J = \sqrt{1 - k^2} \left[\frac{1 - \frac{1}{2}k^2}{1 - k^2} E(k) - K(k) \right], \quad (40)$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma^2}}, \quad \gamma = \frac{d}{R} + \frac{L}{2R}(1 + v),$$

$$\operatorname{sgn}(v) = \operatorname{sign} \text{ of } v = \begin{cases} +1 & \text{if } v > 0 \\ 0 & \text{if } v = 0 \\ -1 & \text{if } v < 0. \end{cases} \quad (41)$$

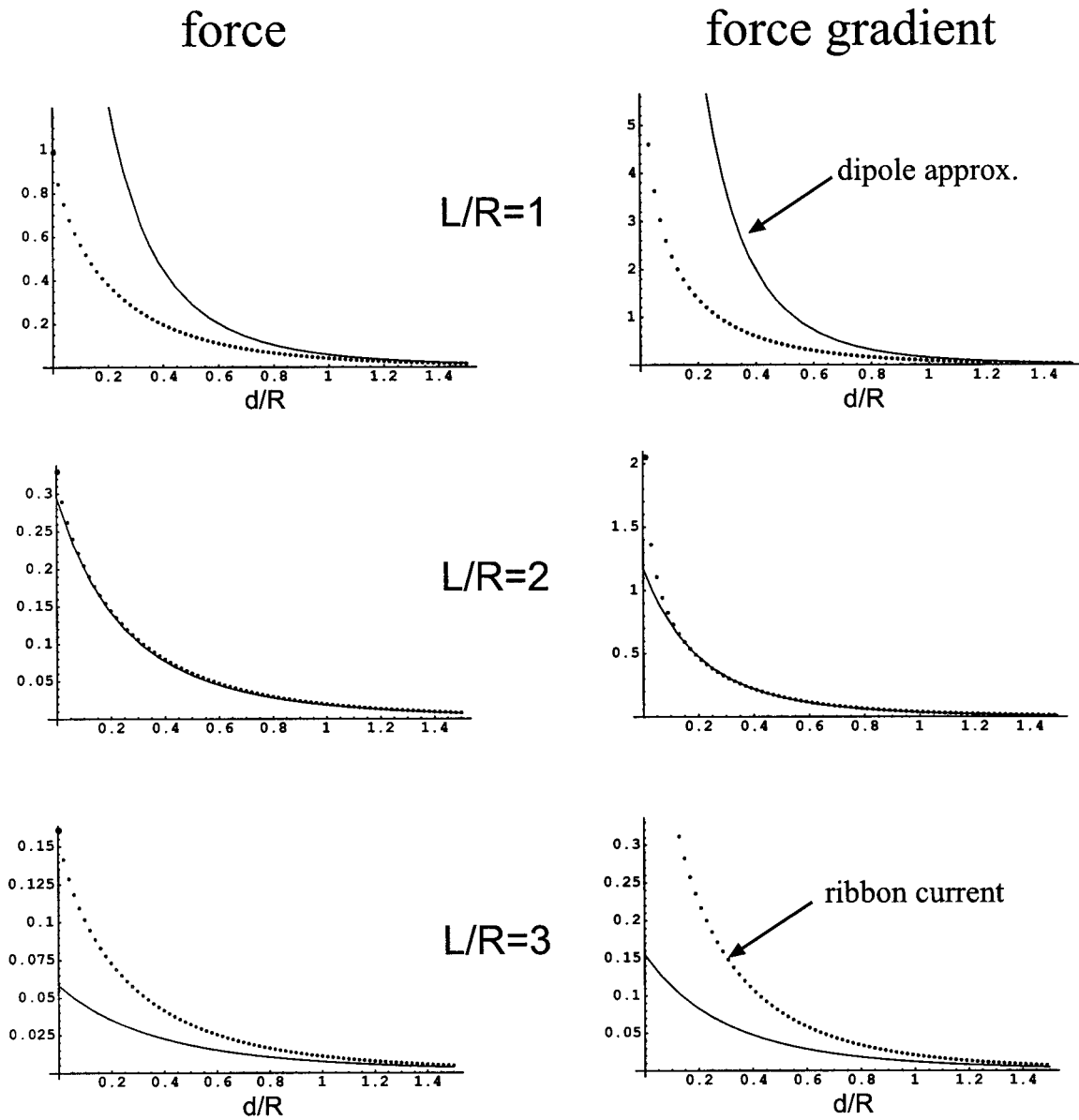


Fig. 6. Force on a magnet above a diamagnetic sheet as a function of distance above the sheet in units of magnet radius R . Dipole approximation compared to image current solution for three different magnet length to radius ratios. The force axis is in units of $\mu_0 I^2 \chi / 2$. The ribbon current I is related to the dipole moment M of the magnet by $M = I \pi R^2$. The force gradient axis is in units $-\mu_0 I^2 \chi / 2R$.

d is the distance from the magnet face to the diamagnetic surface and R and L are the radius and length of the floating magnet.

From measurements of the dipole moment M of a magnet, we convert to a current

$$I = \frac{M}{\text{area}} = \frac{M}{\pi R^2}. \quad (42)$$

Using Eq. (17), we have

$$I' = \frac{\chi M}{2\pi R^2}. \quad (43)$$

Once M , χ , and the magnet dimensions are known, Eq. (39) can be integrated numerically to find the force. If the force is measured, this equation can be used to determine the susceptibility χ of materials. We used this method to make our own susceptibility measurements and this is described below.

In the vertically stabilized levitation configuration shown in Fig. 4, there are diamagnetic plates above and below the floating magnet and at the equilibrium point, the forces balance to zero. The centering force due to the two plates is twice the gradient of the force F in Eq. (39) with respect to d , the separation from the diamagnetic plate, times the vertical displacement z of the magnet from the equilibrium position. We can equate this force to the negative gradient of the $C_z z^2$ energy term from Eq. (11),

$$-2C_z z = 2 \frac{\partial F}{\partial d} z. \quad (44)$$

Therefore, the coefficient C_z in Eqs. (11) and (13) is

$$C_z = -\frac{\partial F}{\partial d} \quad (45)$$

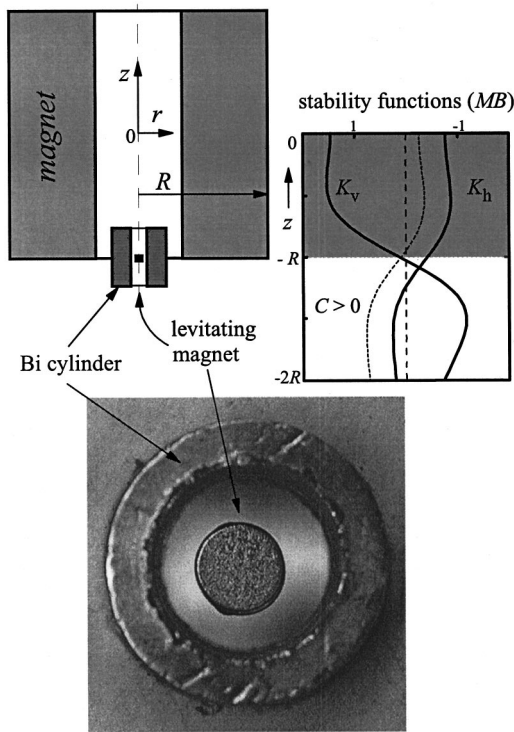


Fig. 7. Vertical and horizontal stability curves for magnet levitation showing the stabilizing effect of a diamagnetic cylinder with an inner diameter of 8 mm and the levitation geometry. Magnet levitation is stable where both curves are positive and the magnetic lifting force matches the weight of the magnet.

and this force must overcome the instability due to the unfavorable field curvature B'' . Figure 6 shows the force and gradient of the force for floating magnets of different aspect ratios.

Oscillation frequency. When the vertical stability conditions [Eq. (13)] are met, there is an approximately quadratic vertical potential well with vertical oscillation frequency

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{m} \left\{ -2 \frac{\partial F}{\partial d} - MB'' \right\}}. \quad (46)$$

Applying Eq. (22), in the dipole approximation, the vertical bounce frequency is

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{m} \left\{ \frac{12\mu_0 M^2 |\chi|}{\pi D^5} - MB'' \right\}}. \quad (47)$$

The expression in the curly braces, $2K_v$, represents the vertical stiffness of the trap. $2K_h$ represents the horizontal stiffness.

The theoretical and measured oscillation frequencies are shown later in Fig. 12. It is seen that the dipole approximation is not a very good fit to the data whereas the image current prediction is an excellent fit.

VII. THE C_r TERM

We now consider the case just above the inflection point where $B'' < 0$. A hollow diamagnetic cylinder with inner diameter D as shown in Fig. 7 produces an added energy term (in the dipole approximation)³

$$U_{\text{dia}} \equiv C_r r^2 = \frac{45\mu_0 |\chi| M^2}{16D^5} r^2. \quad (48)$$

Near the inflection point where B'' is negligible, the horizontal stability condition [Eq. (14)] becomes

$$\frac{45\mu_0 |\chi| M^2}{2D^5} > \frac{MB'^2}{B_0} = \frac{m^2 g^2}{MB_0}, \quad (49)$$

$$D < \left\{ \frac{45\mu_0 B_0 M^3 |\chi|}{2(mg)^2} \right\}^{1/5}. \quad (50)$$

This type of levitator can also be implemented on a tabletop using a large diameter permanent magnet ring as a lifter as described in the middle plot in Fig. 2.

The horizontal bounce frequency in the approximately quadratic potential well is

$$\nu_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{m} \left\{ \frac{45\mu_0 M^2 |\chi|}{8D^5} + \frac{MB''}{2} - \frac{MB'^2}{4B_0} \right\}}. \quad (51)$$

The expression in the curly braces, $2K_h$, represents the horizontal stiffness of the trap.

VIII. COUNTERINTUITIVE LEVITATION CONFIGURATION

There is another remarkable but slightly counterintuitive stable levitation position. It is above a lifter ring magnet with the floater in an attractive orientation. Even though it is in attractive orientation, it is vertically stable and horizontally unstable. The gradient from the lifter repels the attracting magnet but the field doesn't exert a flipping torque. This configuration is a reminder that it is not the field direction but the field gradient that determines whether a magnet will be attracted or repelled. A bismuth or graphite cylinder can be used to stabilize the horizontal instability.

Figure 8 shows the stability functions and magnetic fields for this levitation position above the lifter magnet. We have confirmed this position experimentally.

IX. EXPERIMENTAL RESULTS

Before we can compare the experimental results to the theory, we need to know the values of the magnetic dipole moment of the magnets and the susceptibility of diamagnetic materials we use. The dipole moment can be determined by measuring the $1/r^3$ fall of the magnetic field on axis far from a small magnet. For $\text{Nd}_2\text{Fe}_{14}\text{B}$ magnet material, it is an excellent approximation to consider the field as created by a solenoidal surface current and use the finite solenoid equation (34) fit to measurements.

The diamagnetic susceptibility was harder to measure. Values in the *Handbook of Chemistry and Physics* were problematic. Most sources agree on some key values such as water and bismuth. (There are multiple quantities called susceptibility and one must be careful in comparing values. Physicists use what is sometimes referred to as the volume susceptibility. Chemists use the volume susceptibility divided by the density. There is also a quantity sometimes called the gram molecular susceptibility which is the volume susceptibility divided by the density and multiplied by the molecular weight of the material. There are also factors of 4π floating around these definitions. In this paper we use the dimensionless volume susceptibility in SI units.)

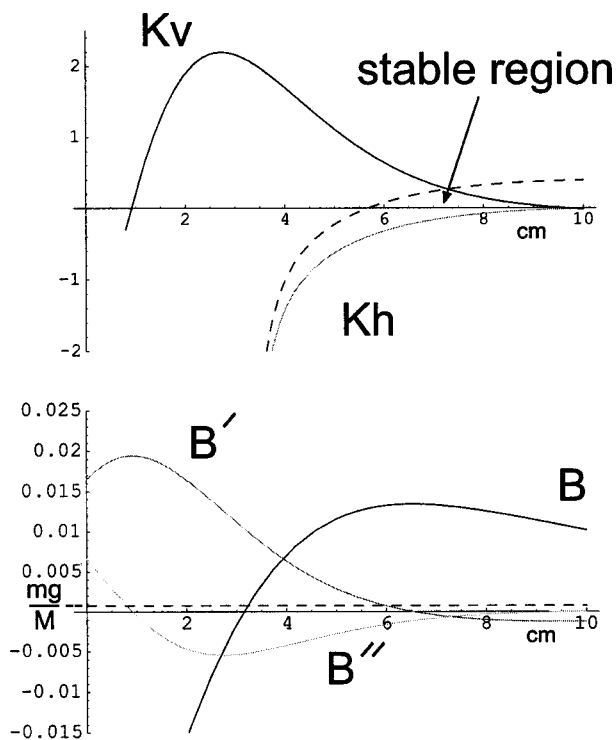


Fig. 8. (Top) Vertical and horizontal stability curves for magnet levitation a distance H above a ring lifter magnet. The dashed line shows the stabilizing effect of a diamagnetic cylinder. Magnet levitation is stable where both curves are positive and the magnetic lifting force matches the weight of the magnet. (Bottom) B (T), B' (T/cm), B'' (T/cm²), and mg/M (T/cm) for a 16-cm-o.d., 10-cm-i.d., 3-cm-thick ring lifting magnet and a NdFeB floater.

The values given in the *Handbook of Chemistry and Physics* and some other published sources for graphite are inexplicably low. This could be because graphite rods have many different compositions and impurities. Iron is a major impurity in graphite and can overwhelm any diamagnetic effect. We have seen graphite rods that are diamagnetic on one end and paramagnetic on the other. Braunbek noticed that used graphite arc rods were more diamagnetic on the side closest to the arc. He speculated that the binder used in the rods was paramagnetic and was vaporized by the heat of the arc. We found that, in practice, purified graphite worked as well as bismuth and our measurements of its susceptibility were consistent with this.

Values for a form of graphite manufactured in a special way from the vapor state, called pyrolytic graphite, are not given in the *Handbook* and the other literature gives a wide range of values. Pyrolytic graphite is the most diamagnetic solid substance known. It has an anisotropic susceptibility. Perpendicular to the planar layers, the diamagnetic susceptibility is better than in pure crystal graphite.²¹ Parallel to the planar layers, the susceptibility is lower than randomly oriented pressed graphite powder.

We developed a technique to measure the diamagnetic susceptibility of the materials we used. Later, we were able to get a collaborator (Fred Jeffers) with access to a state of the art vibrating sample magnetometer to measure some samples. There was very good agreement between our measurements and those made using the magnetometer.

A. Measurements of diamagnetic susceptibility

A simple and useful method for testing whether samples of graphite are diamagnetic or not (many have impurities that

destroy the diamagnetism) is to hang a small NdFeB magnet, say 6 mm diameter, as the bob of a pendulum with about 1/2 m of thread. A diamagnetic graphite piece slowly pushed against the magnet will displace the pendulum a few centimeters before it touches, giving a quick qualitative indication of the diamagnetism.

The method we used to accurately measure the susceptibility was to hang a small NdFeB magnet as a pendulum from pairs of long threads so that the magnet could move along only one direction. The magnet was attached to one end of a short horizontal drinking straw. At the other end of the straw, a small disk of aluminum was glued. A translation stage was first zeroed with respect to the hanging magnet without the diamagnetic material present. Then the diamagnetic material to be tested was attached to a micrometer translation stage and moved close to magnet, displacing the pendulum from the vertical. The force was determined by the displacement from vertical of the magnet and χ was determined from Eqs. (39) and (17), which is plotted as the force in Fig. 6.

A sample of bismuth was used as a control and matched the value in the standard references.²² Once the value for our sample of bismuth was confirmed, the displacement was measured for a fixed separation d between the magnet and bismuth. All other samples were then easily measured by using that same separation d , the relative force/translation giving the susceptibility relative to bismuth.

The difficult part was establishing a close fixed distance between the magnet and the diamagnetic material surface with high accuracy. This problem was solved by making the gap part of a sensitive LC resonant circuit. Attached to the translation stage, a fixed distance from the diamagnetic material under test, was the L part of the LC oscillator. When the gap between the diamagnet and magnet reached the desired fixed value, the flat piece of aluminum on the other side of the straw from the magnet, came a fixed distance from the L coil, changing its inductance. The separation distance could be set by turning a micrometer screw to move the translation stage until the frequency of the LC circuit reached the predetermined value for each sample under test. The setup is shown in Fig. 9.

This method was perhaps more accurate for our purposes than the vibrating sample magnetometer, an expensive instrument. Our method was independent of the volume of the diamagnetic material. The vibrating sample magnetometer is only as accurate as the volume of the sample is known. Samples are compared to a reference sample of nickel with a specific geometry. Our samples were not the same geometry and there was some uncertainty in the volume. Our measurements measured the susceptibility of the material in a way relevant to the way the material was being used in our experiments.

We measured various samples of regular graphite and pyrolytic graphite and bismuth. Our average values for the graphite materials are shown in Table I and are consistent with the values from the vibrating sample magnetometer. Our value for graphite is higher than many older values such as that reported in the *Handbook of Chemistry and Physics*, but is lower than that stated in a more recent reference.²³ Our values for pyrolytic graphite are below the low end of the values stated in the literature.^{18,24} The value for the pyrolytic graphite parallel to the planar layers is from the vibrating sample magnetometer.

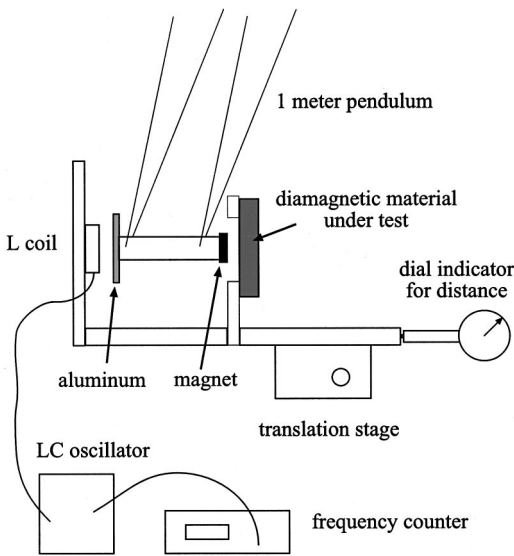


Fig. 9. Setup for measuring diamagnetic susceptibility. The diamagnetic material is moved close to the magnet, deflecting the magnet pendulum, until the gap between the magnet and diamagnet reaches a preset value. When the aluminum is a fixed distance from the inductor coil, the LC circuit resonates at the desired frequency, corresponding to the preset value of the gap. This is an accurate way to measure the small gap. The force is determined from the displacement of the pendulum. The force is then compared to the force from a previously calibrated sample of bismuth with the same gap.

B. Experimental realization of levitation

The fingertip and book stabilized levitation shown in Fig. 1 was achieved using a 1-m-diam 11-T superconducting solenoid 2.5 m above the levitated magnet where the field was 500 G. Using regular graphite and an inexpensive ceramic lifter magnet, it is possible to make a very stable levitator about 5 cm tall with a gap D of about 4.4 mm for a 3.175-mm-thick, 6.35-mm-diam NdFeB magnet. Using pyrolytic graphite, the gap D increases to almost 6 mm for the same magnet. This simple design (similar to Fig. 4) could find wide application. The stability curves and gradient matching condition can be seen in Fig. 10. The magnitude of C_z was determined from the force gradient in Fig. 6 with $L/R=1$ at two different gaps d using our measured susceptibility of pyrolytic graphite.

Figure 7 shows an experimental realization of horizontal stabilization at the High Field Magnet Laboratory in Nijmegen. We also achieved horizontal stabilization on a tabletop using a permanent magnet ring and a graphite cylinder.

We were recently able to achieve stable levitation at the counterintuitive position above the ring lifter magnet (described above). The floater is in attractive orientation but is naturally vertically stable and radially unstable. Radial stabilization was provided by a hollow graphite cylinder.

Other configurations for diamagnetically stabilized magnet levitation are possible and rotational symmetry is not required. For example, at the levitation position described just above, if an oval magnet or a noncircular array is used for a lifter instead of a circular magnet, the $x-z$ plane can be made stable. Instead of using a hollow cylinder to stabilize the horizontal motion, flat plates can be used to stabilize the y direction motion.

For vertical stabilization with flat plates, if a long bar mag-

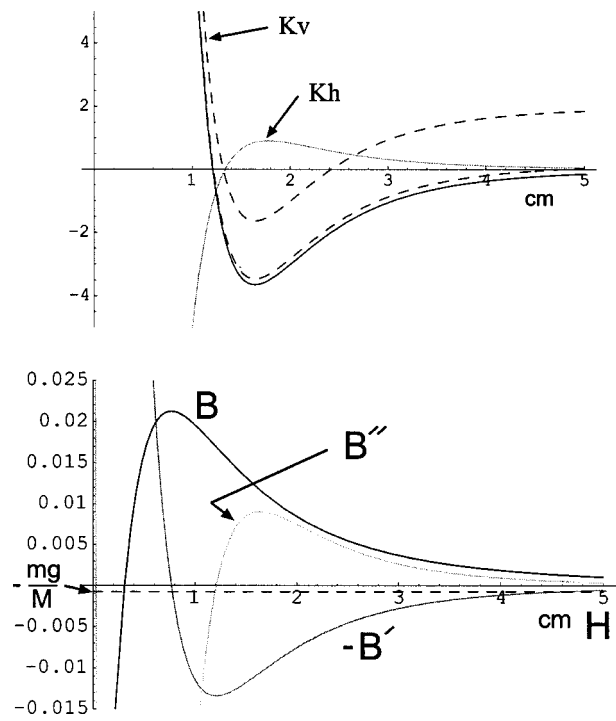


Fig. 10. Stability functions K_v and K_h for the demonstration levitator. Stability is possible where both functions are positive. The dashed lines show the effect of two different values of the C_z term on K_v . The smaller value corresponds to a large gap spacing $d=1.9$ mm. The larger value corresponds to a gap of only 0.16 mm. (Bottom) The levitation position is where $-mg/M$ intersects the gradient $-B'$ at approximately $H=4.5$ cm below the lifter magnet. B is in T, $-B'$ in T/cm, and B'' in T/cm².

net is used horizontally as a lifter, the levitation point can be turned into a line. With a ring magnet, the equilibrium point can be changed to a circle. Both of these tricks have been demonstrated experimentally.

Another quite different configuration is between two vertical magnet pole faces as shown in Fig. 11. Between the pole faces, below center and just above the inflection point in the magnetic field magnitude, the floating magnet is naturally vertically stable. Diamagnetic plates then stabilize the horizontal motion. To our knowledge, this configuration was first demonstrated by S. Shtrikman.

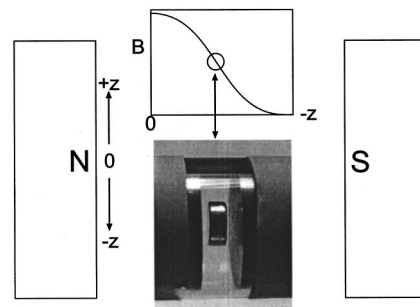


Fig. 11. Graphite plates stabilize levitation of a magnet below the centerline between two pole faces and just above the inflection point in the field magnitude. Not shown in the picture but labeled N and S are the 25-cm-diam pole faces of an electromagnet spaced about 15 cm apart. The poles can be from permanent or electromagnets.

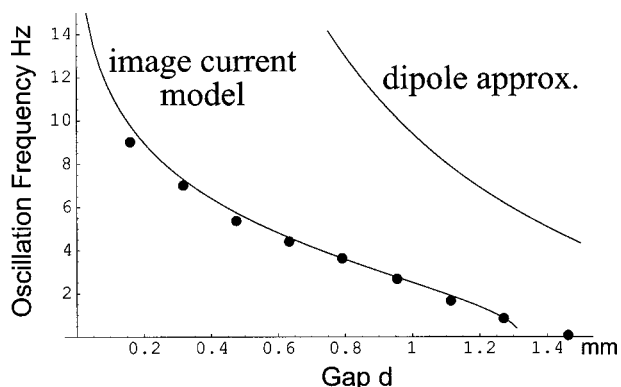


Fig. 12. Data points on the vertical oscillation frequency vs the gap spacing d with the dipole approximation prediction curve and the image current theory curve. The curves are not fit to the data. They are predictions from the measured properties of the magnets and diamagnets, with no free parameters. The last point is beyond the zero frequency limit and is plotted as zero. At zero frequency, the gap is too large to provide stability and the potential well becomes double humped, with stable points closer to one plate than the other. This clearly was the case with the last point around $d > 1.4$ mm.

C. Measurements of forces and oscillation frequencies

One way to probe the restoring forces of the diamagnetic levitator is to measure the oscillation frequency in the potential well. For the vertically stabilized levitator in Fig. 4 we measured the vertical oscillation frequency as a function of the gap spacing d and compared it to the dipole and image current forces and prediction equations (46) and (47). The lifting magnet used for this experiment was a 10-cm-long by 2.5-cm-diam cylindrical magnet. This magnet was used because its field could be accurately determined from the finite solenoid equation. The dipole moment was measured to be 25 A m^2 . The floater magnet was a 4.7-mm-diam by 1.6-mm-thick NdFeB magnet with a dipole moment of 0.024 A m^2 . It weighed 0.22 g and levitated 8 cm below the bottom of the lifter magnet as expected.

The graphite used was from a graphite rod, not pyrolytic graphite. We measured this sample of graphite to have a susceptibility of -170×10^{-6} . The oscillation frequency was determined by driving an 1800-ohm coil below the levitated magnet with a sine wave. The resonant frequency was determined visually and the vibration amplitude kept small. The gap was changed by carefully turning a $\frac{1}{4}$ -20 screw.

Figure 12 shows the theoretical predictions and the experimental measurements of the oscillation frequency as a function of gap spacing d . There are no adjustable parameters in the theory predictions. All quantities were measured in independent experiments. The agreement between the data and the image current calculation is remarkably good. There is a limit to how much the total gap $D = 2d + L$ can be increased. If D is too great, the potential well becomes double humped and the magnet will end up closer to one plate than the other. The last point with d greater than 1.4 mm was clearly in the double well region and was plotted as zero.

X. LEVITATION SOLUTIONS FOR A CYLINDRICALLY SYMMETRIC RING MAGNET

A ring magnet provides many combinations of fields, gradients, and curvatures as shown in Fig. 13. Considering the field topology but not the magnitudes, we show all possible

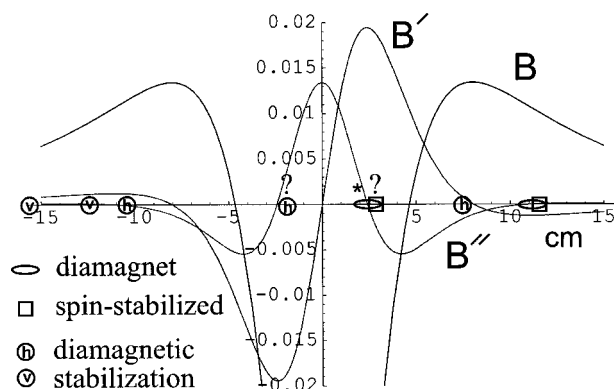


Fig. 13. B (T), B' (T/cm), and B'' (T/cm²), for a 16-cm-o.d., 10-cm-i.d., 3-cm-thick ring lifting magnet showing the fields on axis above and below the magnet. All possible levitation positions are shown for spin-stabilized magnet levitation, diamagnetically stabilized magnet levitation, and levitation of diamagnets. h and v indicate use of diamagnetic material for horizontal or vertical stabilization. The two regions with question marks have not yet been verified experimentally and may be difficult to achieve. The levitation of diamagnets marked with an asterisk has recently been demonstrated by the authors.

positions where diamagnets, spin-stabilized magnets, and magnets stabilized by diamagnetic material can levitate. The fields and gradients shown may not be sufficient to levitate a diamagnet in the position shown against 1 g of gravity, but the topology is correct if the magnetic field could be increased enough.

Each type of levitation has its own requirements for radial and horizontal stability which are shown in Tables II and III. Other requirements such as matching the magnetic field gradient to mg/M need be met. The fields must be in the right direction so as not to flip the magnet. The directions shown in Table II are all compared to the direction of B .

The most fruitful place to look for levitation positions is around the inflection points of the magnetic field. These are the places where the instability is weakest. The two levitation regions in Fig. 13 marked with a question mark have not been demonstrated experimentally and are probably not accessible with current magnetic and diamagnetic materials. The lower position with a question mark would work using a diamagnetic cylinder for radial stabilization. However, it may require more diamagnetism than is available. The levitation positions without the question marks have been demonstrated experimentally. The position for levitation of a diamagnet marked with an asterisk has recently been demonstrated by the authors.

The locations for diamagnetically stabilized magnet levitation are interesting for another reason. At these locations servo control can be used to provide active stabilization very

Table II. Magnetic field requirements for levitation of diamagnets, spin-stabilized magnet levitation, and diamagnetically stabilized levitation of magnets. Plus signs (+) and minus signs (−) indicate the sign with respect to the sign of B .

	M aligned with B	B'	B''
Levit. of diamagnets	−	−	+ or −
Spin-stabilized magnet	−	−	+
Diamag. stab. horiz.	+	+	−
Diamag. stab. vert.	+	+	+

Table III. Stability functions for levitation of diamagnets, spin-stabilized magnets, and diamagnetically stabilized magnets. The functions must be positive for stability and assume B_0 in the positive z direction.

	Vertical	Horizontal
Levit. of diamagnets	$B_0 B'' + B'^2$	$B'^2 - 2B_0 B''$
Spin-stabilized magnet	B''	$B'^2 - 2B_0 B''$
Diamag. stab. magnet	$C_z - \frac{1}{2} M B''$	$C_r + \frac{1}{4} M \left\{ B'' - \frac{B'^2}{2B_0} \right\}$

efficiently, since the instability is weak at those locations. The diamagnetic plates or cylinder act as a very weak servo system.

ACKNOWLEDGMENTS

We acknowledge fruitful communications with Michael Berry. We would like to thank Marvin Drandell for his help fabricating many prototype levitators, Rudy Suchanek for his translation of Braubek's¹⁰ papers from German, and Fred Jeffers for helping confirm our susceptibility measurements. We thank Robert Romer for his support and for keeping error out of the manuscript.

^aElectronic mail: msimon@physics.ucla.edu

^bFormerly High Field Magnet Lab., Nijmegen, The Netherlands.

¹M. V. Berry and A. K. Geim, "Of flying frogs and levitrons," *Eur. J. Phys.* **18**, 307–313 (1997); <http://www-hfml.sci.kun.nl/hfml/levitate.html>.

²A. Geim, "Everyone's Magnetism," *Phys. Today* **51**, 36–39 (1998).

³A. K. Geim, M. D. Simon, M. I. Boamfa, and L. O. Heflinger, "Magnetic levitation at your fingertips," *Nature (London)* **400**, 323–324 (1999).

⁴M. D. Simon and A. K. Geim, "Diamagnetic levitation: flying frogs and floating magnets," *J. Appl. Phys.* **87**, 6200–6204 (2000).

⁵N. W. Ashcroft and N. D. Mermin, *Solid State Physics* (Harcourt Brace, New York, 1976), Chap. 31, p. 647.

⁶R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands, *The Feynman Lectures in*

Physics (Addison–Wesley, New York, 1963), Vol. II, Chap. 34, Sec. 6.

⁷S. Earnshaw, "On the nature of the molecular forces which regulate the constitution of the luminiferous ether," *Trans. Cambridge Philos. Soc.* **7**, 97–112 (1842).

⁸K. T. McDonald, "Laser tweezers," *Am. J. Phys.* **68**, 486–488 (2000).

⁹W. Thomson, *Reprint of Papers on Electrostatics and Magnetism* (MacMillan, London, 1872), paper XXXIII, pp. 493–499, and paper XXXIV, pp. 514–515.

¹⁰W. Braubek, "Freischwebende Körper im elektrischen und magnetischen Feld," *Z. Phys.* **112**, 753–763 (1939); "Freies Schweben diamagnetischer Körper im Magnetfeld," *ibid.* **112**, 764–769 (1939).

¹¹V. Arkadiev, "A floating magnet," *Nature (London)* **160**, 330 (1947).

¹²R. M. Harrigan, U.S. patent 4,382,245 (1983).

¹³M. D. Simon, L. O. Heflinger, and S. L. Ridgway, "Spin stabilized magnetic levitation," *Am. J. Phys.* **65**, 286–292 (1997).

¹⁴M. V. Berry, "The Levitron™: An adiabatic trap for spins," *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **452**, 1207–1220 (1996).

¹⁵Ed Phillips (private communication).

¹⁶V. V. Vladimirkii, "Magnetic mirrors, channels and bottles for cold neutrons," *Sov. Phys. JETP* **12**, 740–746 (1961); W. Paul, "Electromagnetic traps for charged and neutral particles," *Rev. Mod. Phys.* **62**, 531–540 (1990).

¹⁷A. H. Boerdijk, "Technical aspects of levitation," *Philips Res. Rep.* **11**, 45–56 (1956); "Levitation by static magnetic fields," *Philips Tech. Rev.* **18**, 125–127 (1956/57).

¹⁸V. M. Ponzovskii, "Diamagnetic suspension and its applications (survey)," *Prib. Tekh. Eksp.* **4**, 7–14 (1981).

¹⁹W. R. Smythe, *Static and Dynamic Electricity* (Hemisphere Publishing, New York, 1989), 3rd ed.

²⁰M. V. Berry first suggested the simplification of treating the lifter magnet as a dipole and derived Eq. (33) in a 1997 correspondence with M. D. Simon.

²¹D. B. Fischback, "The magnetic susceptibility of pyrolytic carbons," *Proceedings of the Fifth Conference on Carbon*, 1963, Vol. 2, pp. 27–36.

²²For example, the *Handbook of Chemistry and Physics* (The Chemical Rubber Co., Boca Raton, FL, 1992–1993).

²³I. Simon, A. G. Emslie, P. F. Strong, and R. K. McConnell, Jr., "Sensitive tiltmeter utilizing a diamagnetic suspension," *Rev. Sci. Instrum.* **39**, 1666–1671 (1968).

²⁴R. D. Waldron, "Diamagnetic levitation using pyrolytic graphite," *Rev. Sci. Instrum.* **37**, 29–35 (1966).

SELF-DELUSION

Theism (and the implicit rejection of reductionism) is a system of knowledge based on ignorance, and that twin of ignorance, fear. It would certainly be too much to expect a theologian (or indeed a scientist) to admit that his lifetime's work had been based on a false foundation. It is even less likely that anyone religious, unless they were exceptionally self-honest and intellectually sinewy, would admit that the whole history of their church was based on a clever, but understandable, self-delusion (and in some cases, I suspect, on a straightforward conscious lie). I consider that religion is a delusion propagated by a combination of ignorance, art, and fear, fanned into longevity and ubiquity by the power it gave to those in command.

P. W. Atkins, "The Limitless Power of Science," in *Nature's Imagination—The Frontiers of Scientific Vision*, edited by John Cornwell (Oxford University Press, New York, 1995).

Levitação Magnética



Humberto de Andrade Carmona

Universidade Estadual do Ceará,
Campus do Itaperi

Av. Paranjana, 1700 - Fortaleza, CE

e-mail: carmona@uece.br

É possível um ser vivo levitar? Ao cidadão comum, a resposta a essa pergunta está apenas nos livros de ficção científica. No entanto, a ciência e a tecnologia têm encontrado formas de fazer seres vivos levitarem.

Alguns dispositivos utilizando feixes de ar podem levar ao fenômeno. Por exemplo, um helicóptero, não que ele seja um ser vivo, mas pode conter um. Outros dispositivos utilizam campos magnéticos e materiais supercondutores. Já há algum tempo, cientistas pensam no uso do magnetismo para levantar veículos, seja utilizando ímãs permanentes ou supercondutores.

Um supercondutor resfriado com nitrogênio líquido, flutuando sobre um ímã é uma imagem um tanto comum para a comunidade científica hoje em dia, e não surpreenderia um físico. Supercondutores são materiais diamagnéticos perfeitos e a expulsão do campo magnético de seu interior causa sua levitação. Já um pequeno sapo, ou mesmo um morango, à temperatura ambiente, levitando no centro de um magneto, é uma imagem menos comum.

Apesar de menos comum e surpreendente, mostraremos neste artigo que é possível levantar um ser vivo. Cientistas, entre eles o autor deste artigo e o russo Andrei Geim, realizaram experimentos de levitação de vários materiais, no Laboratório de Altos Campos Magnéticos (HFML) da Universidade Católica de Nijmegen, Ho-

landa, em 1997¹⁻³. Nestes experimentos levitou-se praticamente tudo que se tinha em mãos, de criaturas vivas como um sapo, gafanhoto, pequeno peixe, plantas até pequenos pedaços de pizza e água. Em 1991, Eric Beaugno e Robert Tournier, utilizando o mesmo processo, levitaram água e algumas substâncias orgânicas⁴. Chamaremos o processo de levitação utilizado nesses experimentos de *levitação magnética*.

A Figura 1 mostra uma seqüência fotográfica de um pequeno sapo levitando no centro de um solenóide.

Para obter *levitação magnética* é necessário um campo magnético com características especiais e com intensidade relativamente alta. O objeto, nesse caso o sapo, é colocado no centro de um magneto do tipo Bitter, com diâmetro interno de 32 mm, como mostra a Figura 2. Uma corrente elétrica de até 20 kA na bobina do magneto produz campos magnéticos de até 20 Tesla. O conjunto de bobinas do magneto é projetado de forma que o campo magnético seja máximo e homogêneo no centro da bobina interna (região indicada pela letra A na

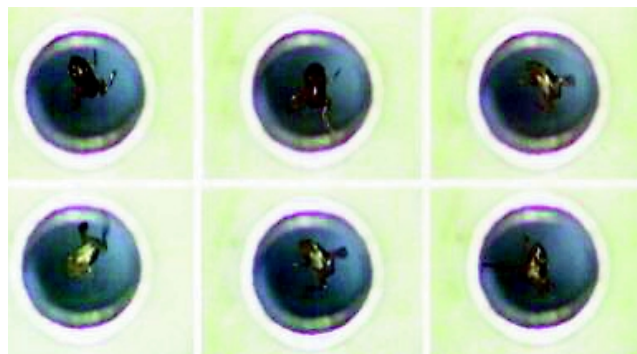


Figura 1. Seqüência fotográfica de um pequeno sapo levitando no centro de um magneto de 20 Tesla.

Neste trabalho descreve-se um experimento mostrando que um ser vivo pode levitar. Longe de precisar de 'poderes extra-sensoriais', a levitação pode ser alcançada por meio de campos eletromagnéticos. Vejamos como conseguir uma *levitação magnética*.

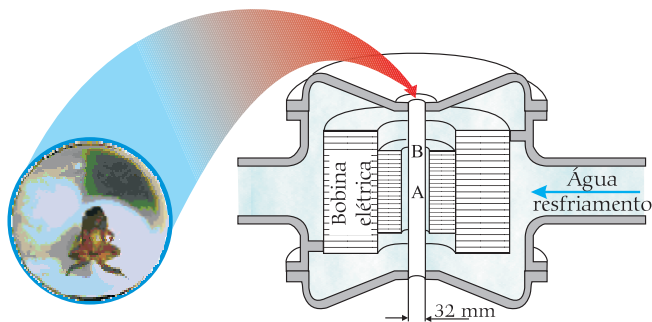


Figura 2. Diagrama esquemático de um magneto Bitter. Uma corrente elétrica de até 20 kA atravessa uma bobina elétrica de cobre, produzindo campos magnéticos de até 20 T. Um sistema de resfriamento com água em alta pressão é usado para que o cobre não se aqueça até a fusão.

Figura 2). Nas proximidades do topo da bobina interna (região indicada pela letra B na Figura 2), o campo magnético apresenta gradientes nas direções axial e radial. Veremos mais tarde que esses gradientes são importantes para a observação do fenômeno de levitação.

Apesar de surpreendente, mesmo para alguns físicos, a levitação estável de materiais comuns em nosso dia-a-dia possui uma explicação simples e se baseia em uma propriedade intrínseca de muitos materiais chamada *diamagnetismo*, que se refere ao fato de que esses materiais têm a habilidade de expelir um campo magnético externo. O diamagnetismo pode ser entendido superficialmente da seguinte forma: como se sabe, toda matéria no universo consiste de átomos, e cada átomo possui elétrons em movimento em torno de seu núcleo. Ao colocar um átomo em um campo magnético, os elétrons em movimento em torno de seu núcleo alteram seus movimentos de forma a se oporem a essa influência externa, ou seja, esses elétrons criam seu próprio campo magnético de forma que cada átomo funciona

Apesar de surpreendente, a levitação estável de materiais comuns possui uma explicação simples, e se baseia em uma propriedade intrínseca de muitos materiais chamada diamagnetismo

como um pequeno ímã que aponta na direção contrária ao campo magnético aplicado. Nesta situação,

lem. No caso do sapo, o pólo positivo da campo externo também repele os pólos positivos de cada átomo magnetizado do nosso material, uma vez que os campos são contrários. Quando essa força de repulsão é maior que o peso do material, esse pode levitar.

Ora, se a explicação parece tão simples, por que surpreenderia muitos físicos? Acontece que o efeito do diamagnetismo dos materiais, ou seja, o tamanho do campo magnético induzido é, em geral, muito pequeno. O campo induzido em um material diamagnético, como um sapo, por exemplo, é cerca de um bilhão de vezes menor que o campo magnético de um ímã comum. Acredita-se, portanto, que seja preciso um campo magnético externo enorme para produzir um efeito como a levitação. William Thomson, o Lord Kelvin, se referindo à levitação de materiais diamagnéticos disse: “Será provavelmente impossível observar esse

fenômeno devido à impossibilidade de se obter um ímã suficientemente forte e uma substância diamagnética suficiente-mente leve, pois as forças (magnéticas) são excessivamente fracas”⁵.

Acontece que as forças magné-

ticas não são assim tão fracas. Foi possível observar a levitação de materiais diamagnéticos com campos magnéticos de cerca de 10 T, relativamente comuns em laboratórios hoje em dia, apesar de não existirem na época de Kelvin. Para mostrar que com esse valor de campo magnético é possível observar o fenômeno, precisamos de uma explicação um pouco mais elaborada do que a dada anteriormente.

Quando se tenta aproximar os pólos iguais de dois ímãs, estes se repe-

lem. No caso do sapo, o pólo positivo da campo externo também repele os pólos positivos de cada átomo magnetizado do nosso material, uma vez que os campos são contrários. Quando essa força de repulsão é maior que o peso do material, esse pode levitar.

Ora, se a explicação parece tão simples, por que surpreenderia muitos físicos? Acontece que o efeito do diamagnetismo dos materiais, ou seja, o tamanho do campo magnético induzido é, em geral, muito pequeno. O campo induzido em um material diamagnético, como um sapo, por exemplo, é cerca de um bilhão de vezes menor que o campo magnético de um ímã comum. Acredita-se, portanto, que seja preciso um campo magnético externo enorme para produzir um efeito como a levitação. William Thomson, o Lord Kelvin, se referindo à levitação de materiais diamagnéticos disse: “Será provavelmente impossível observar esse fenômeno devido à impossibilidade de se obter um ímã suficientemente forte e uma substância diamagnética suficiente-

$$U = \rho V g z - \frac{\vec{m} \cdot \vec{B}}{2} = \rho V g z - \frac{\chi V}{2\mu_0} B^2 \quad (1)$$

onde g é a aceleração da gravidade, ρ é a densidade do material e z é a altura do corpo. Para que o material flutue de forma estável a uma altura z em alguma posição é necessário que U tenha um ponto de mínimo⁶. A condição de equilíbrio é que a força,

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = -\rho V g \hat{z} + \frac{\chi V}{2\mu_0} \vec{\nabla}B^2 \quad (2)$$

seja nula. Na direção z , para que a força gravitacional seja compensada pela magnética, a equação 2 conduz a

$$B \frac{\partial B}{\partial z} = \frac{\mu_0 \rho g}{\chi} \quad (3)$$

Vê-se, portanto, que para haver equilíbrio não basta um campo magnético com alta intensidade (χ para a maioria dos materiais diamagnéticos

*Em alguns materiais, como o ferro, os átomos já se comportam naturalmente como ímãs, sendo essa propriedade predominante. Esses materiais (chamados ferromagnéticos e paramagnéticos) ao invés de repelirem o campo externo, na verdade intensificam o mesmo, sendo, então, atraídos por um ímã.

é pequeno), mas é preciso que este seja também não homogêneo (para materiais diamagnéticos o campo deve diminuir de amplitude com a altura). A partir da equação 3 pode-se estimar o valor da amplitude do campo necessário para levantar um material. Para isso, tome-se como exemplo a água como material diamagnético: para a água⁷ $\chi = -8,8 \times 10^{-6}$, e tomando $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, tem-se $B\partial B/\partial z = -1400,9 \text{ T}^2 \text{ m}^{-1}$. A Figura 3 mostra o perfil da magnitude do campo magnético com a altura z para o magneto esquematizado na Figura 1.

Da Figura 3 tem-se, na posição $z = 78 \text{ mm}$ onde $B = 0.63B_0$, que a derivada do campo é $\partial B/\partial z = -8,15B_0 \text{ m}^{-1}$, do que é necessário um campo magnético central $B_0 = 16,5 \text{ T}$ para observar levitação. Esse valor está de acordo com o valor necessário para levantar uma pequena quantidade de água mostrada na Figura 4.

Uma questão importante envolve a estabilidade do equilíbrio⁶. Para que o equilíbrio seja estável a força dada pela equação (2) deve ser uma força restauradora, o que pode ser expresso matematicamente por $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} < 0$ ⁴. Da equação (2) segue que,

$$\frac{\chi V}{2\mu_0} = \nabla^2 B^2 < 0 \quad (4)$$

Mas como não existem monopolos magnéticos ($\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$) e como não existem correntes na região do centro do magneto ($\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$), pode-se mostrar⁶ que $\nabla^2 B^2 \geq 0$. Portanto, a equação (4) implica que uma condição necessária para levitação estável é χ ser menor que zero. Ou seja, levitação estável só pode ocorrer para materiais dia-

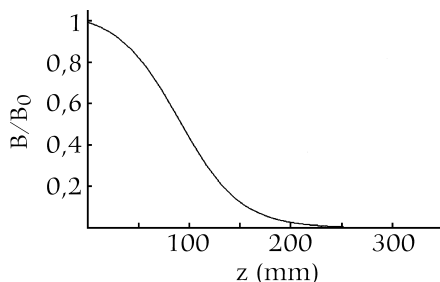


Figura 3. Amplitude do campo magnético no eixo do magneto esquematizado na Figura 1. B_0 é o valor da amplitude do campo magnético no centro do magneto.



Figura 4. Levitação de uma porção de água pura. A forma arredondada da gota d'água é devido à ausência de uma força resultante.

magnéticos. Isso significa que se tentar levantar um pequeno pedaço de ferro usando ímãs, você poderá conseguir com que este seja repelido, mas não conseguirá fazê-lo flutuar estavelmente, *qualquer que seja o desenho ou configuração dos ímãs que utilizar*.

A levitação estável de materiais diamagnéticos pode parecer ainda mais surpreendente para os físicos, pois aparentemente viola a restrição imposta pelo teorema de Earnshaw⁸ que diz "*não é possível atingir levitação estável de um objeto feito de cargas, magnetos e massas com uma configuração fixa, com uma combinação qualquer de forças magnetostáticas, eletrostáticas e gravitacional*". A prova desse teorema é dada pela própria equação (4), a energia potencial de uma amostra magnética ($\chi > 0$), na presença de forças magnetostáticas, não pode apresentar um mínimo requerido para estabilidade.

Como vimos, apenas materiais diamagnéticos podem se livrar das imposições representadas no teorema de Earnshaw. A razão é que o diamagnetismo emerge do movimento dos elétrons em torno do núcleo e, portanto, o sistema não pode ser considerado como "*cargas, magnetos e massas com uma configuração fixa*".

Uma vez que se crie a condição adequada de campo magnético, com intensidade e geometria apropriadas, um ser vivo, portanto, *pode* levantar. Isso significa que *em princípio* mesmo um *ser humano* poderia ser suspenso no ar

utilizando essa técnica, o que não significa que *podemos* fazer tal experimento. O problema é conseguir um campo magnético alto, em um volume grande suficiente, para acomodar um ser humano. Além disso, o valor de campo externo para conseguir $B\partial B/\partial z$ suficientemente grande para levantar um ser humano aumenta com o volume da região. De acordo com desenhistas de magnetos do National High Magnetic Field Laboratory³ em Tallahassee, Flórida, com a tecnologia atual pode-se acomodar objetos de até 15 cm.

Apesar de não poder levantar magneticamente seres humanos, o fato de as forças magnética e gravitacional se cancelarem na escala atômica torna possível que experimentos que necessitam de condições de microgravidade (devemos manter em mente que, como os objetos são finitos e as condições de B e $\partial B/\partial z$ variam espacialmente, em algumas partes dos objetos as forças magnética e gravitacional não se cancelam exatamente) possam ser realizados aqui mesmo na Terra, mesmo com organismos vivos complexos.

Quanto aos efeitos de altos campos magnéticos em seres vivos, se alguém lendo esse artigo ficou preocupado com efeitos adversos, sapos são provavelmente muito pequenos. Em aplicações médicas, como em ressonância magnética nuclear, experimentos com voluntários mostram que não há perigo na exposição a campos magnéticos de até 4 Tesla⁹.

Referências Bibliográficas

1. Veja seção "Physics in Action" na *Physics World*, v. 10, n. 4, de abril de 1997, p. 28.
2. Veja seção "This Week" na *New Scientist* 154 (2077) de 12 abril de 1997, p. 13.
3. Geim, A.K. *Physics Today*, setembro (1998).
4. Beaunon, E.; Tournier, R. *Nature* 349, 470 (1991).
5. Thomson, W. (Lord Kelvin), Reprints of Papers on Electrostatics and Magnetism, MacMillan London, (1872).
6. Berry, M.V.; Geim, A.K. *Eur. J. Phys.* 18, 307 (1997).
7. Kaye, W.G.; Laby, T.H. *Tables of Physical and Chemical Constants*, Longman, London, (1973).
8. Earnshaw, S. *Trans. Camb. Phil. Soc.* 7, 97 (1842); W. T. Sott, *Am. J. Phys.* 27, 418 (1959).
9. Schenck, J.F. *Annals NY Acad. Sci* 649, 285 (1992).